TEMat

La integral de Henstock-Kurzweil y el segundo teorema fundamental del cálculo

Javier Martínez Perales
BCAM - Basque Center for Applied Mathematics
javicemarpe@gmail.com

Resumen: En este artículo repasamos brevemente la definición y los problemas de la integral de Riemann y definimos un concepto de integral con el cual es posible superar las deficiencias de la integral de Riemann. Esta nueva integral es la integral de Henstock-Kurzweil que, con una definición muy similar a la de la integral de Riemann, es capaz de superar tanto a esta integral como a la de Lebesgue en muchos sentidos.

Concretamente, veremos cómo, utilizando esta integral, es posible recuperar cualquier función derivable a partir de su derivada. Para ello, introduciremos el concepto de medidor y, para ilustrar su utilidad, veremos por el camino cómo los medidores nos permiten probar algunos resultados clásicos.

Palabras clave: Riemann, Henstock-Kurzweil, integral, teorema fundamental del cálculo, teorema de Cousin, medidor.

MSC2010: 26A39, 26A42.

Recibido: 3 de marzo de 2017.
Aceptado: 2 de abril de 2017.

Agradecimientos: Me gustaría agradecer a los profesores Francisco Javier Martín Reyes y José Ángel Peláez Márquez de la Universidad de Málaga por su orientación y motivación en el desarrollo de mis trabajos de fin de Grado y Máster, respectivamente, además de por su dedicación a la hora de aconsejarme y ayudarme para poder comenzar en el mundo de la investigación.

Quiero agradecer también a Ana, Antonio, Belén, Claudia, Dani (López y Amado), Guille, Horten, Iván, Jorge, José, Juanfran, Juanmi, Juli, Lorena, Lucía, Manu, Natalia, Toni y Valentina, además de a mis hermanos y abuelos por su amistad, por estar conmigo y por ser mi soporte.

En especial, quiero dedicar este pequeño trabajo a mi padre y a mi madre, por dármelo todo.

Referencia: Martínez Perales, Javier. «La integral de Henstock-Kurzweil y el segundo teorema fundamental del cálculo». En: *TEMat*, 1 (2017), págs. 15-23. ISSN: 2530-9633. URL: http://temat.anemat.com/articulo/2017-p15/.

1. Introducción

Algo después de la aparición de la teoría de integración de Lebesgue, los matemáticos Arnaud Denjoy [2] en 1912 y Oskar Perron [6] en 1914 desarrollaron nuevos procesos de integración que generalizan el de Lebesgue y resuelven el problema del Teorema Fundamental del Cálculo: toda función derivable se puede recuperar a partir de su derivada mediante estos procesos de integración. Se puede encontrar una exposición de ambas teorías en el libro de Gordon [3].

En los años 50, los matemáticos Jaroslav Kurzweil [5] y Ralph Henstock [4] encontraron, independientemente, un proceso de integración más sencillo que el de Lebesgue, constituyendo una pequeña modificación en la técnica de integración de Riemann pero que da lugar a una teoría de integración aún más general que la de Lebesgue. Este método resulta ser equivalente a los propuestos por Denjoy y Perron (de nuevo se puede encontrar una prueba de ello en el libro de Gordon [3]). La (al menos aparente) complejidad de los procesos de integración de Denjoy y Perron hace aún más interesante, por su sencillez, el estudio de la integral de Henstock-Kurzweil.

En este artículo vamos a ver cómo, con muy poco esfuerzo, la integral de Henstock-Kurzweil es capaz de resolver el problema de recuperar una función a partir de su derivada. Todos los resultados que encontraremos aquí pueden consultarse en varios libros. Entre ellos, uno de los que tratan el tema de manera muy elemental es el libro de Bartle [1], en el cual se basa fundamentalmente esta exposición.

2. Notación y preliminares

A lo largo del texto, I representará un intervalo compacto $[a, b]$, con $a \leq b$, y su longitud será $|I| = b - a$. Un concepto fundamental a la hora de definir la integral de Henstock-Kurzweil es el de partición de un intervalo. Dado un intervalo I, diremos que una familia finita $\mathcal{P} = \{I_i\}_{i=1}^n$ es una **partición** de I si está formada por una familia de intervalos **no solapados** (esto es, con interiores disjuntos) cuya unión es I. Denotaremos por $\mathcal{P}(I)$ al conjunto de todas las particiones del intervalo I.

Podemos ordenar siempre los I_i de una partición de manera que $\sup I_i = \inf I_{i+1}$ para cada i entre 1 y $n-1$, de modo que siempre los escogeremos de este modo. Además, obsérvese que, dada una partición $\mathcal{P} = \{I_i\}_{i=1}^n$ del intervalo $[a, b]$, obtenemos una colección finita y ordenada de puntos de la recta real,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = b.$$

Dichos puntos son los extremos de los subintervalos de la partición. Claramente, dada una colección finita y ordenada de puntos como la anterior, obtenemos una partición del intervalo $[a, b]$. En definitiva, podemos dar una partición de dos formas: definiendo los intervalos que la forman o dando los extremos de estos de manera ordenada.

Una vez partido el intervalo I con una partición $\mathcal{P} = \{I_i\}_{i=1}^n$, necesitamos una forma de tener en cuenta los valores de la función a integrar en cada subintervalo de la partición. Para cada I_i, elijamos $t_i \in I_i$. Decimos que el punto t_i es una **etiqueta** de I_i. Al par (I_i, t_i) le llamaremos **intervalo etiquetado** y diremos que $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ es una **partición etiquetada** de I. El punto sobre el símbolo $\mathcal{P}$ significará que la partición está etiquetada. Es claro que una partición $\mathcal{P}$ de I puede ser etiquetada de infinitas maneras, pues podemos elegir como etiqueta de un subintervalo de la partición cualquiera de sus puntos.

A continuación, vamos a recordar brevemente la integral de Riemann, para lo que, primero, es conveniente dar una manera de medir cómo de fina es una partición. Dadas dos particiones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ del intervalo I, diremos que $\mathcal{Q}$ es **más fina** que $\mathcal{P}$ si $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$, entendiendo $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ como las colecciones ordenadas de los extremos de sus intervalos. Se define la **norma** de una partición $\mathcal{P} = \{I_i\}_{i=1}^n$ del intervalo I como el número real $\|\mathcal{P}\| \equiv \max\{|I_i|\}_{i=1}^n$. La norma de una partición etiquetada se define como la norma de la partición cuyos intervalos conforman dicha partición etiquetada. Nótese que la norma de la partición $\mathcal{P}$ proporciona una manera de controlar las longitudes de cada uno de los subintervalos de $\mathcal{P}$, esto es, proporciona una manera de medir la afinación de la partición. Es fácil encontrar particiones finas en este sentido, es decir, dado $\delta > 0$, es fácil encontrar una partición $\mathcal{P}$ de I con norma $\|\mathcal{P}\| < \delta$.

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función y $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ una partición etiquetada de I, se define la **suma de Riemann de f asociada a $\dot{\mathcal{P}}$** como el número real

$$S(f, \dot{\mathcal{P}}) \equiv \sum_{i=1}^{n} f(t_i)|I_i|.$$

Como ya sabemos, el concepto de la integral de una función se define a partir de un cierto proceso de paso al límite. El proceso de paso al límite que se use es determinante a la hora de definir la integral. El enfoque de Riemann de la integral es el de tomar el límite de las sumas de Riemann cuando la norma de la partición se aproxima a cero. Como vemos, este método no tiene en cuenta cómo se comporta la función a integrar, con lo que, como sabemos, las funciones integrables mediante este método van a tener que verificar unas buenas propiedades muy concretas.

A continuación detallamos un poco el proceso de paso al límite que se utiliza para la integral de Riemann.

Definición 1. Una función **acotada** $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es **integrable en el sentido de Riemann** en $[a, b]$ si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que, para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un $\delta > 0$ para el cual, si $\dot{\mathcal{P}}$ es una partición etiquetada de $[a, b]$ con $|I_i| \leq \delta$ para cada $i = 1, \dots, n$, entonces $|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - A| < \varepsilon$. ◂

El enfoque de Henstock-Kurzweil es algo distinto. La definición resultante es formalmente similar a la de la integral en el sentido de Riemann. Sin embargo, como ya veremos, el resultado al modificar el método de paso al límite es considerablemente más general que el obtenido al considerar el método de Riemann. A grandes rasgos, lo que marca la diferencia es que el método para escoger las particiones finas permite tener en cuenta el comportamiento de la función a integrar, lo que dará lugar a una mayor clase de funciones integrables. Es más, la integral que se obtiene resulta ser más general que la integral de Lebesgue.

Como ya hemos comentado, las funciones integrables en el sentido de Riemann deben tener unas propiedades muy específicas, con lo que muchas funciones relativamente sencillas quedan fuera de la teoría.

Ejemplo 1. Un ejemplo de función no integrable en el sentido de Riemann es la función de Dirichlet, $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, esto es, la función característica de los racionales del intervalo $[0, 1]$, que vale 1 en los números racionales de $[0, 1]$ y 0 en los irracionales de $[0, 1]$. Veámoslo.

Tenemos que probar que, para todo $A \in \mathbb{R}$, hay un $\varepsilon_A > 0$ tal que, para cada $\delta > 0$, existe una partición etiquetada $\dot{\mathcal{P}}_\delta$ con $\|\dot{\mathcal{P}}_\delta\| < \delta$ y

$$\left|S(\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}, \dot{\mathcal{P}}_\delta) - A\right| > \varepsilon_A.$$

Sean $A \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ y $\varepsilon_A = |1 - A|/2$. Sea $\delta > 0$. Consideremos una partición etiquetada $\dot{\mathcal{P}}$ con norma menor que δ y etiquetada de tal manera que todas las etiquetas t_i de sus intervalos sean un número racional (esto puede hacerse por la densidad de los racionales, por ejemplo). Se tiene, entonces, que $S(\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}, \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{I_i \in \dot{\mathcal{P}}} |I_i| \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(t_i) = \sum_{I_i \in \dot{\mathcal{P}}} |I_i| = |[0, 1]| = 1$, de modo que

$$|S(\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}, \dot{\mathcal{P}}) - A| = |1 - A| > |1 - A|/2 = \varepsilon_A.$$

Si $A = 1$, entonces elegimos $\varepsilon_A = 1/2$. Para cualquier $\delta > 0$ tomamos una partición $\dot{\mathcal{P}}$ con $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$ de manera que las etiquetas sean todas irracionales (siempre puede hacerse por la densidad de los irracionales). En este caso tenemos, entonces, que $S(\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}, \dot{\mathcal{P}}) = 0$, de manera que

$$|S(\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}, \dot{\mathcal{P}}) - A| = 1 > 1/2 = \varepsilon_A.$$

Por tanto, $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ no es integrable en el sentido de Riemann ya que hemos encontrado particiones etiquetadas con norma tan pequeña como se quiera cuyas sumas de Riemann valen 0 y otras para las cuales valen 1.

Esto se debe a que, en el proceso de paso al límite, podemos elegir particiones finas etiquetadas de la forma que queramos, lo que, en última instancia, permitirá un mal comportamiento de las sumas de Riemann de una función buena asociadas a una partición fina. ◂

3. El concepto de medidor

Como hemos podido comprobar, la función de Dirichlet no es integrable en el sentido de Riemann. Ahora bien, teniendo en cuenta la idea intuitiva de la integral de una función no negativa (el área bajo la gráfica), es razonable pensar que la función de Dirichlet tenga integral nula (no hay área bajo la gráfica de la función de Dirichlet). En efecto, al introducir la integral de Lebesgue, se comprueba que esto es así para dicha integral. Así pues, si la función de Dirichlet fuese integrable Riemann, el candidato a ser su integral sería 0. Vamos a comprobar que, modificando sutilmente la manera en que medimos la afinación de las particiones en el proceso al límite, se consigue hacer que las sumas de Riemann se vayan a 0.

Sea $\varepsilon > 0$. Como el conjunto de los números racionales del intervalo $[0, 1]$ es numerable, podemos tomar una enumeración, $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, de estos. Consideremos una partición etiquetada $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ de manera que, si $t_i = r_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces se tenga $I_i \subset \left[t_i - \varepsilon/2^{k+1}, t_i + \varepsilon/2^{k+1}\right]$. Según cuál sea la etiqueta de un intervalo etiquetado hay dos posibilidades.

- Si $t_i \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, entonces $f(t_i) = 0$ y el par $(I_i, f(t_i))$ no contribuye a las sumas de Riemann.
- Si $t_i = r_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $f(t_i) = 1$ y la longitud del intervalo I_i es menor que $\frac{\varepsilon}{2^k}$ por la elección de los intervalos.

Para una tal partición $\dot{\mathcal{P}}$ tenemos, por tanto, que

$$\left|S(f, \dot{\mathcal{P}})\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)|I_i|\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^k = \varepsilon.$$

Por tanto, si estas particiones fuesen todas las particiones finas entre las que buscamos para la definición de la integral de Riemann, entonces f sería integrable y su integral sería 0. Notemos que, a la hora de escoger particiones lo suficientemente finas, nos hemos fijado en los valores de la función en las etiquetas, de forma que, en aquellas etiquetas donde la función toma el valor 1 (es decir, en aquellas que contribuyen a las sumas de Riemann), los intervalos quedan contenidos dentro de intervalos pequeños controlados, en cierto modo, por la respectiva etiqueta. Hemos conseguido, así, que las sumas de Riemann sean pequeñas.

Esto motiva la búsqueda de un criterio de elección de particiones finas que permita tener en cuenta el comportamiento de la función en las etiquetas de los intervalos de la partición de manera que en las sumas de Riemann solo se tengan en cuenta los valores relevantes de la función, haciendo menor la contribución a la suma de los valores menos relevantes. En el enfoque de Henstock-Kurzweil se permite una mayor libertad a la hora de escoger el criterio de elección particiones finas, dando la posibilidad de elegir un criterio tan restrictivo que podamos englobar aquellas etiquetas en las que los valores de la función son poco representativos (por ejemplo, los valores no nulos de una función que se anula salvo en un conjunto de medida de Lebesgue cero) en intervalos lo suficientemente pequeños como para que su contribución a las sumas de Riemann sea despreciable.

Esto se consigue, como veremos, introduciendo el concepto de medidor, que controlará la afinación de una partición etiquetada de un intervalo I exigiendo que cada intervalo etiquetado (I_i, t_i) quede contenido en un intervalo $\overline{B}(t_i, \delta_i) = [t_i - \delta_i, t_i + \delta_i]$ que depende de la etiqueta t_i, como hemos hecho con el ejemplo de la función de Dirichlet.

Definición 2. Una función $\delta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es un **medidor** en I si $\delta(t) > 0$ para cada $t \in I$. Dados un medidor δ en I y un punto $t \in I$, el intervalo alrededor de t **controlado por el medidor** δ es el intervalo $\overline{B}(t, \delta(t)) = [t - \delta(t), t + \delta(t)]$. ◂

Diremos, en este caso, que el intervalo $\overline{B}(t, \delta(t))$ es el intervalo **δ-controlado** por t aunque, si no hay lugar a confusión, diremos, simplemente, que $\overline{B}(t, \delta(t))$ es el intervalo controlado por t.

Un medidor δ en I permite dar una mejor medida de la afinación de una cierta partición etiquetada, $\dot{\mathcal{P}}$, del intervalo I que la que da el criterio de la norma considerado a la hora de definir la integral de Riemann. La manera exacta de dar esta medida es la que se recoge en la siguiente definición.

Definición 3. Sea $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ una partición etiquetada de I. Sea δ un medidor en I. Decimos que $\dot{\mathcal{P}}$ es **δ-fina** si $I_i \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ para cada $i = 1, \ldots, n$, esto es, si cada subintervalo I_i de la partición está contenido en el intervalo δ-controlado por el punto t_i (diremos, entonces, que el intervalo I_i **está δ-controlado** por t_i). Cuando $\dot{\mathcal{P}}$ sea δ-fina, diremos de ella que es una partición **subordinada** a δ y escribiremos $\dot{\mathcal{P}} \ll \delta$. ◂

La definición de medidor no es muy restrictiva. Esto será muy útil en adelante, pues permitirá una gran libertad a la hora de elegir la medida de afinación adecuada (un medidor δ adecuado) para que las particiones finas según el medidor elegido (particiones δ-finas) tengan asociadas unas sumas de Riemann con un buen comportamiento, obteniendo, así, una mayor clase de funciones integrables.

Veamos, a modo de ejemplo, cómo se entiende la medida de afinación de un medidor constante (la que se toma para la integral de Riemann) en términos de particiones δ-finas.

Ejemplo 2. Sea $\delta > 0$. La aplicación $\delta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\delta(t) = \delta$ para cada $t \in I$ es un medidor en I. Llamamos **medidor constante** a este medidor. Obsérvese que, si una partición $\dot{\mathcal{P}}$ de I es δ-fina, entonces $\|\dot{\mathcal{P}}\| \leq 2\delta$. En efecto, si $\dot{\mathcal{P}}$ es δ-fina, se tiene que $I_i \subseteq \overline{B}(t_i, \delta)$ para cada $i = 1, \ldots, n$, de donde $|I_i| \leq |\overline{B}(t_i, \delta)| = 2\delta$ para cada $i = 1, \ldots, n$, con lo que $\|\dot{\mathcal{P}}\| \leq 2\delta$. Además, se tiene que, si $\dot{\mathcal{P}}$ es una partición con $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, entonces $\dot{\mathcal{P}}$ es δ-fina. ◂

A continuación proporcionamos algunos métodos para construir medidores a partir de medidores ya existentes.

Ejemplo 3. Si δ_1 y δ_2 son dos medidores en el intervalo I, entonces la función $\delta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\delta(t) = \text{mín}\{\delta_1(t), \delta_2(t)\}$ es un medidor en I. Es claro que toda partición δ-fina de I es, a la vez, δ_1-fina y δ_2-fina. Diremos que δ es el **refinamiento** de los medidores δ_1 y δ_2. Análogamente, podemos definir el refinamiento de cualquier familia finita de medidores en I. ◂

Está claro que un medidor definido en I es también un medidor en cualquiera de los subintervalos compactos de I. Siempre que se dé este caso tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1. *Sean $c \in (a, b)$ y δ un medidor en $[a, b]$. Si $\dot{\mathcal{P}}_1$ es una partición δ-fina de $[a, c]$ y $\dot{\mathcal{P}}_2$ es una partición δ-fina de $[c, b]$, entonces $\dot{\mathcal{P}}_1 \cup \dot{\mathcal{P}}_2$ es una partición δ-fina de $[a, b]$.*

Demostración. Basta usar la definición. Como $\dot{\mathcal{P}}_1$ es δ-fina, se tiene que cada I_i^1 de $\dot{\mathcal{P}}_1$ está δ-controlado por la correspondiente etiqueta, t_i^1. Como $\dot{\mathcal{P}}_2$ es δ-fina, se tiene que cada I_i^2 de $\dot{\mathcal{P}}_2$ está δ-controlado por la correspondiente etiqueta, t_i^2.

Al ser $\dot{\mathcal{P}}_1 \cup \dot{\mathcal{P}}_2$ una partición de $[a, b]$ formada por cada uno de los intervalos etiquetados de las particiones $\dot{\mathcal{P}}_1$ y $\dot{\mathcal{P}}_2$, es claro que cada uno de los intervalos que la conforman está δ-controlado, de donde se obtiene que $\dot{\mathcal{P}}_1 \cup \dot{\mathcal{P}}_2$ es δ-fina. ■

Dado un medidor constante δ, es trivial encontrar particiones δ-finas. Ahora bien, dado un medidor arbitrario, δ, en $[a, b]$, ¿existe siempre una partición etiquetada de $[a, b]$, $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$, cuyas etiquetas controlen su correspondiente subintervalo etiquetado? Esto es, dado un medidor δ definido en $[a, b]$, ¿existen particiones δ-finas de $[a, b]$?

El resultado que da respuesta general a esta pregunta se sigue, de manera sencilla, de la propiedad arquimediana de los números reales, que asegura que, dados $y \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, siempre existe $n \in \mathbb{N}$ con $nx > y$. Es conocido el hecho de que esta propiedad de $\mathbb{R}$ se sigue del axioma del supremo.

La respuesta afirmativa a la pregunta anterior es el contenido del siguiente teorema, que se debe a Pierre Cousin.

Teorema 2 (teorema de Cousin). *Sea δ un medidor en $[a, b]$. Entonces, existe una partición δ-fina de $[a, b]$.*

Demostración. Lo probaremos por reducción al absurdo.

Supongamos que $[a, b]$ no tiene ninguna partición δ-fina. Sea $c = \frac{a+b}{2}$ y consideremos los subintervalos

$$[a, c] \quad \text{y} \quad [c, b].$$

Según lo visto en la proposición 1, si los dos intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ tuviesen una partición δ-fina, entonces su unión sería una partición δ-fina de $[a, b]$. Así pues, alguno de los subintervalos $[a, c]$ o $[c, b]$ no tiene ninguna partición δ-fina. Sea cual sea este intervalo, renombrémoslo como $I^1 \equiv [a_1, b_1]$. Sea $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ y consideremos los subintervalos

$$[a_1, c_1] \quad \text{y} \quad [c_1, b_1].$$

Como antes, uno de los subintervalos no tiene ninguna partición δ-fina. Sea $I^2 = [a_2, b_2]$ este subintervalo.

Procediendo de este modo, obtenemos una sucesión de intervalos compactos encajados $\{I^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, cada uno con longitud $|I^n| = \frac{b-a}{2^n}$, sin particiones δ-finas.

El teorema de los intervalos encajados asegura que existe un único punto x en la intersección de todos los intervalos I^n. Sin embargo, como $\delta(x) > 0$, por la propiedad arquimediana, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$|I^p| = \frac{b-a}{2^p} < \delta(x).$$

Por tanto, $I^p \subset [x-\delta(x), x+\delta(x)]$. Además, el par $\{(I^p, x)\}$ es una partición (formada por un solo intervalo) δ-fina de I^p, en contra de la elección de I^p. Esta contradicción prueba que $[a, b]$ tiene alguna partición δ-fina. ∎

Como consecuencia del teorema de Cousin puede probarse, por ejemplo, el siguiente teorema clásico.

Teorema 3 (teorema de Weierstrass). *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, f alcanza su máximo y su mínimo en $[a, b]$.*

Demostración. Lo probaremos para el máximo, lo cual es suficiente. Supongamos que no es cierto. Entonces, dado $s \in [a, b]$, este no es el máximo de f en $[a, b]$, luego existe $X(s) \in [a, b]$ tal que $f(s) < f(X(s))$ y, por la continuidad de f, existe $\delta_s > 0$ con

$$f(t) < f(X(s)) \;\text{ para cada }\; t \in [s-\delta_s, s+\delta_s].$$

Sea $\delta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ el medidor definido por $\delta(x) = \delta_x$. Por el teorema de Cousin, existe $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ δ-fina. Sea t_0 con $f(X(t_0)) = \text{máx}\{f(X(t_i))\}_{i=1}^n$. Como $X(t_0) \in [a, b]$ y $[a, b] = \bigcup_{i=1}^n I_i$, existe i_0 tal que $X(t_0) \in I_{i_0}$. Pero entonces,

$$f(X(t_0)) < f(X(t_{i_0})),$$

en contra de la elección de t_0. Por tanto, f tiene un máximo en $[a, b]$. ∎

Aún más, podemos probar la equivalencia entre el teorema de Cousin, el axioma del supremo y la propiedad arquimediana. En efecto, recordemos que el axioma del supremo implica la propiedad arquimediana (también es equivalente al principio de los intervalos encajados). Notemos, por otro lado, que la propiedad arquimediana y el principio de los intervalos encajados son lo único que hemos necesitado para probar el teorema de Cousin. El siguiente teorema prueba que el teorema de Cousin implica el axioma del supremo.

Teorema 4 (axioma del supremo). *Sea $S \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado. Entonces, S tiene supremo.*

Demostración. Sea S un conjunto no vacío. Como S es acotado, existe un intervalo $[a, b]$ tal que $S \subset [a, b]$. Supongamos que S no tiene supremo. En particular, ningún punto de S puede ser cota superior de S.

- Si $x \in S$, entonces existe $y_x \in S$ tal que $x < y_x$. De lo contrario, si para cada $y \in S$ tenemos $x \geq y$, entonces x sería la mínima cota superior de S, lo cual contradice la hipótesis. Para un tal x definimos $\delta_x = y_x - x > 0$.

  Nótese que, si x pertenece a un intervalo $[c, d] \subset [a, b]$ con $d - c < \delta_x$, entonces d no es cota superior de S, pues $d \leq x + \delta_x = x + y_x - x = y_x \in S$ y sabemos que ningún punto de S puede ser cota superior de S.

- Si $x \in [a, b] \setminus S$ y x es cota superior de S, entonces, al no haber un supremo de S, existe otra cota superior de S, z_x, tal que $z_x < x$. En tal caso, definimos $\delta_x = x - z_x$.

  Nótese que, si x pertenece a un intervalo $[c, d] \subset [a, b]$ con $d - c < \delta_x$, entonces $z_x = x - \delta_x \leq c$, luego c es cota superior de S.

- Si $x \in [a,b] \backslash S$ y x no es cota superior de S, entonces existe $y_x \in S$ tal que $x < y_x$. Definamos, en tal caso, $\delta_x = y_x - x$. Obsérvese que y_x no es cota superior de S porque ningún punto de S puede ser cota superior de S.

  Nótese que, si x pertenece a un intervalo $[c,d] \subset [a,b]$ con $d - c < \delta_x$, entonces d no es cota superior de S, pues $d \leq x + \delta_x = x + y_x - x = y_x \in S$.

En cualquiera de los casos, obsérvese que, o bien $[c,d]$ verifica que c es cota superior de S, o bien verifica que d no es cota superior de S.

Definamos, entonces, el medidor $\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $\delta(x) = \delta_x$. Por el teorema de Cousin, existe una partición δ-fina de $[a,b]$, $\dot{\mathcal{P}} = \{([a_{i-1}, a_i], t_i)\}_{i=1}^n$.

Claramente $a_0 = a$ no es cota superior de S. Como $\dot{\mathcal{P}}$ es δ-fina tenemos, por el razonamiento anterior, que, o bien a_0 es cota superior de S, o bien a_1 no es cota superior de S. Por tanto, a_1 no es cota superior de S. Razonando de igual manera, a_2 no es cota superior de S. Este razonamiento es válido para cada $j = 1, \ldots, n$, luego ningún a_j es cota superior de S. Esto contradice el hecho de que $a_n = b$ sí que es cota superior de S. Por tanto, S debe tener supremo. ■

4. La integral de Henstock-Kurzweil

Ya estamos preparados para definir el proceso de paso al límite en la definición de la integral. A continuación, damos dos definiciones equivalentes de la integral de Henstock-Kurzweil o integral medidora. La primera de ellas es formalmente muy parecida a la definición de la integral en el sentido de Riemann salvo porque, ahora, usaremos un medidor δ, en lugar de un número $\delta > 0$ (un medidor constante) para controlar la afinación de las particiones.

Definición 4. Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es **integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil** (o **HK-integrable**) en I si existe $B \in \mathbb{R}$ tal que, para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un medidor δ en I para el cual, si $\dot{\mathcal{P}}$ es una partición etiquetada de I con $|I_i| \leq \delta(t_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces $|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - B| < \varepsilon$. ◂

La siguiente es una definición equivalente en términos del concepto de δ-afinación de una partición respecto de un medidor.

Definición 5. Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es **integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil** (o **HK-integrable**) en I si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que, para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un medidor δ en I para el cual, si $\dot{\mathcal{P}}$ es una partición δ-fina de I, entonces $|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - C| < \varepsilon$. ◂

El hecho de que las dos definiciones anteriores son equivalentes es un sencillo ejercicio que el lector puede hacer para familiarizarse con el nuevo concepto. Para la integral de Riemann, es sencillo ver que el valor de la integral de una función integrable es único. Para la integral de Henstock-Kurzweil también es sencillo probar esto haciendo uso del refinamiento de un medidor.

Teorema 5 (unicidad de valor de la HK-integral). *Supongamos que $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil. Entonces, el valor de la integral es único.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos que C' y C'' satisfacen la definición 5. Existen, entonces, dos medidores, δ' y δ'' en $[a,b]$ tales que, si $\dot{\mathcal{P}}$ es a la vez δ'-fina y δ''-fina, tenemos

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - C'| < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - C''| < \varepsilon/2.$$

Así pues, si δ es el refinamiento de δ' y δ'' y $\dot{\mathcal{P}}$ es una partición δ-fina de $[a,b]$ (que existe por el teorema de Cousin), entonces, por la desigualdad triangular,

$$|C' - C''| \leq |C' - S(f, \dot{\mathcal{P}})| + |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - C''| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Como esto es para cada $\varepsilon > 0$, concluimos que $C' = C''$. ■

Visto esto, notaremos el valor de la integral de una función integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil de la forma habitual.

Como es natural por la forma en que se ha definido el concepto de integral en el sentido de Henstock-Kurzweil, la integral de Riemann es un caso particular de esta.

Teorema 6. *Sea $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es integrable en el sentido de Riemann en $[a,b]$, entonces es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil en $[a,b]$. Además, en tal caso, los valores de las integrales coinciden.*

Demostración. Basta tener en cuenta que, por definición, f es integrable Riemann en $[a,b]$ con integral R si para cada $\varepsilon > 0$ existe un medidor constante $\delta > 0$ tal que, si $\dot{\mathcal{P}} \ll \delta$, entonces $|S(f,\dot{\mathcal{P}}) - R| < \varepsilon$. ■

Conocemos, entonces, una amplia de clase de funciones integrables en el sentido de Henstock-Kurzweil: las funciones continuas, las funciones monótonas y acotadas en $[a,b]$ y, en general, las funciones acotadas continuas en casi todo punto según la medida de Lebesgue (esto es, las funciones integrables en el sentido de Riemann).

5. El segundo teorema fundamental del cálculo

A continuación vamos a ver cómo, con las pocas herramientas con las que contamos, estamos ya en condiciones de probar la versión más general del II TFC, que establece que la derivada de una función en un intervalo $[a,b]$ es siempre integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil, sin más hipótesis adicionales. Antes de probarlo necesitaremos el siguiente lema técnico cuya prueba, que se sigue fácilmente de la condición de derivabilidad en un punto, se puede encontrar en el libro de Bartle [1].

Lema 7. *Sea $F:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $t \in [a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon(t) > 0$ tal que, si $c, d \in [a,b]$ satisfacen $t - \delta_\varepsilon(t) \le c \le t \le d \le t + \delta_\varepsilon(t)$, entonces*

$$|F(d) - F(c) - F'(t)(d-c)| \le \varepsilon(d-c).$$

Teorema 8 (II teorema fundamental del cálculo). *Sea $F:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $[a,b]$. Entonces, F' es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil en $[a,b]$ y, además,*

$$\int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a) \quad \text{para cada } x \in [a,b].$$

Demostración. Bastará probarlo para $x = b$, para el resto de puntos de $[a,b]$ es análogo. Sea $\varepsilon > 0$. Consideremos el medidor asociado a $\varepsilon/(b-a)$ por el lema anterior. Sea $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ una partición $\delta_{\varepsilon/(b-a)}$-fina de $[a,b]$. Vamos a probar que $|F(b) - F(a) - S(F',\dot{\mathcal{P}})| \le \varepsilon$. Como para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, x_{i-1} y x_i verifican

$$t_i - \delta_{\varepsilon/(b-a)}(t_i) \le x_{i-1} \le t_i \le x_i \le t_i + \delta_{\varepsilon/(b-a)}(t_i),$$

por la propiedad de $\delta_{\varepsilon/(b-a)}$ dada en el lema anterior se tiene que

$$|F(x_i) - F(x_{i-1}) - F'(t_i)(x_i - x_{i-1})| \le \frac{\varepsilon(x_i - x_{i-1})}{(b-a)} \quad \text{para cada } i \in \{1,\dots,n\}. \tag{1}$$

Para estimar $F(b) - F(a) - S(F',\dot{\mathcal{P}})$ utilizaremos la suma telescópica

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}),$$

de modo que

$$F(b) - F(a) - S(F',\dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1}) - F'(t_i)(x_i - x_{i-1})].$$

Luego

$$|F(b) - F(a) - S(F',\dot{\mathcal{P}})| \le \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1}) - F'(t_i)(x_i - x_{i-1})|.$$

Por (1) se tiene, entonces, que

$$|F(b) - F(a) - S(F', \dot{\mathcal{P}})| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon(x_i - x_{i-1})}{b-a} = \varepsilon \frac{b-a}{b-a} = \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

6. Comentarios

Como hemos podido comprobar, la integral de Henstock-Kurzweil resulta ser una integral muy versátil, permitiendo probar el II TFC de una manera muy sencilla, prácticamente a partir de la definición. También es posible probar la versión conocida del I TFC para la integral de Lebesgue e incluso una versión mejorada del II TFC permitiendo algunas excepciones en la condición de derivabilidad.

Si estudiamos la bibliografía disponible, podemos comprobar que la integral de Henstock-Kurzweil es más general que la integral de Lebesgue. En particular, las funciones integrables en el sentido de Lebesgue son precisamente aquellas funciones integrables en el sentido de Henstock-Kurzweil cuyo valor absoluto también es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil (podemos encontrar una prueba en el libro de Bartle [1]). De hecho, se puede probar que existen funciones integrables en el sentido de Henstock-Kurzweil cuyo valor absoluto no es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil. Un ejemplo sencillo puede construirse a partir de una serie condicionalmente convergente. Esto demuestra que la integral de Henstock-Kurzweil es estrictamente más general que la integral de Lebesgue.

Por otro lado, puede probarse que no existen integrales impropias en el sentido de Henstock-Kurzweil, es decir, si podemos definir la integral de Henstock-Kurzweil de una función como el límite de unas integrales de Henstock-Kurzweil de la función en subintervalos del dominio, entonces la función es inmediatamente integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil en todo el intervalo. Esto, de nuevo, pone de manifiesto el hecho de que la integral de Henstock-Kurzweil es estrictamente más general que las integrales de Riemann y Lebesgue.

Por último, notemos que no se ha necesitado ninguna teoría de la medida para definir la integral de Henstock-Kurzweil. Es más, a partir de la integral de Henstock-Kurzweil puede definirse la teoría de la medida y la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$, un programa de estudio que se propone en el libro de Gordon [3] y que se pone en práctica en el de Bartle [1].

Por esta y por algunas razones más, algunos autores están de acuerdo en que el estudio de la integral de Henstock-Kurzweil es una buena forma de introducir el concepto de integral a los nuevos estudiantes de Cálculo, aunque, por otro lado, esta integral no es muy utilizada en investigación, lo cual quizá se deba al hecho de que no es posible definirla en contextos tan abstractos como la integral de Lebesgue, además de que no se conoce una topología natural para el espacio de las funciones integrables en el sentido de Henstock-Kurzweil, con lo que no se dispone, por ejemplo, de teoremas de densidad como los que se tienen para los espacios L^p, que son fundamentales a la hora de desarrollar la teoría de operadores definidos en estos espacios.

Referencias

[1] Bartle, Robert G. *A modern theory of integration.* Vol. 32. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, págs. xiv+458. ISBN: 0-8218-0845-1. https://doi.org/10.1090/gsm/032.

[2] Denjoy, Arnaud. *Une extension de l' integrale de M. Lebesgue.* 1912.

[3] Gordon, Russell A. *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock.* Vol. 4. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994, págs. xii+395. ISBN: 0-8218-3805-9. https://doi.org/10.1090/gsm/004.

[4] Henstock, Ralph. *Definitions of Riemann type of the variational integrals.* Vol. 11. 1961, págs. 402-418.

[5] Kurzweil, Jaroslav. *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter.* Vol. 7 (82). 1957, págs. 418-449.

[6] Perron, Oskar. *Über den Integralbegriff.* 1914.