TEMat

Este trabajo colaboró con una microcharla durante el XVII *Encuentro Nacional de Estudiantes de Matemáticas*, celebrado en Barcelona en julio de 2016.

Progresiones aritméticas de colores

Alberto Espuny Díaz[a]
University of Birmingham
axe673@bham.ac.uk

Resumen: En este artículo presentamos de manera introductoria el clásico teorema de van der Waerden sobre progresiones aritméticas monocromáticas. Nos centramos principalmente en comprender el enunciado, dar algunos ejemplos y presentar algunos de los problemas que lo rodean. En particular, divagamos sobre el valor exacto de los números de van der Waerden y sobre cotas para estos valores. Damos una demostración sencilla de una cota inferior utilizando el método probabilístico. Finalmente, presentamos el teorema de Szemerédi, que generaliza el resultado de van der Waerden, y demostramos el teorema de van der Waerden a partir de esta generalización.

Palabras clave: progresiones aritméticas, van der Waerden, números de van der Waerden, Szemerédi, coloraciones.

MSC2010: 05D10, 05D40.

Recibido: 24 de diciembre de 2016.
Aceptado: 20 de marzo de 2017.

Agradecimientos: Este trabajo estuvo parcialmente financiado por la beca 2015 / COLAB / 00069 del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Referencia: Espuny Díaz, Alberto. «Progresiones aritméticas de colores». En: *TEMat*, 1 (2017), págs. 25-30. ISSN: 2530-9633. URL: http://temat.anemat.com/articulo/2017-p25/.

[a] El autor estaba afiliado a la Universitat Politècnica de Catalunya cuando se desarrolló la mayor parte de este trabajo.

1. Introducción

Todos sabemos lo que son las progresiones aritméticas. Se trata de un objeto matemático que ya nos presentaron en el instituto, con una definición simple y fácil de entender y unas propiedades también simples, pero ya interesantes. Esto hace que sea quizá uno de los primeros objetos matemáticos que nos encontramos que dan un poco de juego, más allá de la pura manipulación algebraica.

Como es bien sabido, una progresión aritmética es una sucesión de números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tales que la diferencia entre un número y el siguiente es siempre la misma ($a_{i+1} - a_i = d$). De este modo, una progresión aritmética se puede definir con solo dos parámetros: un valor inicial a_1 y una diferencia d. En caso de querer una progresión de una determinada longitud, se puede introducir esta longitud como un tercer parámetro (por ejemplo, k). Por simplicidad, podemos referirnos a progresiones aritméticas de longitud k como k-progresiones aritméticas, o k-PA.

En este artículo presentamos algunos resultados clásicos de combinatoria, que se pueden englobar dentro de la combinatoria aditiva (que estudia la interacción entre operaciones y conjuntos) o de la teoría de Ramsey (que busca condiciones para que haya estructuras en los conjuntos estudiados), en los que se trabaja con progresiones aritméticas de un modo general: no nos interesa conocer cuál es la progresión aritmética, sino solo saber de su existencia y su longitud. Y la forma de trabajar con ellas va a ser coloreando los números naturales.

2. El teorema de van der Waerden

Podemos jugar a un juego en el que nuestro objetivo es colorear los enteros sin formar progresiones aritméticas del mismo color; vamos a empezar considerando progresiones de longitud tres. Consideremos el siguiente ejemplo, en el que coloreamos los primeros números naturales con color rojo o azul. Comenzamos coloreando los primeros ocho naturales:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

Por ahora vamos bien, pero supongamos que queremos colorear también el número 9. Podemos elegir hacerlo bien en rojo, o bien en azul. Si lo hacemos en rojo, sin embargo, observamos que $\{1, 5, 9\}$ es una progresión aritmética roja de longitud tres; si lo coloreamos en azul, $\{3, 6, 9\}$ forma una progresión aritmética azul de longitud tres. Así pues, observamos que el ejemplo que hemos elegido no se puede continuar sin formar progresiones aritméticas monocromáticas de longitud tres.

Obviamente, ahora podríamos elegir otro ejemplo y volver a probar. La pregunta natural que nos hacemos es la siguiente: ¿existe alguna forma de colorear los enteros con dos colores de manera que no aparezcan progresiones aritméticas monocromáticas de longitud tres? O más en general: ¿existe alguna forma de colorear los enteros con r colores de manera que no aparezcan progresiones aritméticas monocromáticas de longitud k? Y la respuesta, negativa, viene dada por el teorema de van der Waerden.

Teorema 1 (van der Waerden, 1927 [14]). *Para todo par de números naturales $k \geq 3$, $r \geq 2$ existe un entero $N = N(r, k)$ tal que toda coloración de los primeros $n \geq N$ números naturales con r colores contiene alguna progresión aritmética monocromática no trivial de longitud k.*

Nótese que en el teorema se habla de progresiones aritméticas no triviales. Una progresión aritmética trivial es una cuya diferencia es cero, es decir, una progresión de la forma $a, a, a, a, \ldots$, y en ese caso siempre hay, trivialmente, progresiones monocromáticas de longitud arbitraria. Para que el resultado tenga interés, estas se deben evitar y, en general, cuando hablemos de progresiones aritméticas nos referiremos a progresiones no triviales.

Existen varias maneras de demostrar este teorema. La más tradicional en el mundo de la combinatoria es una demostración por doble inducción, primero en el número de colores y luego en la longitud de la progresión. Hay otras demostraciones combinatorias sencillas, aunque casi todas usan ideas parecidas. Después hay demostraciones mucho más complicadas, que permiten obtener el teorema de van der Waerden como un simple corolario, pero que necesitan técnicas más avanzadas para demostrar el resultado principal (el teorema de Szemerédi); a esto nos referiremos en la sección 3. Existen también otras demostraciones no combinatorias; el teorema de Szemerédi tiene demostraciones no combinatorias, que permiten entonces demostrar también el teorema de van der Waerden.

La siguiente pregunta, obviamente, es cuál es el mínimo valor posible de N. A este valor se le conoce como el número de van der Waerden, $W(r,k)$. Volvamos al ejemplo. Hemos visto que podemos colorear hasta el número ocho sin formar 3-PA monocromáticas, de modo que sabemos que $W(2,3) \geq 9$. En el ejemplo no podemos colorear el nueve sin formar una 3-PA monocromática, pero podría ser que con una coloración diferente de los primeros ocho enteros sí consigamos colorearlo y obtengamos así $W(2,3) \geq 10$. No es el caso, en realidad, y se puede comprobar que $W(2,3) = 9$ escribiendo todas las posibilidades, ya que se trata de un ejemplo pequeño (tengamos en cuenta que este es el número de van der Waerden más pequeño que tiene interés, ya que si se considera $r = 1$ o $k < 3$, los valores son triviales). Consideremos ahora otro ejemplo, usando tres colores, en el que también queremos evitar las 3-PA. En este caso coloreamos los números de manera «voraz»:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22

Al intentar colorear el 22 se puede comprobar fácilmente que no hay manera de hacerlo sin formar una 3-PA monocromática ($\{4,13,22\}$, $\{16,19,22\}$ o $\{20,21,22\}$), de modo que $W(3,3) \geq 22$. En este caso sí se pueden conseguir coloraciones mejores, y, de hecho, se ha comprobado que $W(3,3) = 27$.

A pesar de lo simple que es el problema de determinar los valores de $W(r,k)$, resulta ser un problema muy difícil. De hecho, se conocen solo siete valores: $W(2,3) = 9$ ([2]), $W(2,4) = 35$ ([2]), $W(2,5) = 178$ ([11]), $W(2,6) = 1132$ ([8]), $W(3,3) = 27$ ([2]), $W(3,4) = 293$ ([7]) y $W(4,3) = 76$ ([1]).

El siguiente problema natural es encontrar cotas para el valor de los números de van der Waerden, que permitan, ya que no conocer, sí estimar su valor. Buscamos, por lo tanto, dos tipos de cotas: las inferiores y las superiores. Para la cota inferior, las cotas más ajustadas se pueden conseguir construyendo ejemplos suficientemente grandes en los que no aparezcan k-progresiones aritméticas monocromáticas. Sin embargo, las cotas generales que este método permite obtener son bastante débiles, y cada una de las cotas ajustadas sirve solo para un caso concreto. Existen otros métodos que permiten obtener cotas generales mucho mejores, como, por ejemplo, el método probabilístico. Este método utiliza técnicas probabilísticas y tiene múltiples aplicaciones en demostraciones no constructivas de existencia de objetos matemáticos. Usando en este caso coloraciones aleatorias de los primeros enteros, es un ejercicio sencillo obtener el siguiente resultado.

Proposición 2. *Los números de van der Waerden cumplen la cota*

$$W(r,k) \geq r^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{k-1}.$$

Esta cota se puede mejorar usando técnicas probabilísticas más avanzadas, pero por ahora vamos a demostrar este resultado.

Demostración. Sea $[n] = \{1,2,\ldots,n\}$. Supongamos que coloreamos $[n]$ de manera aleatoria, uniformemente y de manera independiente, es decir, cada número se colorea con el i-ésimo color con probabilidad $\frac{1}{r}$ independientemente del color que tengan los demás números. El número de progresiones aritméticas de longitud k que podemos encontrar en $\{1,2,\ldots,n\}$ se puede acotar fácilmente considerando que solo necesitamos dos parámetros para definirlas: su valor inicial y su diferencia. De este modo, podemos tomar como mucho n valores iniciales y $\frac{n}{k-1}$ diferencias (ya que las diferencias que tomemos deben ser lo suficientemente pequeñas como para que al sumarlas $k-1$ veces al valor inicial sigamos teniendo un número menor que $n+1$), lo que supone un total de como mucho $\frac{n^2}{k-1}$ progresiones aritméticas (obviamente, hay muchas menos, pero con esta cota nos basta).

Ahora consideremos una de estas k-PA. La probabilidad de que sea monocromática, con nuestra coloración aleatoria, es $\frac{1}{r^{k-1}}$ (la probabilidad de que sea toda del primer color es $\frac{1}{r^k}$, ya que la probabilidad de que cada número sea de ese color es $\frac{1}{r}$ y los sucesos son independientes, y en total hay r colores). Así pues, la probabilidad de que *alguna* de las progresiones sea monocromática se puede acotar superiormente por la suma de las probabilidades de que cada una lo sea, y teniendo en cuenta la cota sobre el número de k-PA obtenemos la expresión

$$\begin{aligned}\Pr(\exists \text{ una } k\text{-PA monocromática}) &= \Pr\left(\bigcup_{S\subseteq[n]\ k\text{-PA}} \{S \text{ es monocromática}\}\right)\\ &\leq \sum_{S\subseteq[n]\ k\text{-PA}} \Pr(S \text{ es monocromática})\\ &= \sum_{S\subseteq[n]\ k\text{-PA}} \frac{1}{r^{k-1}} \leq \frac{n^2}{(k-1)r^{k-1}}.\end{aligned}$$

Ahora bien, si este último valor es menor que 1, eso quiere decir que la probabilidad de que haya una progresión aritmética monocromática es también menor que 1, lo que significa que la probabilidad de que no haya ninguna es positiva. Es decir, que existe alguna manera de colorear los primeros n números de manera que no hay ninguna progresión aritmética monocromática. Y esto querrá decir que el número de van der Waerden $W(r,k)$ tiene que ser mayor que la cantidad de números que hemos coloreado. ¿Para qué valor de n ocurre esto? Podemos comprobar que

$$\frac{n^2}{(k-1)r^{k-1}} < 1 \iff n < r^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{k-1},$$

lo que quiere decir que $W(r,k) \geq r^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{k-1}$, como queríamos demostrar. ■

Encontrar cotas superiores resulta ser un problema mucho más complicado. Las primeras cotas que se conocieron, proporcionadas por la demostración del teorema, daban funciones que no se pueden definir con recursión primitiva (las funciones recursivas primitivas son un subconjunto de las funciones computables (aquellas para las que existe un algoritmo que las calcula); por dar una idea intuitiva, cualquiera de las funciones habituales o de sus composiciones (por ejemplo, exponenciales de exponenciales de exponenciales...) son funciones recursivas primitivas). La primera cota que se puede obtener con recursión primitiva se debe a Shelah [10], que proporcionó una demostración puramente combinatoria diferente del teorema, y no se encontró hasta el año 1988. La mejor cota general que se conoce en la actualidad la encontró Timothy Gowers [5] usando técnicas analíticas avanzadas, y da lugar a la cota

$$W(r,k) \leq 2^{2^{r^{2^{2^{k+9}}}}}.$$

Es evidente que estas cotas dejan un margen muy amplio, que no permite dar siquiera un orden de magnitud del valor de $W(r,k)$.

Hay otros muchos problemas que se pueden plantear en este ámbito. Por ejemplo, ¿se cumple el teorema de van der Waerden para progresiones aritméticas infinitamente largas? ¿Se puede extender a otros contextos, o generalizar a otras dimensiones? O sobre las progresiones aritméticas que aparecen, ¿son siempre las del color más «frecuente» en la coloración? La respuesta a esa última pregunta, en cierto sentido, es la que presentamos en la siguiente sección.

3. El teorema de Szemerédi

Uno puede pensar que una coloración de los números naturales con r colores es equivalente a tomar una partición de los enteros. Si, por ejemplo, coloreamos los primeros N naturales, entonces obtenemos conjuntos $A_1,\ldots,A_r \subseteq \{1,\ldots,N\}$, uno por cada color, que son disjuntos y cubren los primeros N naturales. Si sabemos que estos primeros números van a contener una k-PA monocromática, eso quiere decir que existe una progresión aritmética en uno de los conjuntos A_i. Pero ¿en cuál?

Decimos que un conjunto $A \subseteq \{1,2,\ldots,N\}$ tiene densidad positiva si su tamaño es una fracción positiva de N, y que tiene densidad δ si δ es el valor de esa fracción. Unos años después de que van der Waerden presentase su teorema, Erdős y Turán [3] conjeturaron que, para cada valor de k y densidad δ fijos, existe un valor de N suficientemente grande para el cual cualquier conjunto $A \subseteq \{1,\ldots,N\}$ de densidad al menos δ contendrá una k-PA. Es decir, si se colorean suficientes números, entonces habrá progresiones aritméticas de longitud k de cualquiera de los colores que tengan una densidad mayor que δ, y esto será cierto para cualquier δ positivo. Esto implica que, en una partición de $\mathbb{N}$, todo subconjunto de densidad positiva contiene una k-PA, para cualquier valor de k fijo.

En primer lugar, se consiguió demostrar que la conjetura es cierta para progresiones aritméticas de longitud 3 (este resultado se conoce como el teorema de Roth [9], y pasaron más de quince años entre la formulación de la conjetura y este primer resultado). En total pasaron casi cuarenta años hasta que Szemerédi dio una respuesta general positiva a esta conjetura, primero resolviendo el caso $k = 4$ [12] y más tarde el caso general [13], consiguiendo así un teorema que se considera uno de los resultados más relevantes en combinatoria. Una formulación exacta puede ser como la que presentamos aquí:

Teorema 3. *Sea $k \geq 3$ un entero y sea $\delta > 0$ un número real. Entonces, existe un entero $N = N(k,\delta)$ tal que para todo $n \geq N$, todo conjunto $A \subseteq \{1,\dots,n\}$ con $|A| \geq \delta n$ contiene una k-PA no trivial.*

La demostración del teorema de Szemerédi se basa principalmente en el lema de regularidad de Szemerédi (y algunas generalizaciones del mismo), una herramienta de teoría de grafos que ha dado lugar a aplicaciones muy diversas y que aún hoy constituye una de las principales técnicas para resolver problemas en combinatoria. Además de la primera demostración que consiguió Szemerédi, se han encontrado otras demostraciones usando técnicas muy diversas. Por ejemplo, Furstenberg [4] consiguió una demostración utilizando teoría ergódica, y Gowers [5] utilizó técnicas analíticas. Cada una de estas demostraciones ha dado lugar a herramientas que después han sido ampliamente utilizadas en otros contextos. Además, en los últimos años se han conseguido algunas nuevas demostraciones combinatorias.

Nótese que el teorema de van der Waerden se puede recuperar como un corolario del teorema de Szemerédi. De este modo, el teorema de Szemerédi es una generalización directa del de van der Waerden.

Demostración del teorema 1. Consideremos una coloración de los primeros n números naturales, que da una partición de $\{1,\dots,n\}$ en r conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_r$. Por el principio del palomar, existe un color i tal que $|A_i| \geq \frac{n}{r}$, es decir, existe un conjunto con densidad mayor o igual que $\frac{1}{r}$. Ahora, sea $\delta = \frac{1}{r}$ y apliquemos el teorema de Szemerédi; como resultado, para un n suficientemente grande, cualquier subconjunto de $\{1,\dots,n\}$ con densidad al menos δ contendrá una k-progresión aritmética. En particular, A_i contiene una k-progresión aritmética, y todos los elementos de A_i son del mismo color, de modo que esta progresión es monocromática. ■

Una vez el teorema 3 está demostrado, uno se puede volver a hacer muchas preguntas relacionadas. Por ejemplo, uno puede plantearse la posibilidad de encontrar valores del mínimo número $N(k,\delta)$ que satisface el teorema. Parece evidente que este número será, en general, más grande que el número de van der Waerden asociado a los mismo parámetros (con la identificación $r = 1/\delta$), aunque intentar calcularlo, una vez más, resulta un problema muy complejo. Se pueden dar cotas de diversos tipos; una vez más, la mejor cota superior que tenemos se debe a Gowers [5], que dio la cota

$$N(k,\delta) \leq 2^{2^{(\delta^{-1})^{2^{2^{k+9}}}}}$$

(de hecho, las cotas para los números de van der Waerden son una consecuencia de estas, sustituyendo δ por $\frac{1}{r}$).

Una forma de reinterpretar el teorema de Szemerédi es afirmar que el tamaño del conjunto $A \subseteq \{1,\dots,n\}$ más grande posible que no contenga k-PA es sublineal en n (asintóticamente). De este modo, una cuestión natural es preguntarse cuál es el mayor tamaño posible de este conjunto. Así, se define $r_k(N)$ como el mayor tamaño posible de un conjunto $A \subseteq \{1,\dots,N\}$ que no contiene k-PA, y existen diversos resultados que acotan el valor de este número.

Finalmente, se pueden considerar muchos problemas relacionados con este tipo de construcciones. Un ejemplo reciente es un aclamado resultado de Green y Tao [6], que demostraron que el conjunto de los números primos contiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas.

Referencias

[1] Beeler, Michael D. y O'Neil, Patrick E. «Some new van der Waerden numbers». En: *Discrete Math.* 28.2 (1979), págs. 135-146. issn: 0012-365X. https://doi.org/10.1016/0012-365X(79)90090-6.

[2] Chvátal, Vašek. «Some unknown van der Waerden numbers». En: *Combinatorial Structures and their Applications (Proc. Calgary Internat. Conf., Calgary, Alta., 1969)*. Gordon y Breach, New York, 1970, págs. 31-33.

[3] Erdős, Paul y Turán, Paul. «On some sequences of integers». En: *Journal of the London Mathematical Society* 11.4 (1936), págs. 261-264. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-11.4.261.

[4] Furstenberg, Harry. «Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions». En: *J. Analyse Math.* 31 (1977), págs. 204-256. issn: 0021-7670. https://doi.org/10.1007/BF02813304.

[5] Gowers, William T. «A new proof of Szemerédi's theorem». En: *Geom. Funct. Anal.* 11.3 (2001), págs. 465-588. issn: 1016-443X. https://doi.org/10.1007/s00039-001-0332-9.

[6] Green, Ben y Tao, Terence. «The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions». En: *Ann. of Math. (2)* 167.2 (2008), págs. 481-547. issn: 0003-486X. https://doi.org/10.4007/annals.2008.167.481.

[7] Kouril, Michal. «Computing the van der Waerden number $W(3,4) = 293$». En: *Integers* 12 (2012), Paper No. A46, 13. issn: 1553-1732.

[8] Kouril, Michal y Paul, Jerome L. «The van der Waerden number $W(2,6)$ is 1132». En: *Experiment. Math.* 17.1 (2008), págs. 53-61. issn: 1058-6458. url: http://projecteuclid.org/euclid.em/1227031896.

[9] Roth, Klaus F. «On certain sets of integers». En: *J. London Math. Soc.* 28 (1953), págs. 104-109. issn: 0024-6107. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-28.1.104.

[10] Shelah, Saharon. «Primitive recursive bounds for van der Waerden numbers». En: *J. Amer. Math. Soc.* 1.3 (1988), págs. 683-697. issn: 0894-0347. https://doi.org/10.2307/1990952.

[11] Stevens, R. S. y Shantaram, R. «Computer-generated van der Waerden partitions». En: *Math. Comp.* 32.142 (1978), págs. 635-636. issn: 0025-5718. https://doi.org/10.2307/2006173.

[12] Szemerédi, Endre. «On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression». En: *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 20 (1969), págs. 89-104. issn: 0001-5954. https://doi.org/10.1007/BF01894569.

[13] Szemerédi, Endre. «On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression». En: *Acta Arith.* 27 (1975). Collection of articles in memory of JuriĭVladimirovič Linnik, págs. 199-245. issn: 0065-1036.

[14] Van der Waerden, Bartel Leendert. «Beweis einer baudetschen vermutung». Alemán. En: *Nieuw Arch. Wiskd., II. Ser.* 15.2 (1927), págs. 212-216. issn: 0028-9825.