TEMat

El teorema de Müntz-Szász sobre la aproximación de funciones continuas

Daniel Eceizabarrena
BCAM - Basque Center for Applied Mathematics
deceizabarrena@bcamath.org

Alejandro Mas Mas
Universidad Autónoma de Madrid
alejandro.mas@uam.es

Francisco Mengual Bretón
Universidad Autónoma de Madrid
francisco.mengual@uam.es

María Soria Carro
The University of Texas at Austin
maria.soriac@math.utexas.edu

Resumen: El teorema de Weierstrass es un resultado clásico sobre la aproximación de funciones continuas mediante polinomios en intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$. En este artículo tratamos una generalización de dicho teorema que, en vez de polinomios, considera potencias cuyos exponentes satisfacen ciertas propiedades. Este resultado se conoce como el teorema de aproximación de Müntz-Szász. En primer lugar, introducimos teoría básica del análisis real y complejo, que será útil para probar los resultados principales y, a continuación, presentamos el teorema y la prueba dada por Szász.

Palabras clave: Müntz, Szász, aproximación, funciones continuas.

MSC2010: 30B60.

Recibido: 6 de febrero de 2017.
Aceptado: 24 de junio de 2017.

Agradecimientos: Queremos agradecer a José Luis Fernández, catedrático de la Universidad Autónoma de Madrid, por proponernos el tema del artículo y dirigirnos el trabajo.

Referencia: Eceizabarrena, Daniel; Mas Mas, Alejandro; Mengual Bretón, Francisco y Soria Carro, María. «El teorema de Müntz-Szász sobre la aproximación de funciones continuas». En: *TEMat*, 1 (2017), págs. 31-44. ISSN: 2530-9633. URL: http://temat.anemat.com/articulo/2017-p31/.

1. Breve biografía sobre los autores

1.1. Herman Müntz

Herman Müntz fue una persona muy activa tanto en su faceta de matemático como en lo que se refiere al contexto social más próximo a su propia situación. Además de trabajar en el campo de la teoría de la aproximación, trató durante su vida temas tan diversos como la geometría, ecuaciones en derivadas parciales, ecuaciones integrales y la teoría de números. Asimismo, desarrolló una importante actividad filosófica y divulgativa sobre el judaísmo. Sin embargo, su carrera profesional fue una constante de altibajos y llena de objetivos sin cumplir.

Con el nombre de Chaim Müntz nació en la ciudad de Łódź el 28 de agosto de 1884 en el seno de una familia burguesa judía. En aquella época, la ciudad formaba parte del Reino de Polonia, estado adherido al Imperio Ruso, y experimentaba un crecimiento demográfico sin precedentes en el marco de una potente industrialización. El joven Müntz, que hablaba polaco, alemán y ruso de manera fluida, cursó sus estudios primarios en su ciudad natal antes de trasladarse a Berlín, donde ingresó en la Friedrich-Wilhelms-Universität para estudiar matemáticas, ciencias naturales y filosofía. Durante sus años universitarios, contó con profesores de la talla de Frobenius, Landau y Schwarz, y se graduó en 1906.

La pedagogía fue un eje importante de su vida que empezó a desarrollar después de graduarse, ya que dedicó una parte considerable de sus siguientes años a la enseñanza privada de matemáticas. Paralelamente, combinando su interés por la filosofía y sus orígenes judíos, dedicó una parte importante de su tiempo a promover una reforma en la comunidad judía y una sociedad en la que este colectivo disfrutara de una mayor inclusión. En este contexto, publicó un libro titulado *Wir Juden* en 1907, donde defiende el sionismo socialista, una posición frecuente en la época. A lo largo de su vida escribió otros textos que no fueron publicados como libros por diferentes razones, pero que vieron la luz parcialmente en forma de artículos. Todas estas actividades no le impidieron obtener el título de doctor en 1910, bajo la supervisión de Schwarz y Schottky, con la calificación de *magna cum laude* gracias a un trabajo sobre ecuaciones en derivadas parciales en superficies minimales.

Durante los siguientes años, Müntz intentó conseguir la habilitación que le permitiría obtener un puesto universitario. Lo intentó en emplazamientos tan variados como en Múnich, Jerusalén, Gotinga, Giessen y El Cairo, sin éxito. Por ello, tuvo que compaginar la investigación matemática con otras actividades como la docencia en varias escuelas y la elaboración de reseñas de artículos científicos. De todos modos, y a pesar de su fracaso institucional continuado, el propio Müntz se sentía resarcido por el hecho de que a partir de 1927 colaboró con Albert Einstein. Aunque no publicaron ningún artículo conjuntamente, Einstein agradeció su colaboración en más de una publicación.

La ocasión que con tanto ahínco había perseguido llegó en 1929 cuando la Universidad Estatal de Leningrado le ofreció el cargo de catedrático de matemáticas. A raíz de esto, consiguió un notable reconocimiento en la Unión Soviética, como muestra el hecho de que fue uno de los cuatro enviados al Congreso Internacional de Matemáticas en Zúrich en 1932. En 1934 publicó un libro sobre ecuaciones integrales al que aún se hace referencia. Desgraciadamente, su situación en Rusia evolucionó de la misma manera que el clima político europeo: en 1937 fue abruptamente expulsado de la Unión, muy probablemente por su nacionalidad alemana obtenida en 1919. Müntz aterrizó en Tallín y finalmente en Suecia en 1938. Tan solo siete años después de conseguir su tan ansiado objetivo de estabilizarse en una universidad, vio cómo su logro se desvaneció, y en el intento de recuperar su estatus no volvió a tener éxito. Tampoco consiguió penetrar en el entorno de la comunidad matemática sueca, y trabajó en problemas matemáticos relacionados con la hemodinámica. Habiendo dedicado los últimos años a la enseñanza, murió en 1956 a la edad de 71 años.

1.2. Otto Szász

Otto Szász fue un prolífico matemático que investigó en muchas áreas del análisis matemático. Además de la teoría de la aproximación, sus campos de trabajo fueron, entre otros, las fracciones continuas, series de potencias acotadas, polinomios trigonométricos, series de Fourier y métodos de sumabilidad.

Szász nació en Alsószúcs, en la zona rural de Hungría en el Imperio Austrohúngaro (hoy Dolná Súča, Eslovaquia) el 11 de diciembre de 1884. Realizó sus estudios universitarios en la Universidad de Budapest y en la Universidad de Gotinga durante los primeros años del siglo xx, donde fue alumno de ilustres matemáticos como Klein, Hilbert, Minkowski, Toeplitz y Herglotz. Después de graduarse, comenzó los estudios de doctorado bajo la dirección de Leopold Fejér y los culminó en 1911. Durante todos estos años, también visitó las universidades de Múnich y París.

Sin ninguna duda, Szász tuvo más éxito que Müntz en lo que a puestos académicos se refiere. Poco después de obtener el título de doctor, se incorporó a la propia Universidad de Budapest como *privatdozent*, un cargo de profesor en las universidades de habla alemana que, aunque sin constar estrictamente entre el personal, permitía a jóvenes investigadores preparar su habilitación. Tras pocos años allí, tuvo la oportunidad de trasladarse a Fráncfort, también como *privatdozent* hasta 1920 y como profesor titular desde entonces hasta 1933. Es en esta época cuando Szász produjo la mayor parte de los más de 120 artículos que publicó durante su vida.

Como en muchos otros casos, la situación política en Alemania le hizo abandonar el país rumbo a los Estados Unidos. Tras pasar por el MIT y por Brown, se asentó en la Universidad de Cincinatti, donde trabajó el resto de su vida. Murió durante unas vacaciones en Suiza el 19 de septiembre de 1952, a la edad de 67 años. Entre sus colaboradores y amistades personales se encontraban ilustres matemáticos como su director Fejér, Landau, Perron y Pringsheim. Cabe mencionar que en 1939 Szász recibió el premio Julius König de la Sociedad Matemática y Física de Hungría, y fue miembro de la American Mathematical Society.

2. El problema de la aproximación

Sin entrar en demasiados detalles, podríamos describir la teoría de la aproximación como un área del análisis en la que se busca aproximar una función, que podría ser *a priori* complicada, mediante ciertas funciones más sencillas y fácilmente manejables. A comienzos del siglo xix, la definición de una función se limitaba a proporcionar una fórmula explícita para el cálculo de sus valores. Sin embargo, hubo un momento en el que la comunidad matemática empezó a describir conjuntos de funciones mediante las propiedades que estas deberían cumplir. Así, se hacía más complicado describir todas las funciones mediante fórmulas. Pensemos por un momento en el claro y sencillo ejemplo de las funciones continuas: podemos encontrar funciones de lo más rebuscadas que difícilmente admitirían una expresión explícita manejable.

Este paso es el que hace que la teoría de la aproximación empiece a ser desarrollada casi por inercia. El primer resultado de entidad fue demostrado por Weierstrass en 1885 y hoy en día se conoce como el teorema de aproximación de Weierstrass:

Teorema 1 (teorema de aproximación de Weierstrass). *Toda función real continua definida en un intervalo compacto de $\mathbb{R}$ puede ser aproximada mediante polinomios. En otras palabras, dados un intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$, una función $f \in C(I)$ y un $\epsilon > 0$, existe un polinomio p tal que $|f(t) - p(t)| < \epsilon$, para todo $t \in I$.*

Este teorema fue el punto de inicio para una fructífera teoría. Su importancia se ve reflejada en la cantidad de nuevas demostraciones que se dieron a conocer en los siguientes años utilizando técnicas muy variadas y firmadas por matemáticos como Picard, Fejér, Landau, de la Vallé Poussin, Runge, Phragmén, Lebesgue, Volterra y Bernstein. En 1937, Stone generalizó el teorema a funciones continuas en espacios compactos X y probó que toda subálgebra de $C(X)$ que contenga la función 1 y que separe puntos es densa en $C(X)$. Este resultado toma el nombre de teorema de Stone-Weierstrass.

En 1912, en el Congreso Internacional de Matemáticos de Cambridge, Bernstein planteó un problema a partir del resultado de Weierstrass cuando preguntó por la condición que un conjunto de números positivos $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ debía cumplir para que el conjunto de las combinaciones lineales finitas de $\{t^{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ fuera denso en $C([0,1])$. El propio Bernstein había sido capaz de dar algunos resultados parciales y conjeturó, con acierto, que la suma armónica $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1/\lambda_n$ era decisiva. Tan solo dos años después, en 1914, Müntz confirmó la conjetura demostrando lo que hoy conocemos como el teorema de Müntz-Szász.

Teorema 2 (teorema de Müntz-Szász). *Sea $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente de números positivos. Entonces, el conjunto de las combinaciones lineales finitas de las funciones $1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, \ldots$ es denso en $C([0,1])$ si y solo si $\sum_n 1/\lambda_n = +\infty$.*

En 1916, Szász publicó un artículo en el que completaba, mejoraba y simplificaba la demostración de Müntz. La prueba de Müntz utiliza técnicas de variable real y se basa en estimar la distancia entre una función continua cualquiera a ciertos subespacios finitos de polinomios viendo que esta distancia puede hacerse tan pequeña como se quiera. Nosotros veremos la prueba de Szász, la cual usa técnicas de variable compleja y ciertos argumentos del análisis funcional.

3. Preliminares

Antes de demostrar el teorema de Müntz-Szász debemos introducir una serie de conceptos y resultados previos que serán necesarios para una mejor comprensión de la sección 4. La referencia principal que hemos seguido es el libro de Rudin [4].

3.1. Introducción al análisis funcional

El análisis funcional es una rama de las matemáticas, en particular del análisis, que se basa fundamentalmente en el estudio de los espacios normados completos, también conocidos como los *espacios de Banach*. Esta especialidad tiene muchas aplicaciones en diversas áreas como, por ejemplo, en el análisis armónico y en las ecuaciones diferenciales.

Un **espacio normado** es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}\,(=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$ dotado de una **norma**, es decir, una aplicación $\|\cdot\|_X : X \longrightarrow [0,+\infty)$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\|x\|_X \geq 0\ \forall\, x \in X$ y $\|x\|_X = 0$ si y solo si $x = 0$.
2. $\|\lambda x\|_X = |\lambda|\|x\|_X,\ \forall\, x \in X$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{F}$.
3. $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X,\ \forall\, x, y \in X$.

Decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ **converge** en X (con la topología de la norma) si existe un elemento $x \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0.$$

Un espacio normado X es **completo** si las sucesiones de Cauchy son convergentes. Recordamos que una **sucesión de Cauchy** $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X satisface que dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\|_X < \epsilon, \quad \forall\, n, m > N.$$

Un ejemplo básico de espacio de Banach es el espacio de las funciones continuas $C(I)$ con la norma

$$\|f\|_{C(I)} = \sup_{x\in I} |f(x)|,$$

donde $I = [a, b]$ es un intervalo compacto en $\mathbb{R}$. Es fácil comprobar que $\|\cdot\|_{C(I)}$ define una norma en $C(I)$. Claramente, el supremo se alcanza al ser I compacto y f continua. Además, la convergencia en $C(I)$ es la convergencia uniforme usual.

Como segundo ejemplo muy interesante vamos a introducir los **espacios de Lebesgue**. Estos espacios se definen a partir de la medida de Lebesgue. Recordemos que la medida exterior de Lebesgue de un subconjunto cualquiera A de $\mathbb{R}^n$ se define como

$$m^*(A) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} l(Q_j)^n \,:\, Q_j\ n\text{-cubos con } j \geq 1,\ A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \right\},$$

donde $l(Q)$ denota la longitud del lado del cubo Q. Es decir, $m^*(A)$ es la medición más fina que podemos hacer cubriendo A con n-cubos. Asimismo, se dice que un subconjunto E de $\mathbb{R}^n$ es **medible Lebesgue** si para todo subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ se verifica que

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Cabe destacar que la familia formada por todos los subconjuntos medibles Lebesgue forman una σ-álgebra, y la restricción de m^* a dicha σ-álgebra se conoce como la medida de Lebesgue, m. En este contexto, se dice que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ es **medible** (Lebesgue) si la preimagen de cualquier conjunto medible por f es medible.

Ya estamos en disposición de definir los espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$, con $1 \leq p \leq +\infty$, donde Ω es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$. Distinguimos dos casos: si $1 \leq p < +\infty$, entonces

$$L^p(\Omega) = \{f \text{ medible} : \|f\|_{L^p(\Omega)} < +\infty\},$$

donde la norma viene dada por

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \coloneqq \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Por otro lado, si $p = +\infty$, entonces

$$L^\infty(\Omega) = \{f \text{ medible} : \|f\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty\},$$

donde la norma es la del **supremo esencial**, es decir,

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \coloneqq \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| = \operatorname{ínf}\{C > 0 : |f(x)| \leq C, \text{ a. e. } x \in \Omega\}.$$

Una observación importante es que los elementos de $L^p(\Omega)$ son, en realidad, clases de equivalencia $[f]$, donde $[f] = \{g : \Omega \to \mathbb{F} : f = g \text{ a. e. } x \in \Omega\}$, dado que si $E \subseteq \Omega$ es un conjunto medible, entonces

$$\int_E |f(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_E |g(x)|^p \,\mathrm{d}x.$$

Notamos también que si $\Omega = I$ y $f \in C(I)$, entonces el supremo esencial no es más que el supremo, es decir, $\|f\|_{C(I)} = \|f\|_{L^\infty(I)}$. Además, como I es compacto, tenemos que $C(I) \subset L^p(I)$, para todo $1 \leq p \leq +\infty$. En particular, $\|\cdot\|_{L^p(I)} \leq c\|\cdot\|_{C(I)}$, donde $c > 0$ es una constante que depende de la medida del intervalo. De hecho, todavía podemos decir más, y es que las funciones continuas son densas en los espacios de Lebesgue, excluyendo el caso $p = \infty$ [4, teorema 3.14].

Teorema 3. *Sea $1 \leq p < +\infty$ y sea $f \in L^p(I)$, con $I = [a, b]$ compacto. Entonces, existe una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C(I)$ tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^p(I)} = 0.$$

Equivalentemente, $\overline{C(I)}^{L^p(I)} = L^p(I)$.

Este resultado es de gran utilidad ya que, como veremos en el corolario 15, en muchas ocasiones nos resultará más fácil trabajar con funciones continuas y a continuación, por densidad, obtener los resultados para las funciones en los espacios $L^p(I)$. El caso $p = \infty$ no es cierto dado que el límite uniforme de funciones continuas es continuo y, por tanto, cualquier función no continua que sea esencialmente acotada no se puede aproximar por funciones continuas con la norma del supremo esencial.

Los ejemplos de espacios de Banach que acabamos de ver son, en particular, espacios de funciones. Así, llamamos **funcional** a una aplicación que actúa sobre un espacio de funciones X y que toma valores sobre otro espacio normado Y, es decir, $L : X \to Y$. Decimos que el funcional L es **lineal** si

1. $L(x + x') = L(x) + L(x'), \forall\, x, x' \in X$, y
2. $L(\lambda x) = \lambda L(x), \forall\, x \in X$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{F}$,

y que el funcional L es **continuo** si para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ que converge a $x \in X$ se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} \|L(x_n) - L(x)\|_Y = 0.$$

Si L es lineal, como $L(x_n) - L(x) = L(x_n - x)$, está claro que L es continuo si y solo si lo es en $x = 0$. Además, no es difícil probar que esto equivale a que L esté **acotado**, es decir, a que exista una constante $c > 0$ tal que

$$\|L(x)\|_Y \leq c\|x\|_X, \quad \forall\, x \in X.$$

Se define la norma de L como la menor constante que satisface esta propiedad, es decir,

$$\|L\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|L(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} \|L(x)\|_Y.$$

Por ejemplo, consideremos el funcional **multiplicación por un escalar**,

$$\begin{array}{rcl} L_r : X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & L_r(x) = rx, \end{array}$$

para un cierto $r \in \mathbb{F}$. Claramente, L_r es lineal y continuo siendo su norma

$$\|L_r\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|rx\|_X = |r|.$$

En los espacios de Banach, una gran parte del estudio involucra al **espacio dual**, es decir, el espacio de los funcionales lineales continuos sobre el cuerpo de escalares del espacio base X ($Y = \mathbb{F}$), y lo denotamos por

$$X^* = \{L : X \to \mathbb{F} \text{ tal que } L \text{ lineal y continuo}\}.$$

Por ejemplo, el dual de los espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$, con $1 \leq p < +\infty$, se identifica con $L^q(\Omega)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ [4, teorema 6.16], a través del isomorfismo isométrico $T : L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)^*$ definido como $T(g) = L_g$, donde

$$L_g(f) = \int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Por otro lado, el dual de las funciones continuas $C(I)$ no es un espacio de funciones, pero lo sabemos caracterizar gracias al teorema de representación de Riesz-Markov-Kakutani [4, teorema 6.19].

Teorema 4 (teorema de representación de Riesz-Markov-Kakutani). *El espacio de las medidas de Borel complejas regulares, $M(I)$, es el espacio dual de $C(I)$ vía*

$$\begin{array}{rcl} M(I) & \longrightarrow & C(I)^* \\ \mu & \longmapsto & \left(\varphi \mapsto \langle \varphi, \mu\rangle = \displaystyle\int_0^1 \varphi\,\mathrm{d}\mu\right) = \langle \cdot, \mu\rangle. \end{array}$$

Finalmente, para terminar esta introducción, presentamos un resultado que se obtiene como consecuencia de uno de los grandes teoremas del análisis funcional, conocido como el teorema de Hahn-Banach, el cual trata sobre la extensión de aplicaciones lineales continuas [4, teorema 5.16].

Teorema 5. *Sea M un subespacio lineal de un espacio lineal normado X, y sea $x_0 \in X$. Entonces, x_0 está en la clausura $\overline{M}$ de M si y solo si no existe ningún funcional lineal acotado, T, definido en X tal que $T(x) = 0$ para todo $x \in M$ pero $T(x_0) \neq 0$.*

3.2. Algunos resultados del análisis complejo y de Fourier

En esta sección suponemos que el lector tiene conocimientos básicos de análisis complejo. En primer lugar, veamos unos resultados sobre funciones holomorfas. Denotamos por $\mathcal{H}(\Omega)$ al conjunto formado por las funciones holomorfas en un abierto Ω del plano complejo. Recordamos brevemente que una función holomorfa en el abierto Ω es una función derivable (respecto de la variable compleja) en todos los puntos de Ω, lo cual equivale a que f se pueda expresar localmente como serie de potencias (es decir, f es analítica en Ω). Asimismo, decimos que una función f es meromorfa en Ω si es holomorfa salvo en un conjunto de puntos aislados de Ω.

El siguiente teorema es un caso particular del teorema 15.23 del libro de Rudin [4] restringido a la familia H^∞, la cual está formada por las funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$, que además son acotadas.

Teorema 6. *Si $f \in H^\infty$ tiene ceros $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ en $\mathbb{D}$ y si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 - |\alpha_n| = +\infty,$$

entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

La demostración del resultado que sigue se puede encontrar en el libro de Rudin [4, teorema 15.6].

Teorema 7. *Sea Ω un dominio en el plano complejo. Supongamos que $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ para $n = 1, 2, 3, \dots,$ siendo f_n no idénticamente nula en ninguna componente de Ω, y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. Entonces, el producto

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. Así, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

El siguiente teorema es un resultado básico del análisis complejo [4, pág. 211], el cual afirma que una función holomorfa en un dominio Ω está determinada por sus valores en cualquier conjunto que tenga algún punto de acumulación en Ω. Con más detalle:

Teorema 8 (principio de identidad). *Si f y g son dos funciones holomorfas en un dominio Ω y si $f(z) = g(z)$ para todo z en algún conjunto que tiene un punto de acumulación en Ω, entonces $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

En la prueba del teorema de Müntz-Szász necesitaremos ver que ciertas funciones son holomorfas. Los siguientes resultados clásicos del análisis complejo nos serán de gran ayuda para este propósito.

Teorema 9 (teorema de Morera). *Dada una función compleja continua, f, definida en un dominio Ω de $\mathbb{C}$, si*

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

para cada camino C cerrado y C^1 a trozos con soporte en Ω, entonces f es holomorfa en Ω.

Teorema 10 (teorema de Cauchy). *Si f es holomorfa en un dominio simplemente conexo, entonces*

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

para cada camino cerrado rectificable C en el dominio.

Una vez comprobada la analiticidad, la fórmula de representación de Cauchy nos permitirá reescribir nuestra función de una manera específica.

Teorema 11 (fórmula de Cauchy). *Si f es holomorfa dentro y en la frontera C de un dominio simplemente conexo, entonces, para cada z_0 dentro de C,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z.$$

Para terminar con los preliminares, vamos a introducir muy brevemente dos tipos de funciones, que nos serán de gran utilidad en la demostración del teorema de Müntz-Szász. La primera es la **transformada de Fourier** de una función $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, que se define como

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Se satisface la siguiente propiedad básica.

Proposición 12. *Si $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces su transformada de Fourier $\widehat{g}$ es acotada y continua.*

Demostración. La acotación se deduce fácilmente de la definición, ya que

$$|\widehat{g}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\,\mathrm{d}x = \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Por otra parte,

$$\lim_{\xi\to\xi_0} \widehat{g}(\xi) = \lim_{\xi\to\xi_0} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x,$$

y como el valor absoluto del integrando esta acotado por $|g| \in L^1(\mathbb{R}^n)$, el teorema de la convergencia dominada nos permite meter el límite dentro de la integral y, por tanto,

$$\lim_{\xi\to\xi_0} \widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\cdot\xi_0}\,\mathrm{d}x = \widehat{g}(\xi_0). \qquad \blacksquare$$

El segundo tipo de funciones son las *transformaciones de Möbius*. Una de las transformaciones más comunes viene dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{H}_0 \\ z &\longmapsto \frac{1+z}{1-z}, \end{aligned}$$

donde $\mathbb{H}_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \alpha\}$. Observemos que esta función está bien definida, ya que

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

La transformación de Möbius inversa es

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_0 &\longrightarrow \mathbb{D} \\ w &\longmapsto \frac{w-1}{w+1}. \end{aligned}$$

Para nuestro caso de interés consideraremos la transformación de Möbius

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{-1} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto \frac{a-1-z}{a+1+z} = -\frac{\frac{z+1}{a}-1}{\frac{z+1}{a}+1}, \end{aligned} \tag{1}$$

para un $a > 0$ arbitrario.

4. Teorema de Müntz-Szász

Para demostrar el teorema 2, lo reformularemos de una manera más práctica y ligeramente más completa.

Teorema 13. *Sean $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ y X la clausura en $C([0,1])$ del conjunto de las combinaciones lineales finitas de las funciones*

$$1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, \dots$$

(a) *Si $\sum_n 1/\lambda_n = +\infty$, entonces $X = C([0,1])$.*

(b) *Si $\sum_n 1/\lambda_n < +\infty$ y $\lambda \notin \{\lambda_n\}$, $\lambda \neq 0$, entonces $t^\lambda \notin X$.*

Es inmediato ver que, en efecto, el teorema de Müntz-Szász (teorema 2) se deduce del teorema 13. Antes de enfrentarnos directamente a su demostración, probaremos la siguiente proposición que, como veremos, será de gran utilidad.

Proposición 14. *Si $\sum 1/\lambda_n = \infty$, μ es una medida de Borel compleja en I y T es el funcional lineal acotado en $C(I)^* \cong M(I)$ asociado a μ tal que*

$$T(t^{\lambda_n}) = \int_0^1 t^{\lambda_n}\,\mathrm{d}\mu(t) = 0, \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

entonces

$$T(t^k) = \int_0^1 t^k\,\mathrm{d}\mu(t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Demostración. Para ver (3) usaremos algunas técnicas de análisis complejo, las cuales hemos presentado en la sección 3. Asumamos que (2) se cumple. Como los integrandos en (2) y (3) se anulan en $t = 0$, podemos asumir que la medida μ se concentra en $I = (0, 1]$.

Consideremos la función

$$f(z) = \int_I t^z\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_I \mathrm{e}^{z\log t}\,\mathrm{d}\mu(t), \tag{4}$$

que está bien definida en el semiplano complejo derecho $\mathbb{H}_0$:

$$|f(z)| \le \int_I |\mathrm{e}^{z\log t}|\,\mathrm{d}|\mu|(t) = \int_I \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z\log t}\,\mathrm{d}|\mu|(t) = \int_I t^{\operatorname{Re} z}\,\mathrm{d}|\mu|(t) \le \|\mu\| < +\infty, \tag{5}$$

ya que, si $\operatorname{Re} z \ge 0$, entonces $|t^{\operatorname{Re} z}| \le 1$ para todo $t \in I$.

Más aún, vamos a ver que f es holomorfa en $\mathbb{H}_0$. Para ello nos serviremos del teorema de Morera (teorema 9). El primer paso es probar que f es continua. Como

$$f(z) - f(z_0) = \int_I t^z\,\mathrm{d}\mu(t) - \int_I t^{z_0}\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_I (t^z - t^{z_0})\,\mathrm{d}\mu(t),$$

entonces

$$|f(z) - f(z_0)| \le \int_I |t^z - t^{z_0}|\,\mathrm{d}|\mu|(t).$$

Fijemos $\varepsilon > 0$. Como $(t, z) \mapsto t^z$ es una función continua en $[0, 1] \times \mathbb{H}_0$ (uniformemente en t, por ser $[0, 1]$ compacto), existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, si $|z - z_0| < \delta$, entonces $|t^z - t^{z_0}| < \varepsilon$, para todo $t \in I$. Así,

$$|f(z) - f(z_0)| \le \varepsilon \int_I \mathrm{d}|\mu|(t) = \varepsilon\|\mu\|,$$

que prueba la continuidad de f.

Ahora, sea γ un camino cerrado de clase C^1 en $\mathbb{H}_0$. Entonces,

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_\gamma \int_I t^z\,\mathrm{d}\mu(t)\,\mathrm{d}z = \int_I \oint_\gamma t^z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\mu(t) = 0.$$

La última igualdad se debe a que t^z es una función holomorfa, por lo que podemos aplicar el teorema de Cauchy (teorema 10). El intercambio en el orden de integración es legítimo por el teorema de Fubini, ya que

$$\oint_\gamma \int_I |t^z|\,\mathrm{d}|\mu|(t)\,\mathrm{d}|z| = \oint_\gamma \int_I t^{\operatorname{Re} z}\,\mathrm{d}|\mu|(t)\,\mathrm{d}|z| \le \oint_\gamma \int_I \mathrm{d}|\mu|(t)\,\mathrm{d}|z| = \|\mu\| L(\gamma) < +\infty,$$

donde $L(\gamma)$ denota la longitud de la curva γ. Entonces, por el teorema de Morera (teorema 9), concluimos que f es una función holomorfa en $\mathbb{H}_0$. Por otro lado, hemos probado en (5) que f está acotada en $\mathbb{H}_0$.

Consideremos ahora la función

$$g(z) = f\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Observamos que g es la composición entre una transformación de Möbius del disco al semiplano derecho (ver sección 3.2) y nuestra función f. Entonces,

- $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$,
- g es acotada en $\mathbb{D}$ (por ser f acotada).

Es decir, $g \in H^\infty$. Además, la hipótesis (2) dice que

$$f(\lambda_n) = T(t^{\lambda_n}) = 0, \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots,$$

luego $g(\alpha_n) = 0$, donde $\alpha_n = \dfrac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1}$.

Afirmamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} 1 - |\alpha_n| = +\infty.$$

De hecho,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 - \left|\frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n + 1 - |\lambda_n - 1|}{\lambda_n + 1}$$

y analizamos dos posibles casos.

- Si $0 < \lambda_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lambda_n + 1 - |\lambda_n - 1| = \lambda_n + 1 + \lambda_n - 1 = 2\lambda_n$. Consecuentemente,

  $$\sum_{n=1}^{\infty} 1 - |\alpha_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_n}{\lambda_n + 1} = +\infty,$$

  ya que $\dfrac{2\lambda_n}{\lambda_n + 1} \nrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow +\infty$.
- Si a partir de un cierto $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $\lambda_n \geq 1$ para todo $n \geq m$, entonces $\lambda_n + 1 - |\lambda_n - 1| = \lambda_n + 1 - \lambda_n + 1 = 2$. Por lo tanto,

  $$\sum_{n=1}^{\infty} 1 - |\alpha_n| \geq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n + 1} = +\infty.$$

Aplicando el teorema 6, deducimos que $g(z) = 0$, $\forall\, z \in \mathbb{D}$. En particular, también

$$T(t^k) = \int_I t^k \, \mathrm{d}\mu(t) = f(k) = g\left(\frac{k-1}{k+1}\right) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Esto concluye la prueba. ∎

A continuación, trataremos de probar el teorema 13. Como veremos, la primera parte de la demostración se deduce directamente de la proposición 14, simplificando su estructura. Deberemos trabajar un poco más para conseguir el resultado de la segunda parte.

Demostración del teorema 13. Comencemos probando (a). Por el teorema de aproximación de Weierstrass (teorema 1), es suficiente probar que X contiene todas las funciones t^k, con $k = 1, 2, 3, \ldots$ Supongamos, por el contrario, que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t^{k_0} \notin X$. Claramente, $t^{k_0} \in C([0,1])$ y así, por el teorema 5, existe un funcional lineal y acotado $T : C([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$T(t^{k_0}) \neq 0 \quad \text{y} \quad T|_X \equiv 0.$$

Como T satisface las hipótesis del teorema de representación de Riesz-Markov-Kakutani (teorema 4), existe una medida de Borel compleja μ tal que

$$T(\varphi) = \int_0^1 \varphi(t) \, \mathrm{d}\mu(t) \quad \forall \varphi \in C([0,1]),$$

satisfaciendo además que

(I) $T(t^{k_0}) = \int_0^1 t^{k_0}\,\mathrm{d}\mu(t) \neq 0$,

(II) $T(t^{\lambda_n}) = \int_0^1 t^{\lambda_n}\,\mathrm{d}\mu(t) = 0 \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots$

La afirmación (a) sigue inmediatamente de la proposición 14. En efecto, esta nos dice que $T(t^{k_0})$ es nulo y no nulo a la vez. Por lo tanto, la afirmación del comienzo debe ser falsa, $t^k \in X$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y el primer apartado queda demostrado.

Procedemos ahora a demostrar (b). Asumamos que $\sum_n 1/\lambda_n < +\infty$. La prueba consiste en construir un funcional $T = \langle \cdot, \mu \rangle$, como en el apartado (a), tal que $T(t^{\lambda_n}) = 0$ para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$ (con $\lambda_0 = 0$), mientras que $T(t^{\lambda}) \neq 0$ para cada $\lambda > 0$ con $\lambda \notin \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

En vista del apartado (a), esto requiere encontrar una función holomorfa acotada en $\mathbb{H}_{-1}$, cuyos ceros sean precisamente estos λ_n. Dicha función debe poder expresarse como un producto infinito. Aplicando la maquinaria de las transformaciones de Möbius de $\mathbb{H}_{-1}$ a $\mathbb{D}$, vista en (1), unos términos convenientes para dicho producto infinito son

$$\frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z}.$$

Finalmente, la función que consideraremos es

$$f(z) = \frac{z}{(2+z)^3} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{-2 - \lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0},$$

donde hemos añadido un término adicional, $\frac{1}{(2+z)^2}$, para garantizar una propiedad de integrabilidad que veremos más adelante.

Comencemos probando que f es meromorfa en $\mathbb{C}$, con polos en $\{-2 - \lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. En vista del teorema 7, es suficiente ver que la serie con términos

$$1 - \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z} = \frac{2z + 2}{2 + \lambda_n + z}$$

converge absolutamente y uniformemente sobre compactos en $\mathbb{C} \setminus \{-2 - \lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Fijemos un subconjunto compacto K de $\mathbb{C} \setminus \{-2 - \lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por compacidad, existe $\alpha > 0$ tal que $K \subset \mathbb{H}_{-\alpha}$. Como $\sum_n 1/\lambda_n$ es una serie convergente de términos (decrecientes) positivos, ha de ser $\lambda_n \longrightarrow +\infty$, cuando $n \longrightarrow +\infty$. Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $-2 - \lambda_n < -\alpha$, para todo $n > N$. Sea $C_K = \sup_{z\in K} |2z + 2|$. Ahora, para cada $z \in K$, si $n \leq N$, se tiene que

$$\left| \frac{2z + 2}{2 + \lambda_n + z} \right| \leq \frac{C_K}{\inf\limits_{w\in K} |2 + \lambda_n + w|} \leq \frac{C_K}{\operatorname{dist}(-2 - \lambda_n, K)},$$

y, si $n > N$, se tiene que

$$\left| \frac{2z + 2}{2 + \lambda_n + z} \right| \leq \frac{C_K}{\inf\limits_{w\in\mathbb{H}_{-\alpha}} |2 + \lambda_n + w|} \leq \frac{C_K}{2 + \lambda_n - \alpha}.$$

Por lo tanto, la hipótesis de convergencia de la serie $\sum_n 1/\lambda_n < +\infty$ y el criterio M de Weierstrass nos permiten concluir que la serie converge absolutamente y uniformemente sobre K.

Veamos ahora que f está acotada por 1 en $\mathbb{H}_{-1}$. La parte del producto infinito está acotada por 1 ya que cada término del producto es una transformación de Möbius de $\mathbb{H}_{-1}$ a $\mathbb{D}$. El término fuera del producto infinito está acotado también por 1 en $\mathbb{H}_{-1}$, ya que una parte es $\frac{z}{2+z}$, que es también una transformación de Möbius de $\mathbb{H}_{-1}$ a $\mathbb{D}$, y el otro término, como $|2 + z| \geq |\operatorname{Re}(2 + z)| \geq 1$ en $\mathbb{H}_{-1}$, satisface

$$\frac{1}{|2 + z|^2} \leq 1, \qquad \forall z \in \mathbb{H}_{-1}.$$

Veamos ahora que f está en L^1 cuando la restringimos a $\operatorname{Re} z = -1$. Por la expresión de $|f|$, el producto infinito se puede acotar por 1 ya que permanece en el disco. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(-1+\mathrm{i}\,r)|\,\mathrm{d}r \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{|-1+\mathrm{i}\,r|}{|1+\mathrm{i}\,r|^3}\,\mathrm{d}r = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}r}{1+r^2} = \pi,$$

luego $f \in L^1(\{\operatorname{Re} z = -1\})$.

El siguiente paso es considerar un z_0 fijo, con $\operatorname{Re} z_0 > -1$, y aplicar la fórmula de Cauchy (11) para $f(z_0)$ a lo largo de la semicircunferencia con centro en -1 y radio $R > 1 + |z_0|$, tomado desde $-1 - \mathrm{i}R$ a $-1 + R$ y hasta $-1 + \mathrm{i}R$, y después continuado por el segmento de $-1 + \mathrm{i}R$ a $-1 - \mathrm{i}R$, como se muestra en la figura 1.

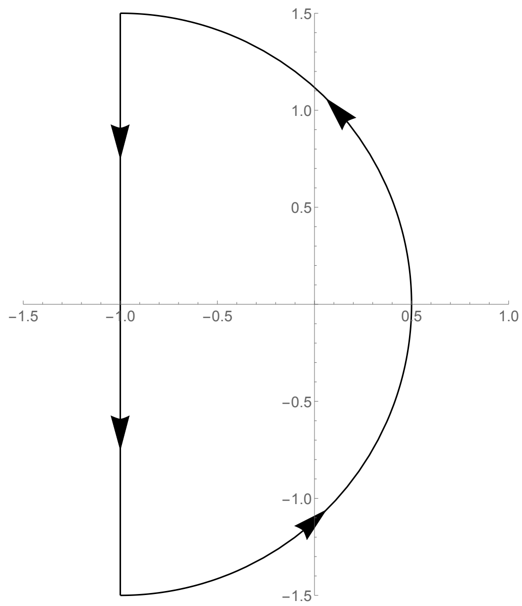

Figura 1: Camino en el que aplicamos la fórmula de Cauchy (en este dibujo, $R = 1{,}5$).

Llamando a esta curva C, una vez parametrizada, tenemos que

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \\ &= -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{-R}^{R} \frac{f(-1+\mathrm{i}\,s)}{-1+\mathrm{i}\,s - z_0}\mathrm{i}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f(-1+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{-1+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - z_0} R\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{6}$$

Queremos ver que el segundo término de la integral a lo largo de la semicircunferencia, que denotamos por I_R, tiende a 0 cuando $R \longrightarrow +\infty$. Utilizando de nuevo la cota dada por $|f(z)| \leq |z|/|2+z|^3$, podemos escribir

$$\begin{aligned} |I_R| &\leq \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{|-1+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|}{|1+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^3|-1+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - z_0|}\,\mathrm{d}\theta \\ &\leq \frac{R}{2} \sup_{\theta\in(-\pi/2,\pi/2)} \frac{|-1+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|}{|1+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^3|-1+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - z_0|}. \end{aligned}$$

La desigualdad triangular implica que

$$|-1+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| \leq 1+R \quad \text{y} \quad |1+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| \geq R-1.$$

Además, $|-1+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}-z_0| \geq R-|1+z_0|$, luego

$$\frac{|-1+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}|}{|1+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}|^3|-1+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}-z_0|} \leq \frac{R+1}{(R-1)^3(R-|1+z_0|)}.$$

Como z_0 permanece fijo, el término $R-|1+z_0|$ crece con R, por lo que puede ser acotado inferiormente por 1, si R es suficientemente grande. Entonces, a partir de dicho R,

$$|I_R| \leq \frac{R}{2}\frac{R+1}{(R-1)^3} \longrightarrow 0$$

cuando $R \longrightarrow +\infty$. Aplicando esto y el teorema de la convergencia dominada sobre la integrabilidad de f en $\operatorname{Re} z=-1$, haciendo $R \longrightarrow +\infty$ en (6) obtenemos

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(-1+\mathrm{i}\,s)}{1+z_0-\mathrm{i}\,s}\,\mathrm{d}s. \tag{7}$$

Recordando la identidad

$$\int_0^1 t^{z-\mathrm{i}\,s}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{z-\mathrm{i}\,s+1}t^{z-\mathrm{i}\,s+1}\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{z-\mathrm{i}\,s+1} \qquad (\operatorname{Re} z > -1), \tag{8}$$

observamos que (7) puede reescribirse como

$$f(z) = \int_0^1 t^z\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-1+\mathrm{i}\,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,s\log t}\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t. \tag{9}$$

El intercambio en el orden de integración es legítimo: si el integrando en (9) es reemplazado por su valor absoluto, aparece una integral finita debido a que la restricción de f a la línea $\operatorname{Re} z=-1$ está en L^1:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(-1+\mathrm{i}\,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,s\log t}t^z\right|\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 t^{\operatorname{Re} z}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(-1+\mathrm{i}\,s)|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{M}{2\pi}\int_0^1 t^{\operatorname{Re} z}\,\mathrm{d}t < +\infty \qquad (\operatorname{Re} z > -1).\end{aligned}$$

Pongamos $g(s)=f(-1+\mathrm{i}\,s)$. Entonces, la integral interior en (9) es $\widehat{g}(\log t)$, donde $\widehat{g}$ es la transformada de Fourier de g. Esta es una función continua y acotada en $(0,1]$ (ver proposición 12). De este modo, tomando

$$\mathrm{d}\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\widehat{g}(\log t)\,\mathrm{d}t$$

obtenemos una medida de Borel compleja que representa a f en la forma deseada (4), es decir,

$$f(z) = \int_I t^z\,\mathrm{d}\mu(t),$$

que, además, por construcción se anula cuando $z=\lambda_n$. De manera equivalente, tenemos un funcional $T=\langle\cdot,\mu\rangle$ que se anula en t^{λ_n} y, por lo tanto, también lo hace en todas las combinaciones lineales de esas potencias. Pero no se anula en t^{λ} cuando $\lambda \neq \lambda_n$. En vista del teorema 5, t^{λ} no está en X cuando $\lambda \neq \lambda_n$ y el apartado (b) queda demostrado. ■

Si tratamos de extender el teorema de Müntz-Szász a los espacios de Lebesgue $L^p([0,1])$, con $1 \leq p \leq +\infty$, nos damos cuenta de que el caso $p=\infty$ no es cierto. De hecho, acabamos de ver que

$$\overline{\operatorname{span}\{1,t^{\lambda_1},t^{\lambda_2},\ldots\}}^{L^\infty([0,1])} = C([0,1]) \subsetneq L^\infty([0,1]).$$

Ahora bien, cuando $1 \leq p < +\infty$ sí que es posible obtener un resultado análogo de aproximación.

Corolario 15 (el teorema de Müntz-Szász para los espacios de Lebesgue). *Supongamos que*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

y sea X la clausura en $L^p([0,1])$, con $1 \leq p < +\infty$, del conjunto de las combinaciones lineales finitas de las funciones

$$1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, \dots$$

(a) *Si $\sum_n 1/\lambda_n = +\infty$, entonces $X = L^p([0,1])$.*

(b) *Si $\sum_n 1/\lambda_n < +\infty$ y si $\lambda \notin \{\lambda_n\}$, $\lambda \neq 0$, entonces $t^\lambda \notin X$.*

Demostración. (a) Recordamos que la convergencia uniforme es más fuerte que la convergencia en $L^p([0,1])$, es decir, $\|\cdot\|_{L^p([0,1])} \leq \|\cdot\|_{L^\infty([0,1])}$. Llamamos $A = \operatorname{span}\{1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \dots\} \subset L^p([0,1])$. Trivialmente, $X = \overline{A}^{L^p([0,1])} \subset L^p([0,1])$. La inclusión contraria se obtiene por el teorema de Müntz-Szász y la densidad de $C([0,1])$ en $L^p([0,1])$ (teorema 3):

$$L^p([0,1]) = \overline{C([0,1])}^{L^p([0,1])} = \overline{\overline{A}^{L^\infty([0,1])}}^{L^p([0,1])} \subset \overline{\overline{A}^{L^p([0,1])}}^{L^p([0,1])} = X.$$

(b) Si miramos la prueba que hemos dado anteriormente para el teorema de Müntz-Szász, notamos que $\mathrm{d}\mu(t) = h(t)\,\mathrm{d}t$, donde

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\widehat{g}(\log t), \qquad t \in (0,1].$$

Como $\widehat{g}$ está acotada, $h \in L^\infty([0,1]) \subset L^q([0,1])$, con $1 < q \leq +\infty$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, el funcional en $L^p([0,1])^*$,

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \overline{h} \rangle : L^p([0,1]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \langle f, \overline{h} \rangle = \int_0^1 f(t)h(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

se anula en X, pero no en t^λ, para todo $\lambda > 0$, con $\lambda \notin \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por tanto, por el teorema 5, X es un subespacio propio de $L^p([0,1])$. ■

Referencias

[1] Luxemburg, W.A.J. y Korevaar, J. «Entire functions and Müntz-Szász type approximation». En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 157 (1971), págs. 23-37. https://doi.org/10.2307/1995828.

[2] Ortiz, Eduardo L. y Pinkus, Allan. «Herman Müntz: A Mathematicians Odyssey». En: *The Mathematical Intelligencer* 27 (2005), págs. 22-31. https://doi.org/10.1007/BF02984810.

[3] Pinkus, Allan. «Density in Approximation Theory». En: *Surveys in Approximation Theory* 1 (2005), págs. 1-45. arXiv: math/0501328 [math.CA].

[4] Rudin, Walter. *Real and Complex Analysis*. Third Edition. McGraw-Hill, 1987. isbn: 0070542341.

[5] Szegö, Gabor. «Otto Szász». En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 60 (1954), págs. 261-263. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1954-09794-X.