TEMat

Influencia de los tamaños de clase en grupos finitos

Víctor Manuel Ortiz Sotomayor
Universidad Politécnica de Valencia
vicorso@doctor.upv.es

Resumen: Presentamos una breve introducción sobre cómo los tamaños de las clases de conjugación de los elementos de un grupo finito afectan a su estructura. En particular, abordaremos dicho estudio en los grupos factorizados.

Palabras clave: grupos finitos, clases de conjugación, subgrupos de Sylow, grupos factorizados.

MSC2010: 20E45, 20D20, 20D40, 20D10.

Recibido: 28 de diciembre de 2016.
Aceptado: 14 de enero de 2017.

Agradecimientos: Este trabajo ha sido financiado por las «Ayudas para la contratación de personal investigador en formación de carácter predoctoral», otorgadas por la Generalitat Valenciana, España. Agradecer también a las profesoras Ana Martínez y María José Felipe (Universidad Politécnica de Valencia) por la constante orientación y motivación que en todo momento me han brindado durante el desarrollo de mi Trabajo Fin de Máster y mi actual tesis doctoral.

Referencia: Ortiz Sotomayor, Víctor Manuel. «Influencia de los tamaños de clase en grupos finitos». En: *TEMat*, 1 (2017), págs. 45-51. ISSN: 2530-9633. URL: http://temat.anemat.com/articulo/2017-p45/.

1. Introducción

En este trabajo solamente consideraremos grupos finitos. Además, supondremos que el lector conoce los conceptos básicos de un curso de Teoría de Grupos, por lo que algunas definiciones y pruebas serán omitidas y/o referidas. La notación que utilizaremos es la estándar en este contexto y está extraída principalmente del libro de Isaacs [9]. No obstante, para facilitar la lectura, recordamos a continuación alguna terminología específica.

Notación. Para un grupo finito G, sea x^G la **clase de conjugación** de un elemento $x \in G$, i.e., el conjunto formado por todos los elementos conjugados x en G. El tamaño de este conjunto lo denotaremos por $\left|x^G\right|$. Si p es un número primo, entonces p' es el conjunto de primos distintos de p. Además, diremos que $x \in G$ es un $\boldsymbol{p'}$**-elemento** si su orden no es divisible por p, y diremos que es un $\boldsymbol{p}$**-elemento** si su orden es una potencia de p. Finalmente, dado un número natural n, diremos que es **libre de cuadrados** si ningún número primo al cuadrado lo divide. ◂

La influencia que tienen los tamaños de las clases de conjugación sobre un grupo finito es un tema que ha sido extensamente estudiado durante los últimos 25 años. En concreto, se han obtenido resultados interesantes cuando se restringen las hipótesis a cierto subconjunto de elementos del grupo, como puedan ser los elementos de orden potencia de primo, los p'-elementos, etc. Un excelente resumen sobre esta materia puede encontrarse en el trabajo de Camina y Camina [3], y en el caso particular de que los tamaños de clase son libres de cuadrados también se puede consultar el *survey* de Felipe, Martínez Pastor y Ortiz Sotomayor [5]. Nuestro propósito es mostrar solamente una breve introducción al tema referido, mostrando ciertos resultados destacables con pruebas elementales e ilustrando algunos de ellos con ejemplos.

Una propiedad importante en la estructura de un grupo es el hecho de poseer algún factor directo. En este contexto, dado un p-subgrupo de Sylow P de un grupo finito G, diremos que G es $\boldsymbol{p}$**-descomponible** si P es un factor directo de G, i.e., cuando $G = P \times H$ con H un p'-grupo (luego $H = \mathrm{O}_{p'}(G)$ es el único p'-subgrupo de Hall de G). El siguiente teorema muestra una condición necesaria y suficiente para detectar dicha propiedad:

Teorema A ([2, lemma 3]). *Sean G un grupo finito y p un número primo divisor de $|G|$. Entonces, $\left|x^G\right|$ es una potencia de p para todo p-elemento $x \in G$ si y solo si G es p-descomponible.*

De hecho, ya en 1972 Camina [1] había probado otra condición equivalente para la p-descomponibilidad de un grupo G:

Teorema 1 ([1, lemma 1; corollary 1]). *Sean G un grupo finito y p un número primo divisor de $|G|$. Entonces:*

1. *Para todo p'-elemento $x \in G$, p no divide a $\left|x^G\right|$ si y solo si G es p-descomponible.*
2. *Para todo elemento $x \in G$, p no divide a $\left|x^G\right|$ si y solo si G es p-descomponible con p-subgrupo de Sylow abeliano.*

Observemos que la condición sobre los tamaños de clase en el punto 1 es dual a la del teorema A. Es más, en la sección 3 veremos que también existe una condición dual a la que aparece en punto 2 (ver sección 3, corolario 6). Cabe destacar que la segunda parte es una consecuencia inmediata de la primera (puede consultarse su prueba en el trabajo de Ortiz Sotomayor [12, teorema 2.2.1]).

Otra propiedad importante a reconocer en la estructura de un grupo es su resolubilidad. En este contexto, en 1990, Chillag y Herzog [4] probaron el siguiente resultado, mediante el uso de la clasificación de los grupos finitos simples (CGFS):

Teorema B ([4, proposition 5]). *Sea G un grupo finito. Supongamos que* 4 *no divide a ningún tamaño de clase de conjugación de G. Entonces, G es resoluble.*

Ejemplo 1. A diferencia de los resultados anteriores, es fácil encontrar ejemplos que muestran que el recíproco no es cierto, véase el grupo alternado de 4 letras. ◂

Es importante mencionar que en el artículo de Camina y Camina [2], los autores dan también una prueba evitando la CGFS. Destacar además que el teorema anterior ha sido extensamente generalizado (en el trabajo de Ortiz Sotomayor [12] se puede hallar gran parte del desarrollo).

Si nos centramos en el caso de los p-grupos, ya en 1951 Knoche [10] probó la siguiente condición equivalente entre sus tamaños de clase y el orden de su subgrupo derivado:

Teorema C ([10, Satz 2]). *Sea P un p-grupo. Entonces, para todo $x \in P$, p^2 no divide a $\left|x^P\right|$ si y solo si $|P'| \leq p$.*

En la próxima sección vamos a recopilar algunos resultados preliminares necesarios para probar, en la sección 3, los teoremas A, B (evitando la CGFS) y C. Finalmente destacamos que, como caso particular, en la última sección se combinará este estudio con los grupos factorizados, ya que es una línea de investigación novedosa y poco investigada.

2. Preliminares

Comenzamos esta sección con el siguiente resultado, el cual se le atribuye a Burnside:

Lema 2 ([8, corollary 4.16]). *Sea H un subgrupo de un grupo finito G. Si $G = \bigcup_{g\in G} H^g$, entonces $G = H$.*

Nota 1. De hecho, una propiedad básica es que un grupo no puede ser tampoco unión de dos subgrupos propios (véase el libro de Isaacs [8, problems 2.1]). ◂

El siguiente lema es conocido como el «lema de Wielandt»:

Lema 3. *Sean G un grupo finito y p un primo divisor de $|G|$. Si $x \in G$ es un p-elemento con $\left|x^G\right|$ una potencia de p, entonces $x \in \mathrm{O}_p(G)$.*

Demostración. Tenemos que, por el teorema de la órbita-estabilizador, $\left|x^G\right| = |G : \mathrm{C}_G(x)|$ es una potencia de p. Además, escogemos un p-subgrupo de Sylow P de G tal que $x \in P$. Entonces $|G : P|$ es un p'-número y como ambos números son coprimos, podemos concluir que $G = P\,\mathrm{C}_G(x)$ (ver [9, corollary X.12]).

Entonces tenemos que $\langle x^G\rangle = \langle x^{P\,\mathrm{C}_G(x)}\rangle = \langle x^P\rangle \leqslant P$, luego es un p-subgrupo normal de G y, por tanto, $x \in \langle x^G\rangle \leqslant \mathrm{O}_p(G)$. ∎

Una propiedad que será importante en el teorema C es la que viene a continuación. Aunque aparece en el libro de Huppert [7, Hilfssatz 1.3 (a)], dicho libro está en alemán, luego incluimos aquí la prueba.

Lema 4. *Sean g y h elementos de un grupo finito G y n un número natural. Si $[[g, h], g] = 1$, entonces $[g^n, h] = [g, h]^n$.*

Demostración. Por inducción sobre n. El caso $n = 1$ es trivial. Supongamos cierto el caso $n-1$ y probemos el caso n. Tenemos que $[g^n, h] = [gg^{n-1}, h] = [g, h]^{g^{n-1}}[g^{n-1}, h] = [g, h][g, h]^{n-1} = [g, h]^n$, donde la tercera igualdad se da debido a la inducción y a que $[[g, h], g] = 1$. ∎

Finalmente, a la hora de trabajar con los tamaños de clase de subgrupos normales y cocientes de un grupo, es crucial el siguiente resultado sobre su divisibilidad:

Lema 5. *Sean N un subgrupo normal de un grupo G y $x \in G$. Entonces:*

1. *$\left|x^N\right|$ divide a $\left|x^G\right|$, para todo $x \in N$.*
2. *$\left|(xN)^{G/N}\right|$ divide a $\left|x^G\right|$, para todo $x \in G$.*

Demostración. Para el punto 1 tenemos que $\left|x^N\right| = |N : \mathrm{C}_N(x)| = |N : N \cap \mathrm{C}_G(x)| = |N\,\mathrm{C}_G(x) : \mathrm{C}_G(x)|$. Pero $N\,\mathrm{C}_G(x) \leqslant G$, luego su orden divide al de G y, por tanto, el último término de la cadena de igualdades divide a $|G : \mathrm{C}_G(x)|$.

Para el punto 2, claramente tenemos que $\left|(xN)^{G/N}\right| = \left|G/N : \mathrm{C}_{G/N}(xN)\right|$ divide a $|G/N : \mathrm{C}_G(x)N/N|$, pues $\mathrm{C}_G(x)\,N/N \leqslant \mathrm{C}_{G/N}(xN) \leqslant G/N$. Además, $|G/N : \mathrm{C}_G(x)N/N| = |G : \mathrm{C}_G(x)N|$ divide a su vez a $|G : \mathrm{C}_G(x)|$, lo cual finaliza la prueba. ∎

3. Pruebas de los teoremas A, B y C

Demostración del teorema A. Comencemos con la afirmación directa. Sea P un p-subgrupo de Sylow de G. Entonces, para cada $x \in P$, tenemos por el lema 3 que $x \in \mathrm{O}_p(G)$, luego $P \leqslant \mathrm{O}_p(G)$. La otra inclusión es trivial, por lo que $P = \mathrm{O}_p(G)$. En consecuencia, $1 \trianglelefteq P \trianglelefteq G$, luego G es p'-separable y, por tanto, contiene algún p'-subgrupo de Hall H.

Tenemos que $G = PH$ con $P \trianglelefteq G$ y $P \cap H = 1$, luego basta con ver que $H \trianglelefteq G$. De nuevo, para cada $x \in P$, como $\left|x^G\right|$ no es divisible por ningún primo en p', deducimos que existe algún $g_x \in G$ tal que $H^{g_x} \leqslant \mathrm{C}_G(x)$. Como $G = PH$, tenemos que $g_x = ab$ con $a \in P$ y $b \in H$, y por tanto $H^{g_x} = H^a$, por lo que podemos asumir que $g_x \in P$. Luego $x \in P \cap \mathrm{C}_G(H^{g_x}) = \mathrm{C}_P(H^{g_x}) = \mathrm{C}_P(H)^{g_x}$, para cada $x \in P$. Consecuentemente, $P \subseteq \bigcup_{g_x \in P} \mathrm{C}_P(H)^{g_x} \subseteq P$, lo cual implica $P = \bigcup_{g_x \in P} \mathrm{C}_P(H)^{g_x}$ y, por el lema 2, tenemos que $P = \mathrm{C}_P(H)$. Por tanto, H es normal en $PH = G$ y entonces $G = P \times H$.

El recíproco es trivial pues P es el único p-subgrupo de Sylow de G y el producto de P con H es directo, luego cualquier p-elemento $x \in G$ va a cumplir que $H \leqslant \mathrm{C}_G(x) \leqslant G$. Por tanto, $\left|x^G\right|$ divide a $|G : H| = |P|$. ∎

Corolario 6 ([4, remark 3]). *Sean G un grupo finito y p un número primo divisor de $|G|$. Entonces, $\left|x^G\right|$ es una potencia de p para todo elemento $x \in G$ si y solo si G es p-descomponible con p-complemento abeliano.*

Demostración. Probaremos primero la implicación directa. Las hipótesis se cumplen en particular para todo p-elemento $x \in G$, luego podemos aplicar el teorema A y deducimos que el grupo es p-descomponible. Por tanto, tenemos que $G = P \times H$ con H un p'-subgrupo de Hall de G y P un p-subgrupo de Sylow de G. Veamos que H es abeliano: si $y \in H$, entonces por el lema 5, punto 1, tenemos que $\left|y^H\right|$ divide a $\left|y^G\right|$ (que es una potencia de p por hipótesis) y también divide trivialmente a $|H|$ (el cual es un p'-número), lo cual nos lleva a que $\left|y^H\right| = 1$ y, por tanto, $y \in \mathrm{Z}(H)$ para todo $y \in H$. El recíproco es trivial, luego queda probado el resultado. ∎

Pasamos ahora a probar el teorema B. Como veremos en su demostración, el siguiente resultado es clave. Aunque su prueba pueda parecer extensa, en su demostración solamente se usan conceptos elementales.

Lema 7 ([2, lemma 6]). *Supongamos que G es un grupo simple y no abeliano de orden par. Entonces, existe un elemento de G con tamaño de clase divisible por 4.*

Demostración. Sea $z \in G$ de orden 2, el cual existe por ser G de orden par. Tomemos $x \in G$ arbitrario y supongamos falso el resultado, luego podemos asumir que $\left|x^G\right| = |G : \mathrm{C}_G(x)|$ es impar o igual a $2n$ con n impar. En el primer caso, existe un 2-subgrupo de Sylow P de G contenido en $\mathrm{C}_G(x)$ y por tanto existe algún $g \in G$ tal que $z^g \in P \leqslant \mathrm{C}_G(x)$. Veamos ahora qué pasa en el segundo caso.

Consideremos la siguiente acción de z sobre el conjunto de las $2n$ clases laterales de $\mathrm{C}_G(x)$ en G, i.e., sobre $K := \{C = y_0C, y_1C, \dots, y_{2n-1}C\}$ con $C := \mathrm{C}_G(x)$ e y_i representantes de las clases laterales, luego $|K| = 2n$. La acción viene dada por $z \cdot (y_jC) := (zy_j)C$. Deducimos que, o bien la acción es libre de puntos fijos, o bien $z^{y_j} \in \mathrm{C}_G(x)$ para algún $0 \leq j \leq 2n-1$. Veremos que si es libre de puntos fijos llegamos a una contradicción y, por tanto, siempre existirá algún $g \in G$ tal que $z^g \in \mathrm{C}_G(x)$ o, equivalentemente, $x \in \mathrm{C}_G(z)^g$. Luego

$$G \subseteq \bigcup_{g \in G} \mathrm{C}_G(z)^g \subseteq G$$

y aplicando el lema 2 tenemos que $G = \mathrm{C}_G(z)$, lo cual implica $z \in \mathrm{Z}(G) = 1$, la contradicción final.

Observemos que la acción anterior viene asociada al homomorfismo

$$\begin{array}{rcll} \varphi\colon \langle z\rangle & \longrightarrow & \Sigma_{|K|} & \\ z & \longmapsto & \varphi_z\colon & \begin{array}{rcl} K & \longrightarrow & K \\ y_jC & \longmapsto & (zy_j)C. \end{array} \end{array}$$

Como $\mathrm{Ker}(\varphi) \trianglelefteq \langle z\rangle$ (el cual es isomorfo a un cíclico de orden 2), al ser la acción libre de puntos fijos deducimos que $\mathrm{Ker}(\varphi) = 1$ y, por tanto, $\langle z\rangle$ es isomorfo a un subgrupo de $\Sigma_{|K|}$. Consecuentemente, al ser

z un elemento de orden 2, debe ser el producto de n transposiciones. Efectivamente, pues para cualquier $1 \leq j \leq 2n-1$ tenemos que la acción consecutiva de z produce la cadena $y_jC \rightsquigarrow zy_jC \rightsquigarrow z^2y_jC = y_jC$.

Por otro lado, G también actúa sobre K de la misma manera que lo hace $\langle z\rangle$. Además, el núcleo del homomorfismo asociado es un subgrupo normal de G, que es simple. Claramente no puede coincidir con G, pues en ese caso z fijaría a K, lo cual es una contradicción. Por tanto, G también es isomorfo a un subgrupo de $\Sigma_{|K|}$. Se sigue que $G \cap A_{|K|}$ es normal en G, luego $G \cap A_{|K|} = 1$ (si coincidiese con G, entonces $z \in G \leqslant A_{|K|}$, lo cual es una contradicción pues z es producto de n transposiciones, con n impar). Esto implica que G solamente contiene una única permutación par, la trivial. Pero en este caso se deduce que, dados $a, b \in G$ no triviales con $a \neq b$ (luego a y b van a ser permutaciones impares), necesariamente $ab = 1$ pues el producto es una permutación par y en G solamente hay una. Concluimos que dos elementos cualesquiera distintos entre sí en G son inversos, luego necesariamente G es un cíclico de orden 3, contradiciendo que no es abeliano. ∎

Demostración del teorema B. Observemos primeramente que las hipótesis se heredan para subgrupos normales y cocientes de G: sea $N \trianglelefteq G$ y denotemos por $\overline{G} := G/N$. Entonces, por un lado, si $x \in N$ tenemos por el lema 5, punto 1, que $\left|x^N\right|$ divide a $\left|x^G\right|$, luego si 4 no divide a $\left|x^G\right|$ tampoco puede dividir a $\left|x^N\right|$; por otro lado, si $xN \in G/N$ arbitrario, entonces por el lema 5, punto 2, tenemos que $\left|(xN)^{G/N}\right|$ divide a $\left|x^G\right|$, luego 4 tampoco divide en este caso.

Si el orden de G es impar, entonces es resoluble por el teorema de Feit-Thompson. Por tanto, podemos asumir que $|G|$ es par y que G no es abeliano. También podemos suponer por el lema anterior que G no es simple, luego que existe $1 < N < G$ normal en G. Entonces o bien N o G/N tienen orden par (en caso contrario, G tendría orden impar). Si ambos tienen orden par, como heredan las hipótesis, por inducción sobre $|G|$ tendríamos que ambos son resolubles y, por tanto, lo sería G también. Si solamente tiene alguno orden par, aplicamos inducción y el otro grupo sería resoluble por Feit-Thompson, lo cual finaliza la prueba. ∎

Concluimos esta sección con la prueba del teorema C:

Demostración del teorema C. Empecemos por la implicación suficiente: si $|P'| = 1$, entonces P es abeliano y por tanto $\left|x^P\right| = 1$ para todo $x \in P$. Por tanto, podemos asumir que $|P'| = p$ y escoger un elemento $x \in P \smallsetminus \mathrm{Z}(P)$. Es fácil comprobar que la aplicación $\varphi\colon x^P \longrightarrow [x, P] \leqslant P'$ definida por $\varphi(x^g) := [x, g] = x^{-1}x^g$ es biyectiva. Deducimos que $\left|x^P\right| = |[x, P]|$, el cual divide a $|P'| = p$.

Veamos la implicación directa: como $|P : \mathrm{C}_P(x)| \leq p$ para todo $x \in P$, deducimos que $\Phi(P) \leqslant \mathrm{C}_P(x)$ para todo $x \in P$, donde $\Phi(P)$ denota el subgrupo de Frattini de P. Por tanto $P' \leqslant \Phi(P) \leqslant \mathrm{Z}(P)$. Entonces $P/\mathrm{Z}(P)$ es isomorfo al cociente $(P/\Phi(P))/(\mathrm{Z}(P)/\Phi(P))$, luego es elemental abeliano. Esto implica que $x\,\mathrm{Z}(P)$ tiene orden p, luego $x^p \in \mathrm{Z}(P)$ para todo $x \in P$. Aplicando el lema 4 (recordemos que $P' \leqslant \mathrm{Z}(P)$), tenemos que $[x, y]^p = [x^p, y] = 1$ para todo $x, y \in P$, por tanto P' es abeliano y tiene todo elemento de orden p, luego es elemental abeliano. Veamos finalmente que solamente tiene un generador.

Sean $1 \neq [x, z]$ y $1 \neq [x', z']$ dos generadores de P'. Sea $a \in P \smallsetminus (\mathrm{C}_P(z) \cup \mathrm{C}_P(z'))$, el cual existe por la nota 1. Además, $|P : \mathrm{C}_P(z)| = p$ necesariamente, y como $\mathrm{C}_P(z) < \mathrm{C}_P(z)\langle x\rangle \leqslant P$, deducimos que $P = \langle x\rangle\,\mathrm{C}_P(z)$. Por otro lado, como $a \in P = \langle x\rangle\,\mathrm{C}_P(z)$, tenemos que $a = x^i t$ para algún número natural i y con $t \in \mathrm{C}_P(z)$, luego

$$1 \neq [a, z] = [x^i t, z] = [x^i, z]^t [t, z] = [x^i, z] = [x, z]^i, \tag{1}$$

donde la tercera y cuarta igualdades se dan debido a que $P' \leqslant \mathrm{Z}(P)$. Por otro lado, también tenemos que $P = \mathrm{C}_P(a)\langle z\rangle$, luego $z' = z^j k$ para algún número natural j y con $k \in \mathrm{C}_P(a)$. Por tanto, tenemos que $1 \neq [a, z'] = [a, z^j k] = [a, z^j] \overset{(1)}{=} [x, z]^{i+j}$. Es más, también tenemos que $P = \langle x'\rangle\,\mathrm{C}_P(z')$, luego $a = (x')^m w$ con m un número natural y $w \in \mathrm{C}_P(z')$, con lo que $1 \neq [a, z'] = [(x')^m w, z'] = [x', z']^m$. Concluimos que $[x', z']^m = [x, z]^{i+j}$ y, por tanto, solamente hay un generador (que tiene orden p) en P', luego $|P'| \leq p$. ∎

4. El caso de los grupos factorizados

Paralelamente al estudio de la influencia de los tamaños de clase en la estructura de los grupos finitos, la investigación sobre grupos factorizados como producto de subgrupos ha ido tomando un interés creciente.

El caso en el que, además, los factores están conectados por ciertas condiciones de permutabilidad ha tenido un desarrollo notable. En esta amplia línea de investigación, quizás uno de los resultados más célebres podría ser el de Kegel y Wielandt, el cual afirma que el producto de dos grupos nilpotentes es resoluble; o también el teorema de Fitting, donde se prueba que si además los dos factores son normales, entonces el grupo también es nilpotente (en el libro de Isaacs [8, theorem 8.21] se da una prueba elemental del caso finito).

A la vista de estas dos perspectivas dentro de la Teoría de Grupos Finitos, la de los grupos factorizados y la de los tamaños de las clases de conjugación, uno se puede llegar a plantear de qué manera se podrían combinar ambas líneas. Quizás el primer artículo (hasta donde tenemos conocimiento) que realiza esta combinación podría ser el de Liu, Wang y Wei [11], donde se considera un grupo $G = AB$ factorizado como el producto de sus subgrupos (sub)normales A y B, y donde además se imponen condiciones del tipo «$\left|x^G\right|$ libre de cuadrados para todo $x \in A \cup B$». Queremos destacar la pérdida importante de información que supone este tipo de planteamientos, pues solamente se tiene información de los tamaños de clase de algunos elementos de los factores, los cuales, *a priori*, son bastantes menos que todos los del grupo. Cabe mencionar también que, por un lado, cuando se toma la factorización trivial $G = A = B$, normalmente se generalizan ciertos resultados conocidos para grupos arbitrarios no necesariamente factorizados; y por otro lado, cuando los factores son (sub)normales en el grupo, entonces las propiedades aritméticas de los tamaños de clase se heredan para los factores (ver lema 5), por lo que es más fácil dar información estructural sobre A y B. Un ejemplo sencillo de combinación de ambas técnicas podría ser el siguiente:

Teorema 8. *Sea $G = AB$ un grupo finito, el cual es producto de los subgrupos A y B. Supongamos que A es subnormal en G y que para todo $x \in A \cup B$, 4 no divide a $\left|x^G\right|$. Entonces G es resoluble.*

Demostración. Como A es subnormal en G, tenemos que $A \trianglelefteq A_1 \trianglelefteq A_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq A_n = G$ para ciertos subgrupos A_i de G, con $1 \leq i \leq n-1$. Tomemos $x \in A$ arbitrario y, por el lema 5, punto 1, se sigue que $\left|x^A\right|$ divide a $\left|x^{A_1}\right|$. Razonando de esta forma con los demás términos de la serie anterior, podemos ver que $\left|x^{A_i}\right|$ divide a $\left|x^{A_{i+1}}\right|$ para todo i, luego $\left|x^A\right|$ divide a $\left|x^G\right|$. Como para todo $x \in A \cup B$ se cumple que 4 no divide a $\left|x^G\right|$, entonces para todo $x \in A$ tampoco puede dividir a $\left|x^A\right|$. Por el teorema B concluimos que A es resoluble.

Si $A = 1$ entonces $G = B$ y es resoluble por el teorema B. Luego podemos asumir que $A \neq 1$ y por tanto $\mathrm{F}(A) \neq 1$, donde $\mathrm{F}(A)$ denota el subgrupo de Fitting de A. Además, como $\mathrm{F}(A) \leqslant \mathrm{F}(G)$ por ser A subnormal en G, tenemos que $\mathrm{F}(G) \neq 1$. Veamos que $G/\mathrm{F}(G)$ es resoluble para finalizar la prueba. Tenemos que $G/\mathrm{F}(G) = (A\,\mathrm{F}(G)/\mathrm{F}(G))(B\,\mathrm{F}(G)/\mathrm{F}(G))$ y $A\,\mathrm{F}(G)/\mathrm{F}(G)$ es subnormal en $G/\mathrm{F}(G)$ por serlo A en G. Además, si tomamos $x\,\mathrm{F}(G) \in A\,\mathrm{F}(G)/\mathrm{F}(G)$ (el mismo razonamiento es válido también para $B\,\mathrm{F}(G)/\mathrm{F}(G)$), entonces podemos suponer que $x \in A$, luego 4 no divide a $\left|x^G\right|$ y, por el lema 5, punto 2, tampoco divide a $\left|(x\,\mathrm{F}(G))^{G/\mathrm{F}(G)}\right|$. Así, $G/\mathrm{F}(G)$ hereda las hipótesis y, por inducción sobre $|G|$, es resoluble. ■

Queda claro que cuando $G = A = B$ se extiende el teorema B. También es evidente la ventaja que supone trabajar con productos de subgrupos que poseen algún factor (sub)normal, pues enseguida se pueden deducir propiedades estructurales sobre él.

Debemos destacar que no siempre es tan sencilla, o posible, una generalización a productos. Por ejemplo, Chillag y Herzog también probaron, entre otras cosas, que si un grupo finito G posee todos sus tamaños de clase libres de cuadrados, entonces $G/\mathrm{F}(G)$ es cíclico de orden libre de cuadrados [4, theorem 1]. Supongamos que queremos extender este resultado a productos de factores normales. Entonces, nos encontramos con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2. Sea $G = A \times B$ el producto directo de $A = \Sigma_3$ un grupo simétrico de 3 letras y $B = \mathrm{D}_{10}$ un grupo diédrico de orden 10. Entonces es fácil comprobar que $\left|x^G\right|$ es libre de cuadrados para todo $x \in A \cup B$, pero $\mathrm{F}(G) = \mathrm{C}_3 \times \mathrm{C}_5$ y $G/\mathrm{F}(G)$ es isomorfo a $\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$ (el cuatro grupo de Klein), el cual ni es cíclico ni tiene orden libre de cuadrados. ◂

Esta combinación de ambas perspectivas de actualidad es el tema principal al cual el autor está dedicando su tesis doctoral. Finalmente, queremos mencionar que tanto en los artículos de Felipe, Martínez Pastor y Ortiz Sotomayor [5, 6] como en el trabajo de Ortiz Sotomayor [12] se puede consultar un primer avance al respecto, bastante más profundo que el aquí presentado.

Referencias

[1] Camina, Alan Robert. «Arithmetical conditions on the conjugacy class numbers of a finite group». En: *J. London Math. Soc.* 5.2 (1972), págs. 127-132. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-5.1.127.

[2] Camina, Alan Robert y Camina, Rachel Deborah. «Implications of conjugacy class size». En: *J. Group Theory* 1.3 (1998), págs. 257-269. https://doi.org/10.1515/jgth.1998.017.

[3] Camina, Alan Robert y Camina, Rachel Deborah. «The influence of conjugacy class sizes on the structure of finite groups: a survey». En: *Asian-Eur. J. Math.* 4 (2011), págs. 559-588. https://doi.org/10.1142/S1793557111000459.

[4] Chillag, David y Herzog, Marcel. «On the length of the conjugacy classes of finite groups». En: *J. Algebra* 131 (1990), págs. 110-125. https://doi.org/10.1016/0021-8693(90)90168-N.

[5] Felipe, María José; Martínez Pastor, Ana y Ortiz Sotomayor, Víctor Manuel. «On finite groups with square-free conjugacy class sizes». En: *International Journal of Group Theory* (2017). url: http://ijgt.ui.ac.ir/article_21475.html.

[6] Felipe, María José; Martínez Pastor, Ana y Ortiz Sotomayor, Víctor Manuel. «Square-free class sizes in products of groups». En: *ArXiv e-prints* (2017). arXiv: 1703.08363 [math.GR].

[7] Huppert, Bertram. *Endliche Gruppen I*. Berlin: Springer-Verlag, 1967. https://doi.org/10.1007/978-3-642-64981-3.

[8] Isaacs, Irving Martin. *Algebra: A Graduate Course*. USA: Brooks/Cole Thompson Learning, 1994. isbn: 0-534-19002-2.

[9] Isaacs, Irving Martin. *Finite Group Theory*. USA: American Mathematical Society, 2008. isbn: 978-0-8218-4344-4. https://doi.org/10.4169/000298910x496804.

[10] Knoche, Hans Georg. «Über den Frobeniusschen Klassenbegriff in nilpotenten Gruppen». En: *Math. Z.* 55 (1951), págs. 71-83. https://doi.org/10.1007/BF01212668.

[11] Liu, Xiaolei; Wang, Yanming y Wei, Huaquan. «Notes on the length of conjugacy classes of finite groups». En: *J. Pure Appl. Algebra* 196 (2005), págs. 111-117. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2004.08.020.

[12] Ortiz Sotomayor, Víctor Manuel. *Clases de conjugación y grupos factorizados*. Trabajo Fin de Máster. Universidad Politécnica de Valencia, 2015. url: http://hdl.handle.net/10251/67883.