TEMat

Aproximación avariciosa en espacios de Banach

Pablo M. Berná
Universidad de Murcia
pmbl1991@gmail.com

Resumen: En este artículo presentamos una pequeña interacción entre teoría de aproximación y análisis funcional. Queremos estudiar ciertos tipos de convergencia del llamado algoritmo de aproximación *greedy* y, para ello, veremos qué condiciones han de cumplir las bases de los espacios de Banach con las cuales trabajamos.

Palabras clave: quasi greedy bases, greedy bases, bases incondicionales.

MSC2010: 46B15, 41A65.

Recibido: 28 de diciembre de 2016.
Aceptado: 13 de febrero de 2017.

Agradecimientos: Quiero agradecer su tiempo, apoyo y dedicación a los profesores Óscar Blasco (Universitat de València), con el cual empecé a desarrollar mi investigación durante el Trabajo de Fin de Máster, y Gustavo Garrigós (Universidad de Murcia), mi tutor actual de doctorado.

Referencia: Berná, Pablo M. «Aproximación avariciosa en espacios de Banach». En: *TEMat*, 1 (2017), págs. 69-78. ISSN: 2530-9633. URL: http://temat.anemat.com/articulo/2017-p69/.

Este trabajo se distribuye bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento 4.0 Internacional
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

1. Introducción

En este artículo vamos a tratar un problema que se remonta a Fourier [8, 9] y Taylor [12]: cómo representar una función de forma aproximada. Esta cuestión se ha vuelto muy interesante y son muchos los investigadores que han trabajado para dar solución a este problema en distintos ámbitos. El primer paso que se ha de hacer para representar una función es elegir un sistema de representación. Un sistema de representación en un espacio vectorial topológico $\mathbb{H}$ es una colección de elementos $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ de tal forma que para cualquier $f \in \mathbb{H}$ existe una sucesión de escalares $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j,$$

convergiendo en $\mathbb{H}$. Tradicionalmente, un sistema de este tipo tiene características como minimalidad, ortogonalidad, etc. Algunos de los sistemas clásicos son el sistema trigonométrico, el sistema algebraico, el sistema *wavelet*, etc. Se pueden consultar en el artículo de Korobeĭnik [11] más propiedades y ejemplos sobre sistemas de representación.

En general, podemos hablar de estructuras genéricas como un sistema biortogonal completo, pero, en esta ocasión, supondremos que estamos trabajando con una base de Schauder $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach real $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ con los funcionales biortogonales asociados $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$, donde $e_n^* \in \mathbb{X}^* \ \forall n \in \mathbb{N}$.

A modo de recordatorio, si $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach, $\mathbb{X}^*$ es el espacio dual, que se define como el conjunto de las aplicaciones lineales y continuas que van de $\mathbb{X}$ a $\mathbb{K}$ (= $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Los funcionales biortogonales $\{e_n^*\}_n$ asociados a una base $\{e_n\}_n$ son elementos del dual $\mathbb{X}^*$ tales que $e_n^*(e_n) = 1$ y $e_n^*(e_j) = 0$ con $j \neq n$. Una base de Schauder $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es aquella en la que para cada $x \in \mathbb{X}$ existe una única sucesión de coeficientes $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, con $a_n \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}$, tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

Además, podemos dar los coeficientes a_n usando los funcionales biortogonales, donde

$$e_n^*(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_n^*(e_j) = a_n.$$

Una vez que tenemos fijada la base, buscamos un algoritmo de aproximación, que no es más que una colección de aplicaciones $(T_m)_{m=1}^{\infty}$, con $T_m : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$, tal que $T_m(x)$ es una combinación lineal de m elementos. Un ejemplo clásico de este tipo de algoritmos es el algoritmo lineal de las sumas parciales $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$, donde

$$S_m\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{m} a_n e_n.$$

En este artículo vamos a presentar un algoritmo introducido por Konyagin y Temlyakov [10], el llamado algoritmo *greedy* (o algoritmo avaricioso). Para definir el algoritmo, tomamos $x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x) e_n$ y consideramos el reordenamiento

$$\sum_{n=1}^{\infty} e_{\rho(n)}^*(x) e_{\rho(n)},$$

donde ρ es el **ordenamiento *greedy* natural**, esto es, $\rho : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\operatorname{supp}(x) = \{j : e_j^*(x) \neq 0\} \subset \rho(\mathbb{N})$ y $(|e_{\rho(n)}^*(x)|)_{n=1}^{\infty}$ es no-creciente y con la condición de que si se tiene algún par de índices $i < j$ con $|e_{\rho(i)}^*(x)| = |e_{\rho(j)}^*(x)|$, entonces $\rho(i) < \rho(j)$. Esto último quiere decir que si tenemos coeficientes que en valor absoluto coinciden, entonces al aplicar ρ mantienen el orden que tenían en la serie original. Definimos entonces la suma *greedy* de orden m como

$$\mathcal{G}_m(x) := S_m\left(\sum_{n=1}^{\infty} e_{\rho(n)}^*(x) e_{\rho(n)}\right) = \sum_{n=1}^{m} e_{\rho(n)}^*(x) e_{\rho(n)}.$$

En otras palabras, la suma *greedy* de orden m está formada por m coeficientes que, en valor absoluto, son los de mayor tamaño. Esto último es lo que justifica el término «avaricioso». El algoritmo *greedy* es la colección $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$.

Ejemplo 1. Sea $x = (1, 0, -1, 1/2, 2, 0, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/1, 1/8 \ldots) \in c_0$, donde c_0 se define como $c_0 := \{x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} |x(n)| = 0\}$. Reordenando el elemento x con ρ nos quedaría así: $x_\rho = (2, 1, -1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, \ldots)$. Entonces, unos ejemplos de sumas *greedy* de distinto orden serían

$$\mathcal{G}_2(x) = 2e_5 + e_1, \quad \mathcal{G}_4(x) = 2e_5 + e_1 - e_3 + \frac{1}{2}e_4. \qquad \blacktriangleleft$$

Pues bien, una vez que tenemos definido el algoritmo podemos hacernos varias preguntas sobre la convergencia, como, por ejemplo, ¿cuándo converge el algoritmo? ¿Cuándo el algoritmo produce la mejor aproximación? Para dar respuesta a estas preguntas, vamos a estudiar qué condiciones debe satisfacer la base de Schauder con la que estamos trabajando.

2. Bases *quasi greedy*

La primera pregunta a la que vamos a dar respuesta es a cuándo el algoritmo *greedy* converge. Para ello, Konyagin y Temlyakov [10] introdujeron el término de base *quasi greedy*.

Definición 1. Diremos que $\mathcal{B}$ es una base ***quasi greedy*** si existe una constante $C \geq 1$ tal que

$$\|\mathcal{G}_m(x)\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{X}, m \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Denotamos por C_{qg} a la constante más pequeña que satisface la desigualdad (1). $\blacktriangleleft$

A priori, parece que esta definición no tiene nada que ver con la convergencia del algoritmo, pero en el año 2000 Wojtaszczyk [14] probó el siguiente teorema:

Teorema 1. *Una base $\mathcal{B}$ es* quasi greedy *si y solo si*

$$\lim_{m\to\infty} \|x - \mathcal{G}_m(x)\| = 0, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Por tanto, tenemos caracterizada la convergencia en norma del algoritmo a través de la acotación uniforme de las sumas *greedy*. Veamos un par de ejemplos:

Ejemplo 2. Sea $\mathbb{X}$ el espacio (real) de Banach formado por todas las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$\|\boldsymbol{a}\| := \sup_{M\geq 1} \left| \sum_{n=1}^{M} a_n \right| < \infty.$$

Vamos a ver que la base canónica no es *quasi greedy*, es decir, tenemos que comprobar que

$$\sup_{\boldsymbol{a},m} \frac{\|\mathcal{G}_m(\boldsymbol{a})\|}{\|\boldsymbol{a}\|} = \infty.$$

Para ello, dado $m \in \mathbb{N}$, tomamos el elemento $\boldsymbol{b} = (-1, 2 - \frac{\varepsilon}{m}, -2, 2 - \frac{\varepsilon}{m}, -2, ..., 2 - \frac{\varepsilon}{m}, -2, 0, ...)$, que tiene norma $1 + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$. Los cardinales de los conjuntos $\{j : b_j = 2 - \varepsilon/m\}$ y $\{j : b_j = -2\}$ son m. Entonces,

$$\sup_{\boldsymbol{a},m'} \frac{\|\mathcal{G}_{m'}(\boldsymbol{a})\|}{\|\boldsymbol{a}\|} \geq \frac{\|\mathcal{G}_m(\boldsymbol{b})\|}{1+\varepsilon} = \frac{\|(-2, -2, ..., -2)\|}{1+\varepsilon} = \frac{2m}{1+\varepsilon}.$$

Haciendo ahora $\varepsilon \to 0$ y $m \to \infty$, obtenemos el resultado. $\blacktriangleleft$

Ejemplo 3. La base canónica del espacio $\ell^1 \oplus c_0$, $\mathcal{B} = \{e_n\}_n$ con $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$, estando el 1 en la posición i-ésima, es *quasi greedy*. Esto es debido a que esta base es incondicional (luego veremos la relación entre estos dos conceptos). $\blacktriangleleft$

3. Bases *greedy*

En teoría de aproximación es útil saber desde un punto de vista teórico cuándo un algoritmo es eficiente, en otras palabras, cuándo el algoritmo produce una muy buena aproximación. En nuestro caso, queremos estudiar cuándo el error *greedy* de orden m, $\|x-\mathcal{G}_m(x)\|$, es comparable con el error óptimo de aproximar x usando cualquier combinación de m elementos que puede generarse con los elementos de la base, el cual es denotado por $\sigma_m(x)$. Definimos formalmente $\sigma_m(x)$ como

$$\sigma_m(x) := \inf\left\{\left\|x-\sum_{j\in A} a_j e_j\right\| : a_j \in \mathbb{R}, A\subset\mathbb{N}, |A|=m\right\}.$$

Obviamente, siempre tenemos que $\sigma_m(x) \leq \|x-\mathcal{G}_m(x)\|$ ya que la suma *greedy* de orden m es una combinación de m elementos particular. Por tanto, estamos interesados en saber cuándo $\|x-\mathcal{G}_m(x)\|$ está acotado superiormente (salvo por una constante) por $\sigma_m(x)$.

Definición 2. Decimos que $\mathcal{B}$ es una base ***greedy*** si existe una constante $C\geq 1$ tal que

$$\|x-\mathcal{G}_m(x)\| \leq C\sigma_m(x), \quad \forall x\in\mathbb{X}, m\in\mathbb{N}. \tag{2}$$

Denotamos por C_g a la constante más pequeña que satisface la desigualdad (2). ◂

Nota 1. Una relación directa es que si la base es *greedy* entonces es *quasi greedy*. Esto se da ya que $\sigma_m(x)\to 0$ cuando $m\to\infty$ en cualquier espacio de Banach, por lo que $\|x-\mathcal{G}_m(x)\|\to 0$ cuando m crece a infinito y por el teorema 1, la base es *quasi greedy*. ◂

Una lista de ejemplos de bases *greedy* es la siguiente:

1. Cualquier base ortonormal en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ es *greedy* con constante $C_g=1$, es decir,
$$\|x-\mathcal{G}_m(x)\| = \sigma_m(x), \forall x\in\mathbb{H}, \forall m\in\mathbb{N}.$$
2. La base canónica $\mathcal{B}=\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $e_i=(0,...,0,1,0,...)$ con el 1 en la posición i-ésima, es *greedy* en el espacio ℓ^p, $1\leq p<\infty$, con constante $C_g=1$.
3. El sistema de Haar es una base *greedy* en los espacios $L_p([0,1])$ con $1<p<\infty$. Este resultado fue probado por Temlyakov [13].

Ahora bien, si queremos saber si una base es o no *greedy* por definición es algo complicado. Por ello, Konyagin y Temlyakov dieron una caracterización basada en dos nociones: bases incondicionales y democráticas.

Tradicionalmente, la definición clásica de base incondicional es aquella en la que cualquier reordenada de la serie que define cualquier elemento del espacio es convergente. En este caso, vamos a usar una definición equivalente que involucra al operador proyección P_A.

Definición 3. Una base $\mathcal{B}$ es ***suppression unconditional*** (o **incondicional de tipo supresivo**) si existe una constante $K\geq 1$ tal que

$$\|P_A(x)\| \leq K\|x\|, \forall x\in\mathbb{X}, \forall A\subset\mathbb{N}, \tag{3}$$

donde $P_A(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n)=\sum_{n\in A} a_n e_n$.

Denotamos por K_s a la constante más pequeña que satisface la desigualdad (3). ◂

Nota 2. La equivalencia entre base incondicional de tipo supresivo y base incondicional puede encontrarse en el trabajo de Facenda Aguirre [7]. ◂

Nota 3. Cuando la base no es incondicional de tipo supresivo diremos que la base es condicional. ◂

Nota 4. Las sumas *greedy* son en realidad unas proyecciones sobre unos conjuntos particulares, es decir, $\mathcal{G}_m(x)=P_B(x)$, con $|B|=m$ y $B=\{\rho(1),...,\rho(m)\}$. Por tanto, si $\mathcal{B}$ es incondicional de tipo supresivo, es decir, $\|P_A(x)\|\leq C\|x\|$ para todo $x\in\mathbb{X}$ y $A\subset\mathbb{N}$, entonces la base es *quasi greedy*. Luego, en el ejemplo 3, la base canónica en el espacio $\ell^1\oplus c_0$ es *quasi greedy* ya que la base es incondicional de tipo supresivo. ◂

Definición 4. Decimos que una base $\mathcal{B}$ es **democrática** si para todo par de conjuntos finitos A y B de mismo cardinal, existe una constante $C \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{C}\|\mathbf{1}_B\| \leq \|\mathbf{1}_A\| \leq C\|\mathbf{1}_B\|, \tag{4}$$

donde $\mathbf{1}_S = \sum_{n\in S} e_n$.

Denotamos por C_d la constante más pequeña que satisface la desigualdad (4). ◂

Con estas dos nociones, Konyagin y Temlyakov [10] probaron el siguiente teorema:

Teorema 2. *Una base $\mathcal{B}$ es* greedy *si y solo si $\mathcal{B}$ es incondicional de tipo supresivo y democrática. Además, si $\mathcal{B}$ es* greedy *con constante C_g, entonces $\mathcal{B}$ es incondicional de tipo supresivo y democrática con constantes $K_s \leq C_g$ y $C_d \leq C_g$. Recíprocamente, si $\mathcal{B}$ es incondicional de tipo supresivo y democrática con constantes K_s y C_d, respectivamente, entonces $\mathcal{B}$ es* greedy *con constante $C_g \leq K_s + K_s^3 C_d$.*

Demostración. En esta prueba vamos a ver solo que si $\mathcal{B}$ es *greedy*, entonces $\mathcal{B}$ es democrática e incondicional de tipo supresivo. La prueba completa se encuentra en el artículo de Konyagin y Temlyakov [10]. Supongamos pues que la base $\mathcal{B}$ es *greedy*.

- Para ver que es democrática, tomamos dos conjuntos arbitrarios A y B de mismo cardinal, y definimos el vector $x = (1+\varepsilon)\mathbf{1}_{B\setminus A} + \mathbf{1}_A$, con $\varepsilon > 0$. Entonces, si denotamos por $m = |A \setminus B| = |B \setminus A|$, se tiene que $\mathcal{G}_m(x) = (1+\varepsilon)\mathbf{1}_{B\setminus A}$, y usando que la base es *greedy* se obtiene que
$$\|\mathbf{1}_A\| = \|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C_g\sigma_m(x) \leq C_g\|x - 1_{A\setminus B}\| \leq C_g\|\mathbf{1}_B\| + C_g\varepsilon\|\mathbf{1}_{B\setminus A}\|.$$
Haciendo tender ε a 0, obtenemos que la base es democrática con constante $C_d \leq C_g$.
- Para ver que es incondicional de tipo supresivo, cogemos un elemento $x \in \mathbb{X}$ de soporte B finito, un conjunto $A \subset B$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ que satisface la condición
$$\alpha > \sup_{n\in A}|e_n^*(x)| + \sup_{n\in B\setminus A}|e_n^*(x)|.$$
Ahora, definimos el elemento $y = x + \alpha\mathbf{1}_{B\setminus A} = \sum_{n\in B\setminus A}(\alpha + e_n^*(x)) + P_A(x)$. Gracias a la condición que imponemos a α, se puede afirmar que $\mathcal{G}_m(y) = \sum_{n\in B\setminus A}(\alpha + e_n^*(x))$, con $m = |B \setminus A|$, y por tanto, usando que la base es *greedy* obtenemos que
$$\|P_A(x)\| = \|y - \mathcal{G}_m(y)\| \leq C_g\sigma_m(y) \leq C_g\|y - \alpha\mathbf{1}_{B\setminus A}\| = C_g\|x\|.$$
Usando ahora un argumento sencillo de densidad, se deduce que $\|P_A(x)\| \leq C_g\|x\|$, para todo elemento $x \in \mathbb{X}$ y todo conjunto $A \subset \mathbb{N}$, luego $\mathcal{B}$ es incondicional de tipo supresivo con constante $K_s \leq C_g$. ■

Veamos un ejemplo sencillo de base democrática e incondicional de tipo supresivo (y por tanto *greedy*).

Ejemplo 4. Sean $\mathbb{X} = \ell^p$ con $1 \leq p < \infty$ y $\mathcal{B} = \{e_n\}_n$ la base canónica. Sean $A \subset \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{X}$. Entonces,

$$\|P_A(x)\|_p = \left(\sum_{n\in A}|e_n^*(x)|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|e_n^*(x)|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p.$$

Por lo tanto, la base es incondicional de tipo supresivo con constante $K_s = 1$. Veamos que la base es democrática. Sean $A, B \subset \mathbb{N}$ de cardinal m, entonces

$$\left\|\sum_{n\in A} e_n\right\|_p = \left(\sum_{n\in A} 1\right)^{1/p} = m^{1/p} = \left(\sum_{n\in B} 1\right)^{1/p} = \left\|\sum_{n\in B} e_n\right\|_p,$$

por lo que la base es democrática con constante $C_d = 1$. Usando el teorema 2, la base es *greedy*. ◂

En general, *quasi greedy* no implica que la base sea incondicional de tipo supresivo (ver el ejemplo 6 de la sección 5), aunque, recientemente, Albiac y Ansorena [1] han probado el siguiente teorema:

Teorema 3. *Una base $\mathcal{B}$ es incondicional de tipo supresivo con $K_s = 1$ si y solo si $\mathcal{B}$ es* quasi greedy *con constante $C_{qg} = 1$, es decir,*

$$\|P_A(x)\| \leq \|x\|, \forall x \in \mathbb{X}, \forall A \subset \mathbb{N} \iff \|\mathcal{G}_m(x)\| \leq \|x\|, \ \forall x \in \mathbb{X}, \forall m \in \mathbb{N}.$$

4. El problema de la constante 1

Desde el punto de vista de la teoría de aproximación, cuando una base es *greedy*, es decir, que para todo elemento $x \in \mathbb{X}$ y todo natural m,

$$\sigma_m(x) \leq \|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C_g \sigma_m(x),$$

se dice que el algoritmo produce la «casi» mejor aproximación. Decimos «casi» debido a que tenemos una constante C_g en la definición. En el caso de que $C_g = 1$, se dice que el algoritmo produce la mejor aproximación ya que tendríamos la igualdad $\|x - \mathcal{G}_m(x)\| = \sigma_m(x)$. La pregunta es «¿cuándo se consigue la constante $C_g = 1$?».

Gracias al teorema de caracterización de las bases *greedy* de Konyagin y Temlyakov, si tenemos que la base es *greedy* con $C_g = 1$, entonces tenemos que la base es democrática e incondicional con constantes $K_s = C_d = 1$, lo cual hace que la situación sea perfecta. En cambio, en el recíproco solo se puede afirmar que si la base es democrática e incondicional con constantes $C_d = K_s = 1$, entonces la base es *greedy* con constante $C_g \leq 2$. Por lo que ¿cómo se puede recuperar que $C_g = 1$? Pues bien, esta respuesta fue dada por Albiac y Wojtaszczyk [3] en 2006.

Para dar solución a esta cuestión, estos dos autores introdujeron la llamada propiedad (A). La definición formal de esta propiedad es la siguiente: definimos $M(x)$ como el conjunto de índices asociados a los coeficientes de x de mayor tamaño en valor absoluto y $\sqcap_G$ el conjunto de permutaciones que mueven los coeficientes $e_j^*(x)$ con $j \in M(x)$ a posiciones donde tenemos ceros, es decir, las permutaciones mueven esos coeficientes fuera del soporte de x. Entonces, decimos que $\mathcal{B}$ satisface la **propiedad (A)** si

$$\|x\| = \left\| \sum_{n \in \operatorname{supp}(x)} \varepsilon_{\pi(n)} e_n^*(x) e_{\pi(n)} \right\|$$

para toda permutación $\pi \in \sqcap_G$ y signos ε_k tales que $\varepsilon_{\pi(n)} = 1$ si $\pi(n) = n$ y $\varepsilon_{\pi(n)} = \pm 1$ si $\pi(n) \neq n$.

Nota 5. Los coeficientes $e_j^*(x)$ con $j \notin M(x)$ quedan en la misma posición. Además, en el caso en el que el $\operatorname{supp}(x)$ sea $\mathbb{N}$, la única permutación posible es la identidad. ◂

Ejemplo 5. Un ejemplo de permutación y cambio de signo sería el siguiente: supongamos que tenemos un elemento x en un espacio de Banach de tal forma que su sucesión de coeficientes es $(3, 3, 3, 0, -1, 0, 0, 2, \ldots.)$. En este caso, $M(x) = \{1, 2, 3\}$, escogemos la permutación π de la forma $\pi(1) = 1, \pi(2) = 4, \pi(3) = 6$ y el cambio de signo ε de la forma $\varepsilon_{\pi(2)} = -1$ y $\varepsilon_{\pi(3)} = 1$. Con lo cual, obtenemos el siguiente vector: $(3, 0, 0, -3, -1, 3, 0, 2, \ldots)$. ◂

Usando pues esta nueva propiedad, Albiac y Wojtaszczyk [3] probaron el siguiente teorema:

Teorema 4. *Una base es* greedy *con constante $C_g = 1$ si y solo si la base es incondicional de tipo supresivo con constante $K_s = 1$ y satisface la propiedad (A).*

Vemos entonces que para poder tener la mejor aproximación es necesario reemplazar la propiedad de democracia por esta propiedad más general. Posteriormente, en el año 2014, Dilworth *et al.* [6] reformularon la propiedad (A) de una forma diferente para dar un teorema con constantes generales. La idea de reformular la propiedad (A) es que, de una cierta forma, esa propiedad involucra una cierta simetría.

Definición 5. Decimos que una base $\mathcal{B}$ es **simétrica para coeficientes grandes** si existe una constante $C \geq 1$ tal que

$$\left\| x + t \sum_{n \in A} \varepsilon_n e_n \right\| \leq C \left\| x + t \sum_{n \in B} \varepsilon'_n e_n \right\| \tag{5}$$

para todo $x \in \mathbb{X}$ y todo par de conjuntos A y B tales que $|A| = |B| < \infty$, $A \cap B = \varnothing$, $\operatorname{supp}(x) \cap (A \cup B) = \varnothing$ y para cualesquiera colecciones de signos $\varepsilon_n, \varepsilon'_n \in \{\pm 1\}$ y $t = \sup_{n \in \operatorname{supp}(x)} |e_n^*(x)|$. ◂

Denotamos por C_a a la constante más pequeña que satisface la desigualdad (5).

Nota 6. Cuando $C_a = 1$ recuperamos la definición de Albiac y Wojtaszczyk. ◂

Nota 7. Si $\mathcal{B}$ es simétrica para coeficientes grandes, entonces es democrática. Esto es sencillo de probar: sean C y D dos conjuntos arbitrarios de mismo cardinal. Tomando en (5) $x = \mathbf{1}_{C\cap D}$, $A = C \setminus D$, $B = D \setminus C$ y signos $\varepsilon_k = \varepsilon'_k = 1$, obtenemos el resultado. ◂

Gracias a esta reformulación, Dilworth *et al.* [6] probaron el siguiente teorema:

Teorema 5. *Si $\mathcal{B}$ es base* greedy *con constante C_g, entonces es incondicional de tipo supresivo con constante $K_s \leq C_g$ y simétrica para coeficientes grandes con constante $C_a \leq C_g$. Recíprocamente, si la base $\mathcal{B}$ es incondicional de tipo supresivo con constante K_s y simétrica para coeficientes grandes con constante C_a, entonces la base es* greedy *con constante $C_g \leq K_s^2 C_a$.*

Nota 8. Este teorema nos permite recuperar la constante 1 de la base *greedy*, ya que si tenemos que $K_s = C_a = 1$, entonces $1 \leq C_g \leq 1^2 \cdot 1 = 1$. ◂

5. Bases *almost greedy*

Hasta ahora hemos introducido las nociones de base *greedy* y *quasi greedy*. Si comparamos estas bases desde el punto de vista de la teoría de aproximación, se podría decir que son puntos extremos, es decir, en las bases *quasi greedy* solo sabemos que el algoritmo converge, pero en las bases *greedy* el algoritmo no solo converge, sino que produce la «casi» mejor aproximación. ¿Existirá un punto intermedio entre ambas bases? La respuesta es «sí».

En este caso, vamos estudiar cuando $\|x - \mathcal{G}_m(x)\|$ es comparable al error óptimo de aproximación usando proyecciones. Este error es denotado por $\tilde{\sigma}_m(x)$, donde

$$\tilde{\sigma}_m(x) := \text{ínf}\{\|x - P_A(x)\| : |A| = m\}.$$

Dado que la suma *greedy* es una proyección, como hemos comentado en la sección 3 (ver nota 4), siempre se tiene que $\tilde{\sigma}_m(x) \leq \|x - \mathcal{G}_m(x)\|$. Por ello, al igual que pasaba en las bases *greedy*, queremos averiguar cuándo $\|x - \mathcal{G}_m(x)\|$ está acotado superiormente por $\tilde{\sigma}_m(x)$.

Definición 6. Decimos que $\mathcal{B}$ es una base ***almost greedy*** si existe una constante $C \geq 1$ tal que

$$\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\tilde{\sigma}_m(x), \forall x \in \mathbb{X}, \forall m \in \mathbb{N}.$$ ◂

Nota 9. Si la base es *greedy* entonces la base es *almost greedy*. Esta implicación es trivial porque $\sigma_m(x) \leq \tilde{\sigma}_m(x)$. ◂

Ahora bien, saber por definición si una base es o no *almost greedy* no es tarea fácil. Por ello, en el año 2003, Dilworth *et al.* [5] probaron el siguiente teorema:

Teorema 6. *Una base $\mathcal{B}$ es* almost greedy *si y solo si $\mathcal{B}$ es democrática y* quasi greedy.

Ejemplo 6. Veamos un ejemplo de una base que es *almost greedy* pero no es *greedy*. En el espacio $c_{00} := \{x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x(n) = 0 \text{ si } n > n_0 \text{ para cierto } n_0 \in \mathbb{N}\}$, definimos la siguiente norma de una sucesión:

$$\|(a_n)_n\| := \text{máx}\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}, \sup_N \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\sqrt{n}}\right|\right\}.$$

Tomamos ahora el espacio de Banach $\mathbb{X}$ que surge de completar c_{00} en c_0 bajo esta norma. Entonces, en este espacio, la base canónica es una base *quasi greedy* y condicional (ver [2, pág. 287]). Veamos que es democrática: sea A un conjunto de cardinal m. Entonces

$$\left(\sum_{n\in A} 1\right)^{1/2} = m^{1/2},$$

mientras que

$$\sum_{n\in A}\frac{1}{\sqrt{n}}\leq\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{n}}\leq\int_0^m\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2m^{1/2}.$$

Por tanto,

$$m^{1/2}\leq\|\mathbf{1}_A\|\leq 2m^{1/2},$$

lo cual implica que la base es democrática con constante $C_d\leq 2$. Usando entonces el teorema 6, la base canónica en este espacio es *almost greedy* y, usando el teorema 2, no es *greedy* debido a que la base es condicional. ◂

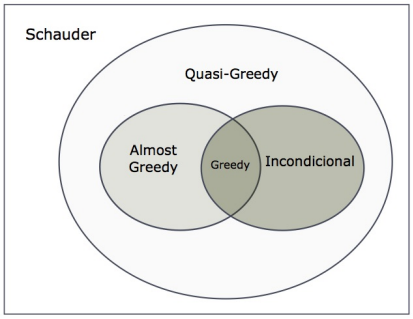

Figura 1: Las relaciones existentes entre las distintas clases de bases que se han visto a lo largo del artículo.

6. Una nueva caracterización de las bases *greedy*

En esta sección vamos a ver una nueva caracterización de las bases *greedy* usando un nuevo funcional. Este funcional es el error óptimo de aproximar $x\in\mathbb{X}$ usando polinomios de coeficientes constantes. Dicho funcional, el cual es denotado por $\mathcal{D}_m^*(x)$, es definido como

$$\mathcal{D}_m^*(x):=\text{ínf}\left\{\left\|x-\sum_{n\in A}\alpha\varepsilon_n e_n\right\|:\alpha\in\mathbb{R},A\subset\mathbb{N},|A|=m,\varepsilon_n\in\{\pm1\}\right\}.$$

Obviamente, tenemos que $\sigma_m(x)\leq\mathcal{D}_m^*(x)$ para todo elemento del espacio x y todo natural m. La motivación del uso de este funcional reside justamente en la prueba de la implicación que hemos hecho del teorema 2: para poder demostrar la democracia y la incondicionalidad hubiese bastado usar este nuevo funcional en vez de $\sigma_m(x)$, es decir, si tuviéramos una base en la cual se cumpla que

$$\|x-\mathcal{G}_m(x)\|\leq C\mathcal{D}_m^*(x),\forall x\in\mathbb{X},\forall m\in N,$$

entonces la base sería democrática e incondicional de tipo supresivo. En el artículo de Blasco y Berná [4] podemos encontrar la demostración del siguiente teorema:

Teorema 7. *Sea $\mathcal{B}$ una base de un espacio de Banach $\mathbb{X}$. Son equivalentes:*

- *$\mathcal{B}$ es* greedy*, es decir, existe una constante $C_1\geq 1$ tal que*

$$\|x-\mathcal{G}_m(x)\|\leq C_1\sigma_m(x),\quad\forall x\in\mathbb{X},m\in\mathbb{N}.$$

- *Existe una constante $C_2\geq 1$ tal que*

$$\|x-\mathcal{G}_m(x)\|\leq C_2\mathcal{D}_m^*(x),\quad\forall x\in\mathbb{X},m\in\mathbb{N}.$$

- *$\mathcal{B}$ es incondicional de tipo supresivo y simétrica para coeficientes grandes.*
- *$\mathcal{B}$ es incondicional de tipo supresivo y democrática.*

Por tanto, este teorema nos dice que se pueden caracterizar las bases *greedy* usando el funcional $\mathcal{D}_m^*(x)$, y esto es llamativo ya que, *a priori*, el funcional $\mathcal{D}_m^*(x)$ es más fácil de manejar que el funcional $\sigma_m(x)$ ya que solo involucra una constante en la definición y, además, este funcional y $\sigma_m(x)$ tienen comportamiento totalmente opuesto, al menos en espacios de Hilbert, tal y como mostramos en este teorema (el cual está probado por Blasco y Berná [4]):

Teorema 8. *Sean* $\mathbb{H}$ *un espacio de Hilbert y* $\mathcal{B}$ *una base ortonormal. Entonces,*

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{D}_m^*(x) = \|x\|, \ \forall x \in \mathbb{H}.$$

El comportamiento opuesto de este nuevo funcional y $\sigma_m(x)$ se deduce de la nota 1.

Para demostrar este último teorema, se hace uso de la siguiente fórmula que puede encontrarse en el artículo de Blasco y Berná [4]:

Proposición 9. *Sean* $\mathbb{H}$ *un espacio de Hilbert y* $\mathcal{B}$ *una base ortonormal. Entonces,*

$$\mathcal{D}_m^*(x) = \sqrt{\|x\|^2 - \frac{1}{m}\sup\{\langle x, 1_{\varepsilon A}\rangle^2 : |A| = m, \{\varepsilon_n\}_n \in \{\pm 1\}\}},$$

donde $\mathbf{1}_{\varepsilon A} = \sum_{n\in A} \varepsilon_n e_n$.

Por otro lado, a la vista del teorema 8, es natural que nos preguntemos si esa propiedad del límite se mantiene en cualquier espacio de Banach, pero, desgraciadamente, no se tiene respuesta actualmente, es un problema abierto. Solo se dispone del siguiente resultado parcial que se puede encontrar en el artículo de Blasco y Berná [4]:

Proposición 10. *Sean* $\mathbb{X} = \ell^p$, $1 < p < \infty$, $\mathcal{B} = (e_n)_n$ *la base canónica y* $B \subset \mathbb{N}$ *de cardinal* N. *Entonces,*

$$\mathcal{D}_m^*(\mathbf{1}_B) = \begin{cases} (N-m)^{1/p} & \text{si } m \le N, \\ N^{1/p}\left(1 + \left(\frac{m}{N} - 1\right)^{-1/(p-1)}\right)^{-1/p'} & \text{si } m \ge N, \end{cases}$$

donde $p' = \frac{p}{p-1}$. *Por tanto,* $\lim_{m\to\infty} \mathcal{D}_m^*(\mathbf{1}_B) = \|\mathbf{1}_B\|$.

Nota 10. En la proposición anterior, si $p = 1$ también se obtiene el mismo resultado, pero tenemos una expresión distinta para el funcional $\mathcal{D}_m^*(\mathbf{1}_B)$:

$$\mathcal{D}_m^*(\mathbf{1}_B) = \begin{cases} N - m & \text{si } m \le N, \\ m - N & \text{si } N \le m \le 2N, \\ N & \text{si } m \ge 2N. \end{cases}$$

Referencias

[1] Albiac, Fernando y Ansorena, José Luis. «Characterization of 1-quasi-greedy bases». En: *Journal of Approximation Theory* 201 (2016), págs. 7-12. https://doi.org/10.1016/j.jat.2015.08.006.

[2] Albiac, Fernando y Kalton, Nigel. *Topics in Banach Space Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Second Edittion, Springer New York, 2016. isbn: 978-3-319-31557-7. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31557-7.

[3] Albiac, Fernando y Wojtaszczyk, Przemysław. «Characterization of 1-greedy bases». En: *Journal of Approximation Theory* 138 (2006), págs. 65-86. https://doi.org/10.1016/j.jat.2005.09.017.

[4] Blasco, Óscar y Berná, Pablo M. «Characterization of greedy bases in Banach spaces». En: *Journal of Approximation Theory* 215 (2017), págs. 28-39. https://doi.org/10.1016/j.jat.2016.11.008.

[5] Dilworth, Stephen; Kalton, Nigel; Kutzarova, Denka y Temlyakov, Vladimir N. «The thresholding greedy algorithm, greedy bases, and duality». En: *Constructive approximation* 19 (2003), págs. 575-597. https://doi.org/10.1007/s00365-002-0525-y.

[6] Dilworth, Stephen; Kutzarova, Denka; Odell, Edward; Schlumprecht, Thomas y Zsák, Andras. «Renorming spaces with greedy bases». En: *Journal of Approximation Theory* 188 (2014), págs. 39-56. https://doi.org/10.1016/j.jat.2014.09.001.

[7] Facenda Aguirre, José A. *Geometría de Espacios de Banach*. Universidad de Sevilla, Secretariado de Publicaciones, 1998.

[8] Fourier, Joseph. *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*. 1807.

[9] Fourier, Joseph. *Théorie analytique de la chaleur*. 1822. https://doi.org/10.1017/CBO9780511693229.

[10] Konyagin, Sergey V. y Temlyakov, Vladimir N. «A remark on greedy approximation in Banach spaces». En: *East J. Approx* 5 (1999), págs. 365-379.

[11] Korobeĭnik, Yurii F. «On absolutely representing systems in spaces of infinitely differentiable functions». En: *Studia Mathematica* 139.2 (2000), págs. 175-188.

[12] Taylor, Brook. *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*. 1715. https://doi.org/10.3931/e-rara-4090.

[13] Temlyakov, Vladimir N. «The best m-term approximation and greedy algorithms». En: *Advances in Computational Mathematics* 8 (1998), págs. 249-265. https://doi.org/10.1023/A:1018900431309.

[14] Wojtaszczyk, Przemysław. «Greedy algorithm for general biorthogonal systems». En: *Journal of Approximation Theory* 107.2 (2000), págs. 293-314. https://doi.org/10.1006/jath.2000.3512.