TEMat

Puntos en figuras convexas: el caso del hexágono regular

Manuel Mellado Cuerno
Universidad Autónoma de Madrid (UAM)
manuel.mellado@estudiante.uam.es

Resumen: Para una figura plana, acotada y con borde F se define el número o función de Soifer de F, $S(F)$, como el mínimo entero m tal que dados m puntos cualesquiera de F al menos tres de ellos forman un triángulo de área menor o igual que un cuarto del área de F.

Cuando F es convexa, la función $S(F)$ solo puede tomar los valores 5 o 6. En este artículo se demuestra que $4 \leq S(F) \leq 6$. Las limitaciones de espacio nos impiden incluir la demostración de que $S(F) \neq 4$, que el lector puede ver en las referencias citadas. Como aportación original, se prueba que si H es un hexágono regular, $S(H) = 5$.

Abstract: For any figure F in a plane, bounded and including its border, we define the Soifer's function or Soifer's number of F, $S(F)$, as the minimum integer m such that given any m points of F at least three of them form a triangle with area less than or equal to a quarter of the area of F.

When F is convex, $S(F)$ can take only the values 5 or 6. In this article, we prove that $4 \leq S(F) \leq 6$. The proof that $S(F) \neq 4$ is omitted for brevity, but can be found in the references. As an original result, we prove that $S(H) = 5$ when H is a regular hexagon.

Palabras clave: figuras convexas, geometría descriptiva, triángulos.

MSC2010: 52A10, 97G80.

Recibido: 1 de agosto de 2017.
Aceptado: 13 de febrero de 2018.

Agradecimientos: Quería agradecer todo su trabajo, dedicación y apoyo al profesor Eugenio Hernández, sin el cual la idea de este artículo no habría salido a la luz. Gracias por su paciencia y ganas de ir a más cuando quedarse en lo cercano era lo fácil. Gracias Inés.

Referencia: Mellado Cuerno, Manuel. «Puntos en figuras convexas: el caso del hexágono regular». En: *TEMat*, 2 (2018), págs. 31-44. ISSN: 2530-9633. URL: https://temat.es/articulo/2018-p31/.

1. Introducción

En esta sección introduciremos los conceptos necesarios para entender este artículo y expondremos una herramienta básica que se usará a lo largo de todo el trabajo.

Notación. Entendemos por figura plana y acotada F una región del plano limitada por una curva cerrada y continua. Consideramos el borde como dicha curva cerrada.

Para una figura plana y acotada F, denotamos por $|F|$ su área. Todas las figuras en este trabajo incluirán su borde.

Una figura plana F es **convexa** si, dados dos puntos cualesquiera de F, el segmento que los une está incluido en F. ◂

Definición 1. Dada una figura plana y acotada F, el **número de Soifer** de F, $S(F)$, es el mínimo entero m tal que dados m puntos cualesquiera de F al menos tres de ellos forman un triángulo de área menor o igual que $|F|/4$. ◂

Lema 1. *$S(F)$ existe para cualquier figura plana y acotada F.*

Demostración. Como F es acotada existe un cuadrado L que contiene a toda la figura. Podemos dividir L en m rectángulos, cada uno de ellos de área menor o igual que $|F|/4$.

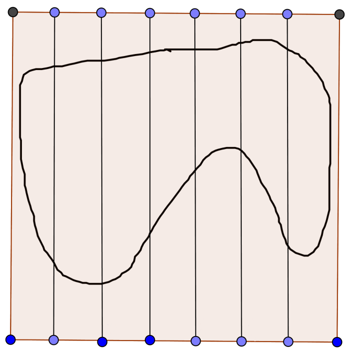

Figura 1: Figura plana y acotada dividida en m rectángulos.

Dados $2m + 1$ puntos de F, por el principio del palomar, uno de los rectángulos contendrá al menos tres puntos. El área del triángulo formado por estos tres puntos es menor o igual que $|F|/4$. Por lo tanto, sabemos que hay un número de puntos $2m + 1$ que cumplen lo requerido. Usando que todo subconjunto no vacío de números naturales contiene un elemento minimal, podemos asegurar que existe un entero positivo n_1 que nos da el mínimo de $S(F)$. ■

El siguiente lema se usa con bastante frecuencia en las demostraciones que vamos a presentar, por lo que hemos creído conveniente ponerlo al inicio y lo presentamos a continuación:

Lema 2. *El área máxima de un triángulo contenido en un paralelogramo de área $|P|$ es $|P|/2$.*

Demostración. Sea T un triángulo cualquiera ABC contenido en P (por ejemplo, como en el paralelogramo 1 de la figura 2). Trazamos una recta paralela a AB por el vértice del paralelogramo más alejado de este segmento (C' en el paralelogramo 2 de la figura 2). El triángulo T' de vértices ABC' satisface que $|T'| \geq |T|$ por tener mayor o igual altura que el triángulo T y la misma base. Siguiendo este proceso con el resto de lados del triángulo T' se obtienen los triángulos T'' (como en el paralelogramo 3 de la figura 2) y T''' (como en el paralelogramo 4 de la figura 2) tales que $|T'''| \geq |T''| \geq |T'| \geq |T|$. El triángulo T''' tiene como vértices tres de los vértices del paralelogramo y satisface $|T'''| = \frac{|P|}{2}$. Por tanto, $|T| \leq \frac{|P|}{2}$. ■

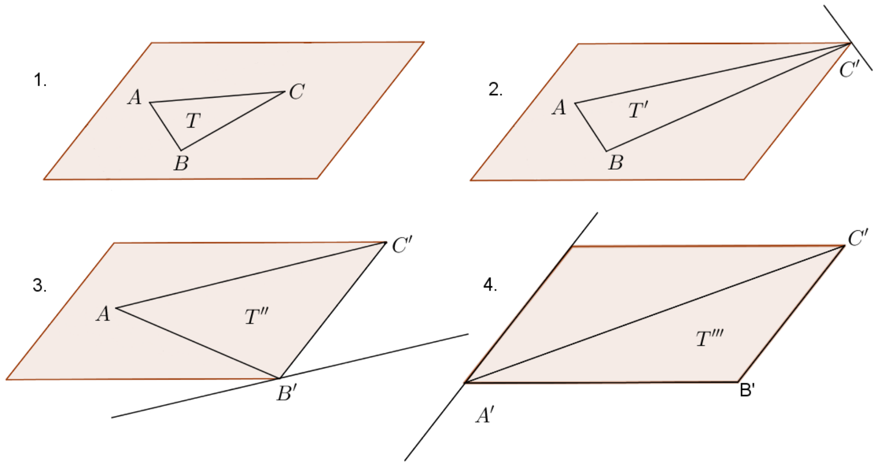

Figura 2: Proceso por el cual se obtiene el triángulo de mayor área de un paralelogramo.

Veamos un ejemplo de lo útil que es este lema:

Proposición 3. *Para un paralelogramo P se tiene que*

$$S(P) = 5.$$

Demostración. Si tomamos los cuatro vértices del paralelogramo, tres cualesquiera de ellos forman un triángulo de área $\frac{|P|}{2} > \frac{|P|}{4}$. Por tanto, $S(P) > 4$.

Para probar que $S(P) = 5$, tomemos los puntos medios de dos lados paralelos del paralelogramo y tracemos el segmento que los une. Ahora tenemos dos mitades de área $|P|/2$ cada una.

Por el principio del palomar, tres de los cinco puntos van a ir a parar a una de las dos mitades y, por el lema 2, el triángulo que formen esos tres puntos tendrá área menor o igual que $|P|/4$. ■

En la sección 2 se muestra que si T es un triángulo, $S(T) = 5$. La sección 3 se dedica a probar que $S(F) \leq 6$ para cualquier figura plana, acotada y convexa. En la sección 4 se demuestra que $S(F) \geq 4$. En la sección 5 se prueba que $S(F) = 6$ para un pentágono regular. Como aportación original, se prueba en la sección 6 que $S(H) = 5$ para un hexágono regular. Para finalizar, se enuncia un problema abierto en esta área.

2. El caso del triángulo

Proposición 4. *Para un triángulo T se tiene que*

$$S(T) > 4.$$

Demostración. Es suficiente ver que los tres vértices del triángulo y el centro de masas (la intersección de las medianas) cumplen lo que buscamos.

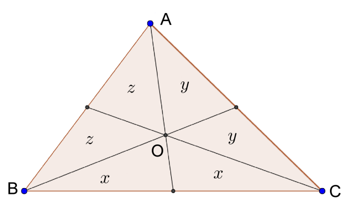

Figura 3: Triángulo dividido por sus tres medianas.

Consideremos los seis triángulos formados al trazar las tres medianas del triángulo ABC. De estos, los triángulos marcados con la misma letra en la figura 3 tienen igual área por tener base de igual longitud y la misma altura. Denotaremos el área de cada triángulo con el mismo nombre que este. Como cada mediana divide un lado del triángulo en dos mitades iguales, tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} x + x + y = y + z + z &\Rightarrow z = x, \\ z + z + x = x + y + y &\Rightarrow y = z, \\ x + x + z = z + y + y &\Rightarrow y = x. \end{aligned}$$

Por tanto, $x = y = z = \frac{|T|}{6}$. Entonces, el área del menor triángulo formado por tres de los cuatro puntos es $\frac{|T|}{3} > \frac{|T|}{4}$. ■

Proposición 5. *Para un triángulo T se tiene que*

$$S(T) = 5.$$

Demostración. Vamos a hacer una demostración por reducción al absurdo. En primer lugar, sin pérdida de generalidad, tomaremos $|T| = 1$. Supongamos que todo triángulo de los diez posibles que se pueden formar con los cinco puntos ($\binom{5}{3}$ triángulos) tuviera área mayor que $1/4$. Veamos dónde habría que colocar esos cinco puntos.

Se divide el triángulo en cuatro triángulos iguales uniendo los puntos medios de los lados del triángulo original, como se muestra en la parte a) de la figura 4:

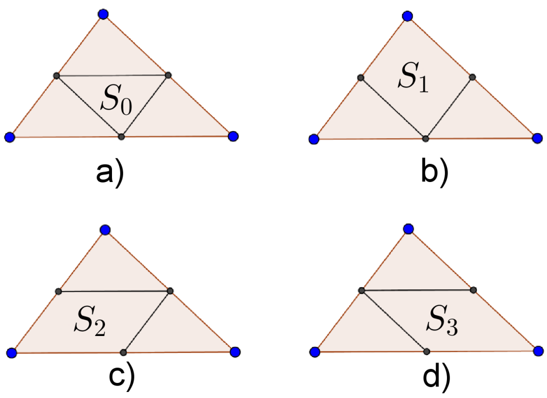

Figura 4: División del triángulo en las porciones S_0, S_1, S_2 y S_3.

Denotemos por S_0 el triángulo central en esta partición y por S_1, S_2 y S_3 los paralelogramos que se muestran en las figuras 4b), 4c) y 4d) formados por la unión de S_0 y uno de los otros tres triángulos considerados en la figura 4a). Denotaremos por $m(S_i)$ al número de puntos contenidos en la sección S_i. Se tiene que

$$\begin{aligned} m(S_1) &\leq 2, \\ m(S_2) &\leq 2, \\ m(S_3) &\leq 2, \end{aligned}$$

ya que si $m(S_i) \geq 3$ para algún $i \in \{1, 2, 3\}$ entonces, por el lema 2, el paralelogramo S_i contendrá un triángulo formado por tres puntos con área menor o igual que $1/4$.

Supongamos que cogemos los triángulos b), c) y d) de la figura 4 y los superponemos a la figura a) de tal modo que las cuatro figuras coincidan. Los paralelogramos S_1, S_2 y S_3 cubren una vez por completo el triángulo original y el triángulo S_0 lo cubren dos veces más. Esto nos lleva a

$$m(S_1) + m(S_2) + m(S_3) = 5 + 2m(S_0) \Longrightarrow 2 + 2 + 2 \geq 5 + 2m(S_0) \Longrightarrow m(S_0) \leq \frac{1}{2}.$$

Como $m(S_i) \in \mathbb{Z}$, entonces
$$m(S_0) = 0.$$

Por tanto, sabemos que los puntos estarán repartidos en los triángulos exteriores siguiendo el patrón $2-2-1$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el triángulo de arriba es el que contiene un solo punto.

Hagamos una partición del triángulo inicial en dieciséis triángulos iguales entre sí uniendo los puntos medios de los lados de los cuatro triángulos en los que hemos dividido la figura original. Marquemos el triángulo S_0 en negro, como se muestra en la figura 5, para indicar que ningún punto va a caer ahí.

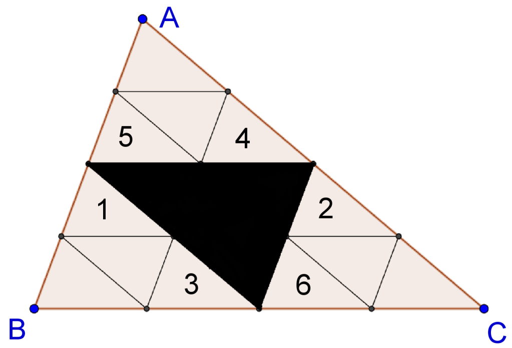

Figura 5: Triángulo dividido en 16 triángulos iguales.

Etiquetaremos los triángulos como en la figura 5 y denotaremos por i_1 el número de puntos contenidos en el triángulo 1. Del mismo modo definimos $i_2, \dots, i_6$ (véase la figura 5).

Dividamos el triángulo en las tres regiones (roja, morada y verde) de la figura 6. Como hay un punto en el triángulo superior, los otros cuatro puntos deben estar en los paralelogramos morado y verde.

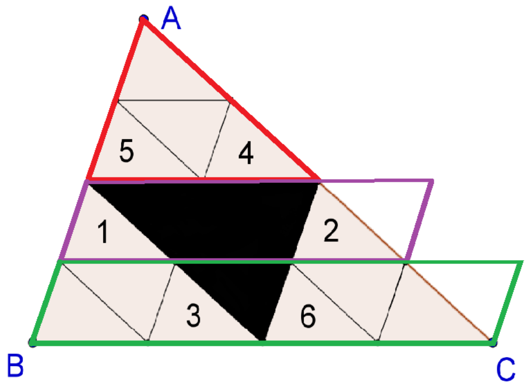

Figura 6: Triángulo dividido en las regiones roja, morada y verde.

Si hubiera tres puntos en la región central, como está contenida en un paralelogramo de área $\frac{6}{16} = \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$ (figura 6), por el lema 2 tendríamos un triángulo de área menor que $\frac{1}{4}$.

Igualmente, como la región inferior está contenida en un paralelogramo de área $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, si hubiera tres puntos en esta región, por el lema 2, formarían un triángulo de área menor o igual que $\frac{1}{4}$.

Por tanto, la región central contendrá dos puntos y la región inferior los otros dos. Como en S_0 no hay puntos, los dos puntos de la región de en medio estarán en los triángulos 1 y 2. Así pues,
$$i_1 + i_2 = 2.$$

Tomando las distintas rotaciones del triángulo y haciendo la misma partición para cada una de las distintas bases, por el mismo razonamiento llegamos a que

$$i_3 + i_4 \geq 1,$$

$$i_5 + i_6 \geq 1.$$

Ahora definimos las siguientes sumas:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= i_1 + i_5 + i_4; & \Sigma_3 &= i_2 + i_4 + i_5; & \Sigma_5 &= i_3 + i_6 + i_1; \\ \Sigma_2 &= i_1 + i_5 + i_3; & \Sigma_4 &= i_2 + i_4 + i_6; & \Sigma_6 &= i_3 + i_6 + i_2. \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\sum_{i=1}^{6} \Sigma_i = 3(i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + i_6) \geq 3(2 + 1 + 1) = 12. \tag{1}$$

Por otro lado, vamos a probar que para todo $i \in \{1, \ldots, 6\}$ tenemos que $\Sigma_i \leq 2$. En efecto, si se diera que $\Sigma_i > 2$ para algún $i \in \{1, \ldots, 6\}$, entonces tendríamos un paralelogramo de área $1/2$ que contendría tres puntos (en el caso de Σ_3, el paralelogramo $DEFG$ de la figura 7).

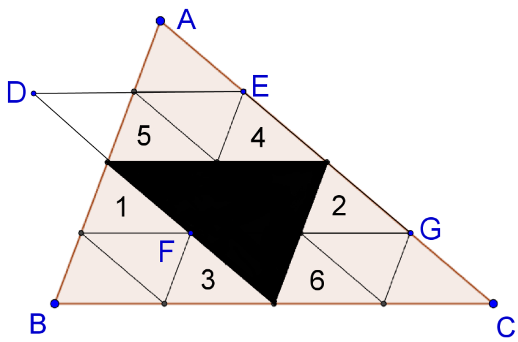

Figura 7: Paralelogramo $DEFG$ de área $\frac{1}{2}$.

Como este paralelogramo tiene área $1/2$, por el lema 2 tendríamos un triángulo de área menor o igual que $1/4$.

De la desigualdad (1) y el hecho anteriormente probado de que $\Sigma_i \leq 2$ para todo i se deduce que $\Sigma_i = 2$ para todo $i \in \{1, \ldots, 6\}$.

La igualdad $\Sigma_1 = \Sigma_2$ implica que $i_3 = i_4$. Por otro lado teníamos que $i_3 + i_4 \geq 1$ y, como i_3 e i_4 son números enteros, obtenemos que

$$i_3 + i_4 \geq 2.$$

Por el mismo razonamiento obtenemos que

$$i_5 + i_6 \geq 2.$$

Debido a que $i_1 + i_2 = 2$ y a las dos desigualdades anteriores obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{6} i_j \geq 6.$$

Como habíamos partido de un triángulo con cinco puntos, se obtiene una contradicción. ∎

3. Cota superior para $S(F)$

Para poder demostrar que 6 es una cota superior de $S(F)$ necesitamos el siguiente lema.

Lema 6. *Para una figura acotada F y un punto P cualquiera de la figura, existe una recta que pasa por P y divide a la figura en dos partes de igual área.*

Demostración. Trazamos dos rectas que pasen por P y que formen entre sí un ángulo α como en la figura 8. Mantendremos fija una de ellas y rotaremos la otra haciendo variar el ángulo α.

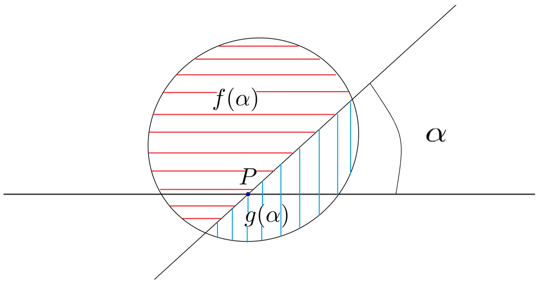

Figura 8: Una figura y dos rectas concurrentes en P.

Sean $f(\alpha)$ y $g(\alpha)$ las áreas de F en cada uno de los semiespacios determinados por la recta que no está fija. Como f y g son continuas y $f(0) - g(0) = -(f(\pi) - g(\pi))$, por el teorema de los valores intermedios, existe un valor de α, digamos α_0, tal que $f(\alpha_0) = g(\alpha_0)$. Esto prueba que por el punto P pasa una recta L que divide a la figura F en dos partes de igual área. ■

Proposición 7. *Para toda figura F acotada y convexa con borde se tiene que*

$$S(F) \leq 6.$$

Demostración. Supongamos que tenemos los seis puntos $v_1, \ldots, v_6$ en la figura F. Por el lema 6, a través del punto v_1 podemos trazar una línea que divida la figura en dos porciones de igual área. Sean estas porciones F_1 y F_2.

Por el principio del palomar, una de las dos porciones contendrá al menos tres de los cinco puntos restantes. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que F_1 contiene v_2, v_3, v_4.

Por el lema 6, a través de v_1 podemos trazar una línea que divida F_1 en dos porciones de igual área. Sean estas porciones F_{11} y F_{12}. Por el principio del palomar, al menos una de las dos porciones restantes va a contener dos de los tres puntos. Sin pérdida de generalidad, supongamos que F_{11} contiene a v_2 y v_3.

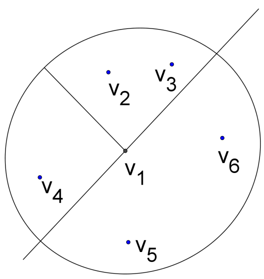

Figura 9: Figura convexa y acotada con seis puntos y dividida dos veces en partes iguales.

La porción F_{11} tiene área $|F_{11}| = |F|/4$. Por tanto,

$$|v_1 v_2 v_3| \leq \frac{|F|}{4}.$$ ■

4. Cota inferior para $S(F)$

Vamos a probar que $S(F) \geq 4$ para toda figura F convexa, acotada y con borde. Para la demostración necesitaremos la siguiente definición:

Definición 2. Sea F una figura convexa y p un punto del borde de F. Una **recta soporte** de F por p es una recta que pasa por p y deja la totalidad de la figura F en uno de los dos semiplanos en los que la recta divide al plano. ◂

Observación 1. La recta soporte puede no ser única. ◂

Es momento de pasar a buscar esa cota inferior.

Proposición 8. *Para toda figura F convexa, acotada y con borde se tiene que*

$$S(F) \geq 4.$$

Demostración. Todo lo que hace falta probar es que $S(F) \neq 3$, es decir, que existen tres puntos M, N y P en la figura F tales que

$$|MNP| > \frac{1}{4}|F|.$$

Por el lema 6, sabemos que hay una recta L que divide F en dos partes de igual área. Sean M y N los puntos de intersección de la recta L con el borde de la figura F. Ahora vamos a dibujar tres rectas soporte: una que pasa por M y dos paralelas al segmento $\overline{MN}$.

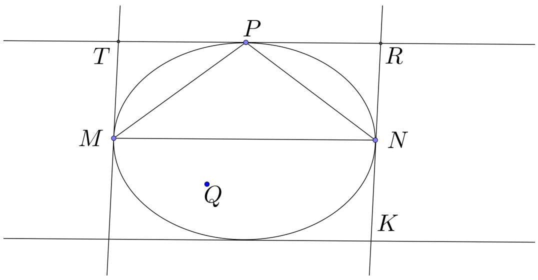

Figura 10: Rectas soporte de una figura.

Trazamos una recta por N paralela a la recta de soporte de M que al cortar con las dos rectas paralelas al segmento $\overline{MN}$ nos dará los puntos R y K. El segmento $\overline{KR}$ no tiene por qué pertenecer a una recta soporte. Observemos que, como la figura F es convexa, el segmento $\overline{RK}$ no contendrá puntos del interior de F por encima y por debajo del segmento $\overline{MN}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el segmento $\overline{RK}$ solo contiene a puntos de F (interior y borde) por debajo de $\overline{MN}$ o que no contiene a ningún punto distinto de N.

Sea P un punto de la figura y de la recta soporte que está por encima de $\overline{MN}$. Probaremos que M, N y P son los tres puntos buscados. Sea T el punto de intersección de esta recta soporte con la recta soporte de F que pasa por M. Como exactamente la mitad del área de la figura F está completamente contenida en el paralelogramo $MTRN$, obtenemos que

$$|MNP| = \frac{1}{2}|MTRN| \geq \frac{1}{4}|F|.$$

Queremos probar la desigualdad estricta y solo hemos obtenido «≥». La igualdad solo se obtiene cuando la mitad de la figura F coincide exactamente con el paralelogramo $MTRN$. En ese caso, podemos tomar los puntos T, R y cualquier punto Q de la figura F que se encuentre por debajo de MN. Entonces

$$|TRQ| > \frac{1}{4}|F|. \qquad \blacksquare$$

En el libro de Soifer [4, sección 8.5] se prueba la siguiente proposición. Debido a su extensión hemos decidido omitir su demostración.

Proposición 9. *Para toda figura F convexa, acotada y con borde se tiene que*

$$S(F) \neq 4.$$

Por tanto, se tiene que

$$S(F) \geq 5.$$

5. Pentágono regular

Proposición 10. *Para un pentágono regular F se tiene que*

$$S(F) = 6.$$

Demostración. Como $S(F) \leq 6$ por la proposición 7, tenemos que ver que $S(F) > 5$, es decir, que podemos encontrar un conjunto de cinco puntos tales que los diez triángulos ($\binom{5}{3}$ triángulos) formados por tres de ellos tengan área mayor que $\frac{1}{4}|F|$.

Los cinco vértices de F nos dan el conjunto buscado. Sea S el triángulo formado por dos lados contiguos y una diagonal, que está formado por tres de los cinco puntos (ver la figura 11). El triángulo S es isósceles con ángulos de 108 y 36 grados y base (lado desigual) de longitud $\phi \cdot L$, donde L es la longitud del lado del pentágono inicial y $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es el número áureo. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el lado del pentágono vale 1. La razón entre áreas será la misma que la de cualquier pentágono con longitud de lado L.

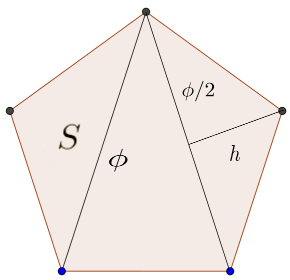

Figura 11: Pentágono regular dividido en los tres triángulos isósceles que se obtienen de trazar las diagonales por un vértice.

Como el ángulo menor de S mide 36 grados y el lado del pentágono mide 1, tenemos que $h = \sin 36$, siendo h la altura del triángulo S. Por tanto,

$$|S| = \frac{(1+\sqrt{5})\sin 36}{4} = 0,4755\ldots$$

Por otro lado, si dividimos el pentágono en cinco triángulos iguales, con vértice común en el centro del mismo, obtenemos cinco triángulos isósceles cuyo ángulo mayor mide 72 grados. Usando esta información y que el lado del pentágono mide 1, obtenemos que el valor de la apotema es $a = \frac{1}{2\tan 36}$. Entonces

$$|F| = \frac{5}{4\tan 36} = 1,7204\ldots$$

Por tanto,

$$\frac{|S|}{|F|} = \frac{(1+\sqrt{5})\sin 36}{4} : \frac{5\cos 36}{4\sin 36} = 0,2763\ldots > \frac{1}{4}.$$

Por último, el área del otro tipo de triángulo T que se podría formar en el pentágono uniendo tres de los cinco puntos escogidos sería

$$|T| = |F| - 2|S| = 0,7694\ldots$$

Entonces,

$$\frac{|T|}{|F|} = 0,4472\ldots > \frac{1}{4}. \qquad \blacksquare$$

6. El hexágono regular

Uno de los problemas que propone Alexander Soifer en su libro [4, Problema 8.6.5] es hallar el valor de la función $S(F)$ cuando F es un hexágono regular. En la realización del trabajo de Mellado Cuerno [3] se dio con la solución de este problema.

Proposición 11. *Sea H un hexágono regular. Entonces,*

$$S(H) = 5.$$

Demostración. Supongamos que $|H| = 1$. Trabajaremos con el mallado del hexágono regular que se muestra en la figura 12:

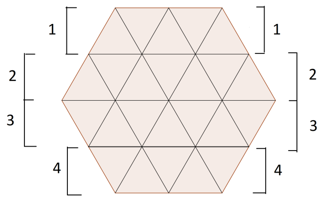

Figura 12: Mallado del hexágono regular y los cuatro trapecios que se obtienen con él.

Este mallado consta de veinticuatro triángulos equiláteros de área $1/24$ y se construye tomando el punto medio de cada lado del hexágono y trazando dos segmentos paralelos a los lados contiguos más las diagonales del hexágono. Con esta división hemos conseguido cuatro trapecios isósceles, dos formados por cinco triángulos cada uno (numerados con el 1 y el 4 en la figura 12) y otros dos formados por siete triángulos cada uno (numerados con el 2 y el 3 en la figura 12). A partir de este punto, siempre que nos refiramos a los trapecios en la demostración hablaremos de estos que acabamos de definir y usaremos la notación de la figura 12. Tomemos cinco puntos en el hexágono. Por el principio del palomar, al menos uno de los trapecios va a tener dos puntos. Vamos a dividir la demostración en varios casos.

Caso 1 Supongamos que al menos tres puntos van a parar a un mismo trapecio.

En este caso ya tendríamos el triángulo buscado aplicando el lema 2. Si tres de estos puntos estuvieran en un trapecio como el 1 o el 4 de la figura 12, estarían incluidos en los paralelogramos de color morado y rojo (figura 13), que tienen área $1/2$. Si los tres puntos estuvieran en uno de los trapecios numerados con 2 y 3 en la figura 12, estarían incluidos en los paralelogramos azul y verde (figura 13), que tienen área menor que $1/2$:

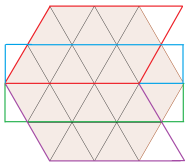

Figura 13: Paralelogramos de área menor o igual a $\frac{1}{2}$ para resolver el caso 1.

Tenemos que estudiar los casos en los que hay como máximo dos puntos en cada uno de los trapecios.

Caso 2 Supongamos que el trapecio inferior contiene dos puntos y el trapecio contiguo, uno.

Volveremos a servirnos del lema 2 para resolver este caso.

Sea donde sea que coloquemos el punto solitario, los tres puntos estarán en un paralelogramo de área $1/2$ (rojo o verde en la figura 14) y, por tanto, tendremos nuestro triángulo deseado de área menor o igual que $1/4$:

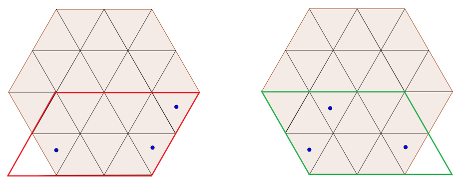

Figura 14: Paralelogramos de área $\frac{1}{2}$ para resolver el caso 2

De este caso también derivamos la situación de que cada uno de estos dos trapecios tenga dos puntos.

Caso 3 Supongamos que el trapecio inferior tiene un punto y el contiguo dos.

Sea arbitrario el triángulo donde coloquemos el punto inferior. Si los otros dos puntos estuvieran o bien en el paralelogramo rojo o en el verde de la figura 15, como ambos son de área $1/2$, por el lema 2 se obtendría un triángulo de área menor o igual que $1/4$.

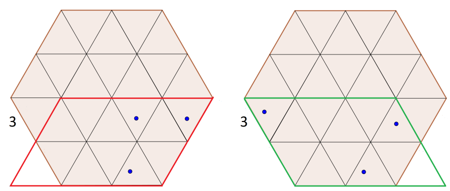

Figura 15: Paralelogramos de área $\frac{1}{2}$ para resolver el caso 3

Por tanto tenemos que considerar el caso en que haya un punto en cada uno de los triángulos extremos del trapecio 3. Con esta colocación de los tres puntos no podemos asegurar que vayan a formar un triángulo de área menor o igual que $1/4$; necesitamos que entre un cuarto punto en juego. Vamos a volver a separarlo en tres casos.

3.1. Supongamos que hubiera un punto en el trapecio 2 de la figura 16, que es contiguo al que ya tiene dos puntos. Si el punto está en un triángulo contenido en los paralelogramos rojo o verde de la figura 16, se tendría un triángulo de área menor o igual a $1/4$, debido al lema 2:

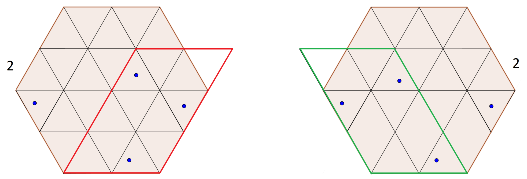

Figura 16: Paralelogramos de área $\frac{1}{2}$ para resolver el caso 3.1.

Quedaría por estudiar la posibilidad de que el punto se sitúe en el triángulo central del trapecio 2 de la figura 16.

El punto restante debería estar en el trapecio superior. Sea donde sea que lo coloquemos podremos trazar un paralelogramo de área $1/2$ y aplicar el lema 2:

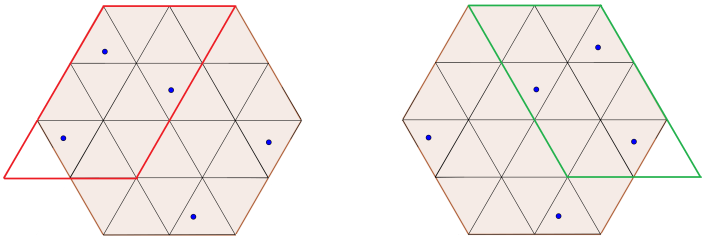

Figura 17: Paralelogramos de área $\frac{1}{2}$ para resolver el caso 3.1.

3.2. Supongamos que en el trapecio 2 de la figura 16 estuvieran los dos puntos restantes. Por el razonamiento del caso anterior, los dos puntos tendrían que estar en el triángulo central de ese trapecio. Es fácil encontrar un paralelogramo de área menor o igual que $1/2$ que contenga tres puntos (figura 18) y por el lema 2, los tres puntos formarán un triángulo de área menor o igual que $1/4$.

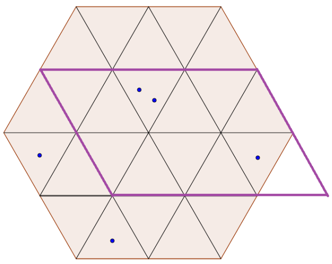

Figura 18: Paralelogramo de área $\frac{1}{2}$ para resolver el caso 3.2.

3.3. Supongamos que colocamos los dos puntos restantes en el trapecio superior. Si uno de los dos puntos no está en un triángulo de los extremos, aplicamos el lema 2 a los paralelogramos rojo o verde de la figura 19 y obtenemos de nuevo un triángulo de área menor o igual que $1/4$.

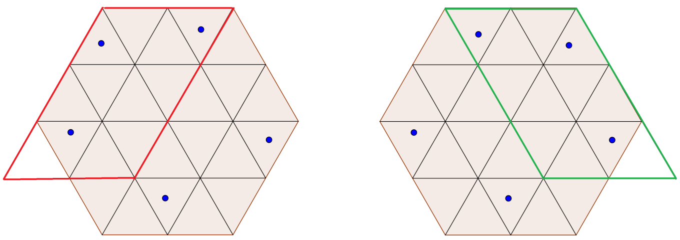

Figura 19: Paralelogramos de área $\frac{1}{2}$ para resolver el caso 3.3.

Colocando cada uno de los dos puntos en sendos triángulos de los extremos del trapecio superior encontramos los paralelogramos que se muestran en la figura 20 de área $1/2$ y podemos volver a aplicar el lema 2 para obtener el triángulo deseado.

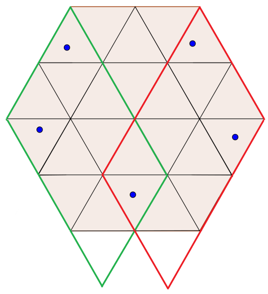

Figura 20: Paralelogramos de área $\frac{1}{2}$ para resolver el caso 3.3.

El resto de combinaciones posibles se derivan de uno de los casos que acabamos de discutir gracias a la simetría del hexágono regular.

Con esto acaba la demostración y vemos que

$$S(H) = 5. \qquad \blacksquare$$

7. Clasificación de figuras convexas con borde

Debido a las proposiciones 7 y 9, la función $S(F)$ solo puede tomar dos valores:

$$S(F) = 5 \text{ o } S(F) = 6.$$

Se cree que la excepción es $S(F) = 6$. Ante la dificultad de encontrar las figuras que cumplieran este caso, en 1990 Alexander Soifer lanzó un reto matemático. Ofrecía cincuenta dólares a la persona que diera la clasificación de las figuras F tales que $S(F) = 6$. El propio Soifer conjeturó lo siguiente:

Conjetura 12. *Las figuras F acotadas y convexas tales que $S(F) = 6$ son aquellas cuyo borde se obtiene como transformación afín del borde de un pentágono regular y queda comprendido entre dos pentágonos regulares concéntricos, como se puede observar en la figura 21.*

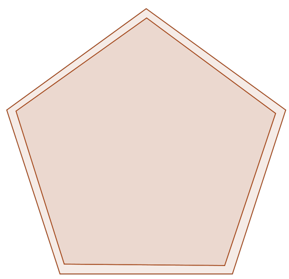

Figura 21: Pentágonos regulares concéntricos.

El matemático ruso Karabash probó en 2007 con dos artículos [1, 2], el primero publicado en 2007 y el segundo en 2008, que la conjetura de Alexander Soifer era falsa.

Actualmente, la cuantía del reto ha ascendido a cien dólares y prima la conjetura que el propio Karabash dio:

Conjetura 13. *Es imposible dar una clasificación de las figuras F tales que $S(F) = 6$.*

Referencias

[1] Karabash, Dmytro. «On The Soifer Fifty Dollar Problem, Part I: Construction». En: *Geombinatorics* 17.2 (2007), págs. 68-77.

[2] Karabash, Dmytro. «On The Soifer Fifty Dollar Problem, Part II: The Existence of the Counterexample to the Conjecture». En: *Geombinatorics* 17.3 (2008), págs. 124-128.

[3] Mellado Cuerno, Manuel. *¿Cómo cortar un triángulo?: Problemas de geometría descriptiva en el plano.* Trabajo de fin de grado. Universidad Autónoma de Madrid, 2017.

[4] Soifer, Alexander. *How Does One Cut a Triangle?* Nueva York: Springer-Verlag, 2009. https://doi.org/10.1007/978-0-387-74652-4.