TEMat

El sistema de axiomas de ZFC

Víctor González López
Universidad de Murcia
victorgl94@gmail.com

Resumen: En este artículo realizamos una introducción al sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel, complementado con el axioma de elección, base de la teoría de conjuntos. Para ello, comenzaremos exponiendo los axiomas del sistema de Zermelo-Fraenkel, para después introducir el axioma de elección. Hablaremos de la presencia de este en las matemáticas, así como de dos versiones suyas. Finalmente, hablaremos del debate de la consistencia y de una posible alternativa al axioma de elección. Es importante resaltar que no haremos un uso estricto de la lógica de primer orden, ya que nuestro objetivo es presentar y motivar los axiomas, y no hacer un estudio minucioso de ellos en términos lógicos.

Abstract: In this article, we introduce the sistem of axioms of Zermelo-Fraenkel, complemented with the axiom of choice, base of set theory. In order to achieve this, we begin by presenting the axioms of Zermelo-Fraenkel and, after that, the axiom of choice. We talk about the presence of the axiom of choice in mathematics, as well as about a couple of versions of it. Finally, we talk about the debate of consistency and about a possible alternative to the axiom of choice. It is important to emphasise that we do not use first order logic, given that our main purpose is to present and motivate the axioms, and not to make a thorough study of them in logical terms.

Palabras clave: axiomática, conjuntos, axioma de elección, Zermelo-Fraenkel.

MSC2010: 03E25, 03E30.

Recibido: 24 de julio de 2017.
Aceptado: 13 de octubre de 2017.

Agradecimientos: Me gustaría agradecer al profesor Antonio Avilés López de la Universidad de Murcia su trabajo y dedicación a la hora de dirigir tanto mi trabajo fin de Grado como de Máster, ya que este trabajo está basado en un capítulo de mi trabajo fin de Grado.

Y, por supuesto, a mis padres y a mi hermano.

Referencia: González López, Víctor. «El sistema de axiomas de ZFC». En: *TEMat*, 2 (2018), págs. 45-52. ISSN: 2530-9633. URL: https://temat.es/articulo/2018-p45/.

1. Introducción

A finales del siglo XIX, David Hilbert, afamado matemático alemán, afirmaba que la manera adecuada de desarrollar cualquier teoría científica de manera rigurosa era a partir de una axiomatización. Entre estas teorías estaba la teoría de conjuntos, rama de las matemáticas que estudia las «colecciones bien definidas, llamadas **conjuntos**, de objetos a los que llamamos miembros o **elementos**» [4], que a su vez son conjuntos. La teoría de conjuntos sirve como fundamento de las matemáticas, ya que a partir de ella se pueden desarrollar formalmente las demás teorías matemáticas y sus diferentes estructuras.

En principio, dados dos conjuntos x e y, lo único que podemos decir sobre ellos es si son iguales, lo cual denotaríamos por $x = y$, o si uno pertenece a otro, lo cual denotaríamos por $x \in y$. Estas afirmaciones pueden ser verdaderas o falsas. Sin embargo, estas dos relaciones que podemos establecer entre dos conjuntos han de satisfacer una serie de axiomas, es decir, unos principios fundamentales e indemostrables, que asumimos ciertos, sobre los que se construye la teoría.

Una vez asumido este sistema de axiomas, el objetivo de la teoría de conjuntos es determinar qué afirmaciones sobre los conjuntos son verdaderas (pueden demostrarse siguiendo unos razonamientos lógicos), cuáles son falsas (su negación es verdadera) y cuáles son indecidibles (ni ellas ni sus negaciones se pueden deducir de los axiomas).

En este trabajo vamos a comenzar enunciando los axiomas de Zermelo-Fraenkel, para los cuales la principal referencia son los apuntes de Avilés López [3][1]. Posteriormente, estableceremos el axioma de elección, el cual, unido a los axiomas de Zermelo-Fraenkel, constituye el sistema de axiomas más utilizado. Asimismo, comentaremos la dualidad de la presencia del axioma de elección en las matemáticas. Finalizaremos el artículo hablando del concepto de consistencia de un sistema de axiomas, así como de una posible alternativa al axioma de elección.

2. Los axiomas de ZF

En 1904, Ernst Zermelo, matemático y lógico alemán, formuló el axioma de elección para probar que todo conjunto puede ser bien ordenado. Zermelo recibió muchas críticas por ello y célebres colegas como Borel, Baire y Lebesgue se opusieron al axioma, ya que este establece la existencia de un cierto conjunto sin dar una definición explícita del mismo, algo inasumible por muchos en aquel momento[2].

Cuatro años más tarde, en 1908, con el fin de proteger su demostración, Zermelo publicó la primera axiomatización de la teoría de conjuntos, donde los axiomas que postuló eran principios consonantes con su prueba, entre los que se encontraba el axioma de elección. Lejos de alejar la controversia sobre su prueba, lo que ocurrió es que la propia axiomatización fue cuestionada.

Fue en 1930 cuando Zermelo publicó una nueva axiomatización en la que se modificó la anterior y se incluyeron las sugerencias hechas por Fraenkel unos años antes. Este sistema es muy parecido al usado hoy en día y se conoce como Zermelo-Fraenkel (ZF). Comenzamos ahora a enunciar los axiomas que lo componen:

Axioma 1 (ZF1: axioma de extensionalidad). *Dos conjuntos son iguales si y solo si tienen los mismos elementos.*

Este axioma es muy importante porque nos proporciona la unicidad de los conjuntos.

Axioma 2 (ZF2: axioma del conjunto vacío). *Existe un conjunto que no tiene elementos. Lo denotaremos por $\varnothing$.*

Para entender la necesidad de varios de los siguientes axiomas de ZF es necesario hablar de la paradoja más famosa de la teoría de conjuntos: la **paradoja de Russell**. Podría parecer lógico introducir el siguiente axioma en el sistema ZF:

[1] Dado que estos apuntes son privados, recomendamos al lector consultar el libro de Goldrei [9], donde se exponen los axiomas de ZF con gran claridad.

[2] Las referencias históricas utilizadas a lo largo del trabajo han sido extraídas del libro de Moore [16].

Axioma A. *Dada una propiedad $P(t)$, existe un conjunto x cuyos elementos son precisamente los conjuntos t que cumplen la propiedad.*

Sin embargo, este axioma lleva a contradicciones ya que, si consideramos la propiedad $t \notin t$, el axioma A nos dice que existe el conjunto $x = \{t : t \notin t\}$. Si ahora nos preguntamos si $x \in x$, tenemos dos opciones:

1. Si $x \in x$, x no puede ser elemento de sí mismo, por lo que $x \notin x$.
2. Si $x \notin x$, x es elemento de sí mismo, por lo que $x \in x$.

Así pues, $x \in x \iff x \notin x$. Esto es absurdo, por lo que nos vemos obligados a descartar este axioma. La explicación intuitiva reside en que un conjunto debe existir después de sus elementos. Así pues, no tiene sentido preguntarse si $x \in x$ antes de que exista. Esto conlleva la inclusión de otra serie de axiomas que lo sustituyan y eviten contradicciones. En concreto, estos son ZF3-ZF7:

Axioma 3 (ZF3: axioma de separación). *Dados un conjunto C y una propiedad $P(t)$ que los elementos t de C pueden cumplir o no, existe el conjunto $x = \{t \in C : P(t)\}$.*

Este axioma es diferente a nuestro axioma A puesto que, así como en el axioma A se asume la existencia del conjunto x de manera incondicional, en el axioma de separación está supeditada a la existencia previa del conjunto C. Esta diferencia conlleva que si consideramos de nuevo la propiedad $t \notin t$, la cual nos llevaba a contradicción con el axioma A, en este caso no lo hace, ya que tendríamos el conjunto $x = \{t \in C : t \notin t\}$, el cual veremos que es el propio C.

Axioma 4 (ZF4: axioma de pares). *Dados dos conjuntos x, y, existe el conjunto formado únicamente por x e y, al que denotaremos por $\{x, y\}$.*

Nota 1. En el caso en el que x e y sean iguales, denotaremos a $\{x, y\} = \{x, x\}$ por $\{x\}$. ◂

Este axioma nos permite definir los pares ordenados $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$. A partir de estos definimos el producto cartesiano de dos conjuntos x, y como

$$x \times y := \{(a, b) : a \in x \text{ y } b \in y\}.$$

Axioma 5 (ZF5: axioma de la unión). *Dado un conjunto x, existe la unión*

$$\bigcup x := \{t : \exists\, y \in x : t \in y\}.$$

Lo que nos dice este axioma es que, dado un conjunto x, podemos encontrar un conjunto cuyos elementos son los elementos de los elementos de x.

Una vez que hemos enunciado ZF4 y ZF5, estamos en condiciones de definir la unión y la intersección de dos conjuntos. En efecto, dados a, b conjuntos, definimos $a \cup b := \bigcup\{a, b\}$. Esta definición está justificada porque $x \in \bigcup\{a, b\} \iff \exists\, y \in \{a, b\}$ tal que $x \in y$. Basta notar ahora que los únicos elementos de $\{a, b\}$ son a y b. Así, $x \in \bigcup\{a, b\} \iff (x \in a) \vee (x \in b)$. Tener definida la unión de dos conjuntos nos da pie a definir la intersección de la siguiente manera (ver [9], p. 85): $a \cap b := \{x \in a \cup b : (x \in a) \wedge (x \in b)\}$ (nótese el uso del axioma de separación).

Definición 1. Dados dos conjuntos x, y, diremos que y está **contenido** en x o y es un **subconjunto** de x si para todo $z \in y$, se cumple que $z \in x$. En tal caso, escribiremos $y \subseteq x$. ◂

Axioma 6 (ZF6: axioma de las partes). *Dado un conjunto x, existe el conjunto $\mathcal{P}(x) := \{y : y \subseteq x\}$.*

Así pues, el conjunto $\mathcal{P}(x)$, al que llamaremos «**partes de x**», está formado por los subconjuntos de x.

Axioma 7 (ZF7: axioma de reemplazamiento). *Si x es un conjunto y $F(t)$ una función que permite asignar a cada elemento $t \in x$ un conjunto $F(t)$, entonces existe el conjunto $\{F(t) : t \in x\}$.*

El axioma del conjunto vacío nos garantiza la existencia de al menos un conjunto. Sin embargo, no garantiza la existencia de conjuntos infinitos. Veamos un ejemplo: tomamos el conjunto $\varnothing$ y, usando ZF4, construimos $\{\varnothing\}$. Llamaremos 1 a la unión de $\varnothing$ y $\{\varnothing\}$. Así, $1 = \varnothing \cup \{\varnothing\}$. Está claro que $1 = \{\varnothing\}$. Del mismo modo, definimos $2 := 1 \cup \{1\} = \{\varnothing, 1\}$. De manera general, dado el conjunto n, definimos el «sucesor de

n» como $\boldsymbol{s(n) := n \cup \{n\} = \{\emptyset, \dots, n\}}$. Denotaremos $s(n)$ como $\boldsymbol{n+1}$. De esta forma podemos definir los números naturales. No obstante, no tenemos garantizada la existencia del conjunto que los contenga a todos ellos, es decir, $\mathbb{N}$. Esto es precisamente lo que nos proporciona el siguiente axioma, ya que afirma la existencia de un conjunto infinito.

Axioma 8 (ZF8: axioma del infinito). *Existe un conjunto x tal que*

- $\emptyset \in x$.
- $\forall\, n : n \in x \Rightarrow s(n) \in x$.

Nota 2. La intersección de los conjuntos x que satisfacen el axioma del infinito también es un conjunto que lo satisface. Esto nos permite definir $\mathbb{N}$ como el menor conjunto que cumple ZF8. ◂

Lema 1. *ZF4 puede ser deducido a partir de ZF1, ZF3, ZF6 y ZF7.*

Demostración. En efecto, dados x e y conjuntos, consideramos el conjunto $\{y \in x : y \neq y\}$ (por ZF3). Este conjunto es el vacío $\emptyset$. Aplicamos ahora ZF6 y obtenemos $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} = 1$. De nuevo, por ZF6, $\mathcal{P}(1) = \{\emptyset, 1\} = 2$. Así, ya tenemos un conjunto con dos elementos. Definimos ahora una función de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \emptyset &\mapsto x. \\ 1 &\mapsto y. \end{aligned}$$

Basta usar ahora ZF7 y tenemos que existe el conjunto $\{F(t) : t \in 2\} = \{x, y\}$. ■

A pesar de que ZF4 se pueda deducir de otros axiomas, se incluye por motivos didácticos, ya que permite clarificar la comprensión de los axiomas.

Axioma 9 (ZF9: axioma de regularidad). *Para cualquier conjunto no vacío x existe $y \in x$ tal que $x \cap y = \emptyset$.*

A priori, este axioma no parece intuitivo. Uno puede pensar en un conjunto muy importante, como es, por ejemplo, $\mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales, y rápidamente llega a la conclusión de que es imposible que exista algún natural cuya intersección con $\mathbb{N}$ sea vacía, porque ¿qué sentido tiene que un número natural sea disjunto con $\mathbb{N}$? Esta aparente contradicción en realidad no es tal; está inducida por la manera de pensar en los números naturales. Lo que ocurre es que cuando trabajamos a diario con los números naturales, tratamos a estos como eso, números. Sin embargo, como hemos visto antes, estos son conjuntos, y su definición hace que no exista contradicción alguna.

Por otro lado, cabe destacar que el axioma de regularidad nos permite deducir que no existen conjuntos que se contengan a sí mismos:

Proposición 2 ([9, pág. 95]). *Ningún conjunto puede ser elemento de sí mismo.*

Demostración. Sea x un conjunto. Por el axioma de pares (ZF4), existe el conjunto $\{x\}$. Por el axioma de regularidad (ZF9), existe un elemento de $\{x\}$ que es disjunto con $\{x\}$. Ahora bien, como el único elemento de $\{x\}$ es x, $x \cap \{x\} = \emptyset$, lo que implica que el único elemento de $\{x\}$, x, no está en el otro conjunto de la intersección, x, es decir, $x \notin x$. ■

De aquí deducimos que el conjunto $x = \{t \in C : t \notin t\}$, considerado tras el axioma de separación, es, en efecto, el propio C. Del mismo modo, si consideramos el conjunto $x = \{t \in C : t \in t\}$, tenemos que no tiene ningún elemento. Así pues, el axioma del conjunto vacío (ZF2) se puede deducir de los demás axiomas, pero, al igual que el axioma de pares, se incluye por motivos didácticos.

3. El axioma de elección (AC)

Pasamos ahora a hablar del axioma de elección, al que denotaremos AC por sus siglas en inglés, un axioma clave en la teoría de conjuntos. En la primera axiomatización de esta, también llevada a cabo por Zermelo, en 1908, este aparecía dentro de los axiomas que postuló. Sin embargo, en el sistema ZF, formulado en 1930, fue excluido debido a las diferencias existentes entre el resto de axiomas y él.

Definición 2 ([11, pág. 47]). Si S es una familia de conjuntos no vacíos, una función de elección para S es una función $f\colon S \to \bigcup S$ tal que

$$f(X) \in X \quad \forall\, X \in S.$$

◂

Axioma 10 (Axioma de elección (AC)). *Toda familia de conjuntos no vacíos tiene una función de elección.*

Nota 3. Dado que el producto cartesiano de una familia de conjuntos $\{X_i : i \in I\}$ se define como $\prod_{i\in I} X_i = \{f\colon I \to \bigcup\{X_i : i \in I\} : f(i) \in X_i \;\forall\; i \in I\}$ (ver [15], pág. 158), tenemos que el axioma de elección es equivalente a que, dada una familia de conjuntos no vacíos, su producto cartesiano sea no vacío. ◂

Sin embargo, cuando hablamos de una familia finita de conjuntos no vacíos, la existencia de una función de elección es consecuencia de ZF:

Proposición 3. *Sea S una familia finita de conjuntos no vacíos. Entonces, S tiene una función de elección.*

Como hemos comentado anteriormente, el axioma de elección fue formulado por Zermelo en 1904 cuando buscaba una prueba de que todo conjunto puede ser bien ordenado. Fue rechazado de manera tajante por aquellos matemáticos que identificaban la existencia de un objeto matemático con su construcción mediante una regla, puesto que el AC postula la existencia de un conjunto sin dar definición alguna de este. Por otro lado, a partir de él se obtienen resultados como la paradoja de Banach-Tarski y la existencia de conjuntos no medibles Lebesgue. Sin embargo, hoy en día es aceptado por la mayoría de los matemáticos y es necesario a la hora de obtener resultados en álgebra, análisis o topología.

3.1. Dualidad de AC

Otra característica del axioma de elección es que posee un carácter dual: su presencia en las matemáticas se ve claramente dividida en dos papeles. En primer lugar, hay resultados para los cuales AC es necesario tal y como se acaba de enunciar:

Teorema 4 (Lema de Zorn [14, págs. 161-162]). *Si $(P, <)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que todo subconjunto suyo totalmente ordenado tiene una cota superior, entonces P tiene un elemento maximal.*

Ahora bien, también se cumple el recíproco, lo cual deriva en lo siguiente:

Teorema 5 ([14, pág. 162]). *El lema de Zorn es equivalente al axioma de elección.*

Es gracias al lema de Zorn que podemos obtener resultados tan importantes en las matemáticas, cuyas pruebas pueden consultarse en el libro de Jech [12], como son los siguientes:

- Todo espacio vectorial tiene un base.
- Teorema de Hahn-Banach.
- Teorema de Tichonoff sobre compactos.
- Todo cuerpo tiene una única clausura algebraica.

Así mismo, de la existencia de una función de elección para una familia arbitraria de conjuntos no vacíos se derivan los resultados contraintuitivos de los que hemos hablado:

Teorema 6 ([5, págs. 109-110]). *Existen conjuntos no medibles Lebesgue en $\mathbb{R}$.*

Teorema 7 (Paradoja de Banach-Tarski [9, pág. 116]). *Sea S la bola unidad en $\mathbb{R}^3$. S puede ser particionada en un número finito de subconjuntos tales que, movidos mediante traslaciones y rotaciones, producen dos bolas unidad.*

Así como el axioma de elección se usa para probar ciertos resultados muy importantes, como son los anteriores, existe otro tipo de resultados, pertenecientes sobre todo al análisis real y a la teoría de la medida, para los cuales es suficiente una versión más débil de él:

Axioma 11 (Axioma numerable de elección (CAC)). *Toda familia numerable de conjuntos no vacíos tiene una función de elección.*

Antes de que Zermelo enunciara el axioma de elección, este ya había sido usado en diversas pruebas de manera implícita en su versión numerable, debido a que en su versión numerable es más complicada la identificación de su uso. A modo de ejemplo, vamos a demostrar un resultado muy conocido para el que se dio este tipo de situación.

Teorema 8 ([17, pág. 163]). *Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación. Entonces, f es continua si y solo si es continua por sucesiones, es decir, si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x$ se cumple que $f(x_n) \to f(x)$.*

En concreto, el CAC es necesario para probar que la continuidad por sucesiones implica la continuidad:

Proposición 9. *Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua por sucesiones. Entonces, f es continua.*

Demostración. Supongamos que f no es continua en a. Por tanto, existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x \in B(a,\delta)$ tal que $f(x) \notin B(f(a),\epsilon)$. En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir $x_n \in (a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n})$ tal que $f(x_n) \notin B(f(a),\epsilon)$. Hemos construido una sucesión que converge a a cuya imagen no converge a $f(a)$. Esto es una contradicción, por lo que f es continua en a. ■

Notemos que el axioma numerable de elección está siendo usado en el momento en el que se dice «podemos elegir x_n tal que...», puesto que tenemos la familia numerable de conjuntos no vacíos $\mathcal{F}_n = \{x : x \in (a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}) \text{ y } f(x) \notin B(f(a),\epsilon)\}$, la cual posee una función de elección que nos permite elegir x_n con la propiedad deseada.

Otro resultado muy conocido en el que también es necesario el uso del CAC es el siguiente:

Proposición 10 ([16, pág. 9]). *La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.*

3.2. Dos versiones del AC

En la sección anterior hemos enunciado el axioma numerable de elección (CAC) y hemos dicho que este es consecuencia del axioma de elección (AC). En esta sección vamos a probar este resultado, pero, previamente, pasaremos por otro axioma más fuerte que el CAC, llamado principio de elecciones dependientes (DC), necesario para definir sucesiones de manera inductiva.

Definición 3 ([11, pág. 10]). Dados dos conjuntos A, B, una relacion binaria R entre A y B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Así, si $(a,b) \in R$, diremos que aRb. ◂

Axioma 12 (Principio de elecciones dependientes (DC)). *Sea R una relación binaria en un conjunto no vacío A. Si para todo $a \in A$ existe $b \in A$ tal que bRa, entonces existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $a_{n+1}Ra_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Proposición 11 ([11, Ejercicio 5.7]). *El principio de elecciones dependientes implica el axioma numerable de elección.*

Demostración. Sea $S = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de conjuntos no vacíos. Sea

$$A = \{\text{funciones de elección para algún } S_n\},$$

donde $S_n = \{A_i : i \leq n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideramos también la relación binaria $\supsetneq$.

Sea ahora $f \in A$ (existe porque estamos en el caso finito). ¿Existe $g \in A$ tal que $g \supsetneq f$?[3]

Como $f \in A$, f es una función de elección en un cierto S_{n_0}. Por otro lado, como S es una familia de subconjuntos no vacíos, existe $x \in A_{n_0+1}$. Definimos ahora g de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccc} g: & S_{n_0+1} & \to & \bigcup S_{n_0+1} \\ & A_1 & \mapsto & f(A_1), \\ & A_2 & \mapsto & f(A_2), \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & A_{n_0} & \mapsto & f(A_{n_0}), \\ & A_{n_0+1} & \mapsto & x. \end{array}$$

[3] Cuando decimos que una función contiene otra nos estamos refiriendo a que una es una extensión de la otra.

Así, tenemos una función de elección g tal que $g \supsetneq f$. Ahora, por hipótesis, existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $f_n \subseteq f_{n+1}$ para todo n en $\mathbb{N}$. Sea ahora

$$\begin{array}{rccc} F: & S & \to & \bigcup S \\ & A_n & \mapsto & f_n(A_n). \end{array}$$

F es una función de elección porque, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que f_n es una función de elección de S_m, para cierto $m \geq n$. ∎

Proposición 12 ([17, pág. 243]). *El axioma de elección implica el principio de elecciones dependientes.*

Demostración. Sea R una relación binaria en un conjunto no vacío A. Supongamos que para todo $a \in A$ existe $b \in A$ tal que bRa. Veamos que existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $a_{n+1}Ra_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Consideramos ahora, para todo $x \in A$, el conjunto

$$R(x) = \{y \in A : yRx\}.$$

Tenemos, pues, una familia de conjuntos $T := (R(x))_{x\in A}$ no vacíos. Ahora, por hipótesis, existe

$$\begin{array}{rccc} F: & T & \to & \bigcup T \\ & R(x) & \mapsto & F(R(x)) \in R(x). \end{array}$$

Esto nos permite construir la función

$$\begin{array}{rccccc} f: & A & \to & T & \to & \bigcup T \\ & x & \mapsto & R(x) & \mapsto & F(R(x)) \in R(x). \end{array}$$

Sea ahora, para todo $x \in A$, la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Gracias a que F es una función de elección se cumple que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \in R(f^n(x))$, por lo que $f^{n+1}(x)Rf^n(x)$. ∎

4. Consistencia

Ahora bien, una de las características que ha de tener un sistema de axiomas es la consistencia, es decir, que a partir de ellos no se pueda deducir ninguna contradicción. Existía una creencia de que el sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel era consistente y durante varios años se intentó probar. Sin embargo, entre 1930 y 1936 Gödel probó que la consistencia de ZF no puede ser deducida dentro del propio ZF (para consultar las obras de Gödel, véanse sus *Obras completas* [8]), sino que para ello es necesario un sistema de axiomas más general en el que *a priori* es más complicado tener consistencia:

Teorema 13 ([6, pág. 45]). *Bajo ZF, es imposible demostrar que ZF sea consistente.*

Este resultado arrojó un jarro de agua fría sobre aquellos que creían que sería posible encontrar un sistema de axiomas consistente que permitiera desarrollar todas las matemáticas dentro de él.

Otro problema seguía abierto, y era la consistencia relativa del axioma de elección respecto a ZF. En 1924 se publicó la paradoja de Banach-Tarski, que junto con el hecho de que existieran conjuntos no medibles Lebesgue en la recta real (debido esto último a Vitali) hizo pensar que el axioma de elección había de conducir a alguna contradicción, por lo que los que no creían en él sostenían que el sistema de axiomas ZFC era inconsistente. Sin embargo, de nuevo Gödel, en 1935, durante una visita al Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, comunicó a Von Neumann que había demostrado que si ZF es consistente, ZFC es consistente, es decir, la consistencia relativa del AC respecto a ZF. Este resultado cerró el debate existente en torno al axioma de elección durante varias décadas, dándole la razón a Zermelo, el primero que abogó por él:

Teorema 14 ([6, pág. 99]). *Si ZF es consistente, entonces ZFC es consistente.*

El primero de estos resultados supuso un fracaso para la comunidad matemática porque limita el debate de la consistencia de ZF al empirismo. El segundo de ellos cerró el debate abierto sobre el axioma de elección. Muchos matemáticos seguían creyendo que este axioma llevaría a contradicciones. Sin embargo, la consistencia de ZFC es equivalente a la de ZF. Y la consistencia de ZF, pese a no poderse probar, es aceptada. Así pues, la de ZFC habría de serlo también.

5. Consideraciones finales

A lo largo de estas páginas hemos expuesto el sistema de axiomas más común de las matemáticas, el de ZF, y hemos hablado del axioma más famoso, el de elección. Del mismo modo, hemos visto que este último, pese a dar lugar a determinados resultados contraintuitivos, como la existencia de conjuntos no medibles Lebesgue en $\mathbb{R}$ y la paradoja de Banach-Tarski, es comúnmente aceptado por la comunidad matemática, algo que se ve respaldado por los resultados relativos a la consistencia que acabamos de enunciar.

Finalmente, cabe resaltar que existen alternativas al axioma de elección, como el axioma de determinación, incompatible con este y bajo el cual todo conjunto de números reales es medible Lebesgue[4].

Referencias

[1] Adams, Colin y Franzosa, Robert. *Introduction to Topology: Pure and Applied*. Prentice Hall, 2007. isbn: 978-0-13-184869-6.

[2] Alías Linares, Luis. *Apuntes de Topología de Superficies*. Universidad de Murcia. 2014.

[3] Avilés López, Antonio. *Apuntes de axiomática*. Universidad de Murcia. 2015.

[4] Bagaria, Joan. «Set Theory». En: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. por Zalta, Edward N. Summer 2017. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2017. url: https://plato.stanford.edu/archives/sum2017/entries/set-theory/.

[5] Berberian, Sterling K. *Fundamentals of Real Analysis*. Universitext. Springer-Verlag, 1999. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0549-4.

[6] Cohen, Paul Joseph. *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1966.

[7] Fernández Laguna, Víctor. *Teoría básica de conjuntos*. Base Universitaria. ANAYA, 2003. isbn: 978-84-667-2614-6.

[8] Gödel, Kurt. *Obras completas*. first. Alianza ensayo. Edición de Jesús Mosterín. Alianza Editorial, 2006. isbn: 978-84-206-4773-9.

[9] Goldrei, Derek. *Classic Set Theory For Guided Independent Study*. Champman & Hall, 1996. isbn: 978-0-412-60610-6.

[10] González López, Víctor. *El Axioma de Determinación*. Universidad de Murcia. Jun. de 2016. url: http://www.um.es/web/matematicas/tfg-axioma-determinacion-gonzalez-lopez-2016.

[11] Jech, Thomas. *Set Theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, 2003. https://doi.org/10.1007/3-540-44761-X.

[12] Jech, Thomas. *The Axiom of Choice*. Dover Publications, 2008. isbn: 978-0-486-46624-8.

[13] Kechris, Alexander. *Classical Descriptive Set Theory*. Vol. 256. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1995. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4190-4.

[14] Levy, Azriel. *Basic Set Theory*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1979. isbn: 978-0-387-08417-6.

[15] López Camino, Rafael. *Topología*. Editorial Universidad de Granada, 2014. isbn: 978-84-338-5676-0.

[16] Moore, Gregory H. *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence*. Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer-Verlag, 1982. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9478-5.

[17] Potter, Michael. *Set Theory and Its Philosophy*. Oxford University Press, 2004. isbn: 978-0-19-927041-5.

[18] Royden, Halsey L. *Real Analysis*. Macmillan Publishing Company, 1988. isbn: 978-0-02-404151-7.

[19] Stewart, Ian y Tall, David. *The Foundations of Mathematics*. Oxford University Press, 1977. isbn: 978-0-19-853165-4.

[4] Para consultar una prueba de esto véanse el trabajo de González López [10] o el libro de Jech [11].