TEMat

Dominación *sparse* y el teorema A_2

Israel P. Rivera-Ríos
Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea
BCAM - Basque Center for Applied Mathematics
petnapet@gmail.com

Resumen: El objetivo de este trabajo no es otro que presentar, a modo introductorio, un resultado de dominación *sparse* puntual para operadores de Calderón-Zygmund. Este resultado se encuadra dentro de una teoría más amplia que se ha desarrollado, y, de hecho, aún sigue desarrollándose, en los últimos años: la teoría de dominación *sparse*, cuya filosofía consiste en controlar operadores clásicos en análisis armónico por operadores diádicos más sencillos de manejar a la hora de obtener desigualdades con pesos.

Abstract: The purpose of this paper is to introduce a pointwise sparse domination result for Calderón-Zygmund operators. This result can be regarded in a wider framework that has blossomed in the last years, the so-called sparse domination theory, that consists in dominating classic operators in harmonic analysis by dyadic operators that are easier to handle to obtain weighted estimates.

Palabras clave: pesos A_p, operador maximal de Hardy-Littlewood, operadores de Calderón-Zygmund, análisis diádico, operadores *sparse*.

MSC2010: 42B20, 42B25.

Recibido: 30 de noviembre de 2017.
Aceptado: 13 de febrero de 2018.

Agradecimientos: Querría expresar mi agradecimiento a mi director de tesis, Carlos Pérez Moreno, por su continuo estímulo en mi labor investigadora y por aquella escuela Santaló que organizó en el año 2014, que incluyó un curso del profesor A. Lerner sobre dominación *sparse*, el cual me hizo comenzar a interesarme en dicho tema. También me gustaría dar las gracias a Javier Martínez Perales y a los revisores por sus observaciones y sugerencias.

Referencia: Rivera-Ríos, Israel P. «Dominación *sparse* y el teorema A_2». En: *TEMat*, 2 (2018), págs. 53-65. ISSN: 2530-9633. URL: https://temat.es/articulo/2018-p53/.

1. Introducción. Desigualdades con pesos y el operador maximal de Hardy-Littlewood

El objetivo fundamental de este trabajo es presentar un caso particular de dominación *sparse*, el de los operadores de Calderón-Zygmund. En los últimos años este tipo de resultados han tenido un rol fundamental en la teoría de pesos, dentro de la cual han permitido obtener nuevos resultados y simplificar las pruebas de resultados ya conocidos. Para el lector que no esté familiarizado con el tema, las líneas anteriores deben resultar algo incomprensibles. Vamos, por tanto, a empezar desde el principio.

Recordamos que dada una función $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, es decir, una función cuya integral es integrable Lebesgue en cualquier conjunto acotado medible, el operador maximal de Hardy-Littlewood se define como

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde el supremo se toma sobre todos los Q a los que pertenece x. En lo que sigue, denotaremos por x_j a la j-ésima componente de $x \in \mathbb{R}^n$; cada Q será un cubo de $\mathbb{R}^n$, es decir, $Q = [a_1, a_1 + l(Q)] \times \cdots \times [a_n, a_n + l(Q)]$ donde $l(Q) > 0$ es el lado del cubo, y $|E|$ denotará la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ del conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^n$.

Es bien conocido que el operador maximal es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ o que es de tipo fuerte (p, p) para $1 < p < \infty$, es decir, que

$$\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le c_n p' \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

donde $\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$, $c_n > 0$ es una constante dimensional independiente de f y p' es el exponente conjugado de p, que se define como $p' = \frac{p}{p-1}$. En el caso $p = 1$ no es difícil ver que M no es acotado en L^1. Para ver esto en el caso $n = 1$, basta tomar $f = \chi_{[0,1]}$, es decir, la función que vale 1 en el intervalo $[0, 1]$ y 0 en los demás puntos. Pese a no ser de tipo fuerte $(1, 1)$, el operador maximal aún satisface una desigualdad de tipo débil $(1, 1)$, es decir,

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \le c_n \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

donde $\|g\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{t>0} t\,|\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > t\}|$. Este último resultado puede encontrarse en las referencias clásicas [9, 15, 16].

Notación. En lo que sigue, y en el espíritu de las estimaciones que acabamos de presentar para el operador maximal, denotaremos por c a las constantes de acotación independientes de f. Los subíndices, si aparecen, denotarán la dependencia de los correspondientes parámetros. Por ejemplo, si c solo depende de la dimensión, denotaremos por c_n a la constante en cuestión. Si dependiese también de p, escribiríamos $c_{n,p}$. También nos tomaremos la libertad de omitir la mención a $\mathbb{R}^n$ al referirnos a $L^p(\mathbb{R}^n)$, escribiendo únicamente L^p. Procederemos de forma análoga con $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. ◂

En los años 70, motivado por la idea de obtener resultados para cierto tipo de problemas de convergencia de series de ortogonales, Muckenhoupt [32] caracterizó la acotación en L^p con pesos del operador maximal de Hardy-Littlewood.

Definición 1. Llamaremos **peso** a toda función no negativa localmente integrable. ◂

La caracterización de Muckenhoupt fue la siguiente. Para $1 < p < \infty$ estableció que, dado un peso w,

$$\|Mf\|_{L^p(w)} \le c_{p,n,w} \|f\|_{L^p(w)}, \tag{1}$$

donde $\|g\|_{L^p(w)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p w(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$, si y solo si $w \in A_p$, es decir, si la constante A_p de w, definida como

$$[w]_{A_p} = \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)\,\mathrm{d}x \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{1}{1-p}}\,\mathrm{d}x\right)^{p-1},$$

es finita. En el caso $p = 1$, la desigualdad

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_{n,w}\|f\|_{L^1(w)}, \tag{2}$$

donde $\|g\|_{L^{1,\infty}(w)} = \sup_{t>0} t\,w(\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > t\})$ con $w(E) = \int_E w(x)\,\mathrm{d}x$, se verifica si y solo si $w \in A_1$, es decir, si existe $\kappa > 0$ tal que

$$Mw(x) \leq \kappa w(x) \qquad \text{c.t.p. } x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Llamaremos constante A_1 de w, $[w]_{A_1}$, al menor de los $\kappa > 0$ tales que (3) se verifica.

Recordamos que, por el teorema de diferenciación de Lebesgue, para toda función localmente integrable se tiene que $|f(x)| \leq Mf(x)$ en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. Teniendo esto en cuenta, lo que la condición A_1 nos dice es que, si $w \in A_1$, entonces w es «tan grande» como Mw, ya que

$$w(x) \leq Mw(x) \leq [w]_{A_1} w(x) \qquad \text{c.t.p. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Observación 1. Llegado este punto, conviene notar que (1) y (2) contienen como caso particular a las desigualdades sin peso sin más que tomar $w = 1$. ◂

2. Operadores de Calderón-Zygmund

Desde los resultados de Muckenhoupt, multitud de autores han dedicado trabajos al estudio de desigualdades con pesos A_p y variantes de los mismos para diversos operadores. Una de las clases de operadores que ha recibido mayor atención es la de los operadores singulares. Empezamos presentando primero algunos ejemplos. Dada una función f «lo suficientemente buena» (por ejemplo, infinitamente diferenciable y con soporte compacto), definimos su **transformada de Hilbert** como

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y}\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Observamos que $\frac{1}{x}$ no es localmente integrable; sin embargo, tiene cierta propiedad de «cancelación», ya que $\int_{-R}^{R} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 0$ para todo $R > 0$. Asumiendo f «suficientemente buena», este hecho permite dotar de sentido la definición en (4) (ver cualquiera de los libros clásicos [9, 15, 16]). Hunt, Muckenhoupt y Wheeden [17] demostraron que la transformada de Hilbert satisface las siguientes propiedades:

1. Si $w \in A_p$, con $1 < p < \infty$, entonces,

   $$\|Hf\|_{L^p(w)} \leq c_{n,p,w}\|f\|_{L^p(w)}. \tag{5}$$

   Más aún, el recíproco también es cierto, es decir, si se verifica (5), entonces $w \in A_p$.
2. Si $w \in A_1$, entonces,

   $$\|Hf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_{n,w}\|f\|_{L^1(w)}. \tag{6}$$

Existen análogos n-dimensionales para la transformada de Hilbert, las transformadas de Riesz, que se definen de la siguiente forma: para cada f «suficientemente buena» definimos la **transformada de Riesz** j-ésima, $j = 1, 2, \ldots, n$, como

$$R_j f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Estos operadores también satisfacen (5) y (6). En este caso, es nuevamente la cancelación de $\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}$ lo que permite darle sentido a la defintión para funciones «buenas» [9, 15, 16]. Estos operadores son casos particulares de una clase más general, la de los operadores de Calderón-Zygmund.

Definición 2. Decimos que un operador lineal T es un **operador de Calderón-Zygmund** si existe $C_{T,2} > 0$ tal que

$$\|Tf\|_{L^2} \le C_{T,2}\|f\|_{L^2}$$

y, además, existe una función $K\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^n\} \to \mathbb{R}$, es decir, una función localmente integrable fuera de la diagonal, tal que para toda función f infinitamente diferenciable y con soporte compacto, es decir, nula salvo en un conjunto compacto, tenemos que si x no está en el soporte de f, entonces

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Adicionalmente, K deberá satisfacer las siguientes propiedades:

1. Condición de tamaño:
$$|K(x,y)| \le \frac{C_K}{|x-y|^n}, \qquad x \ne y.$$

2. Condición de regularidad: si $2|x-x'| \le |x-y|$, entonces
$$|K(x,y)-K(x',y)| + |K(y,x)-K(y,x')| \le \omega\left(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\right)\frac{1}{|x-y|^n},$$
donde ω es un módulo de continuidad, es decir, $\omega : [0,1) \to [0,\infty)$ es una función con $\omega(0) = 0$, continua, creciente y subaditiva (esto es, tal que $\omega(a+b) \le \omega(a) + \omega(b)$ con $a, b \in [0,1)$). Supondremos también que ω satisface la condición de Dini, es decir, que
$$\|\omega\|_{\mathrm{Dini}} = \int_0^1 \omega(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty.$$ ◂

Nuevamente, esta clase de operadores satisface las estimaciones (5) y (6), resultado debido en el caso fuerte a Coifman y Fefferman [3]. Además, como apuntábamos antes, tanto la transformada de Hilbert como las transformadas de Riesz encajan dentro de esta definición sin más que elegir $K(x,y) = \frac{1}{x-y}$, en el caso de la transformada de Hilbert, o $K(x,y) = \frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}$, en el caso de las transformadas de Riesz.

3. Estimaciones cuantitativas

Hasta ahora, en todas las estimaciones con pesos que hemos visto aparecía una constante con una dependencia en el peso indeterminada. Esencialmente en la última década ha surgido un gran interés por las llamadas estimaciones cuantitativas, es decir, estimaciones en las que se establece de forma cuantitativa la dependencia de la constante A_p del peso. Los primeros resultados que se dieron en esta dirección se remontan a inicios de los años 90 y se deben a Buckley [2], que en su tesis estableció la siguiente estimación para el operador maximal de Hardy-Littlewood: si $w \in A_p$ y $1 < p < \infty$, entonces

$$\|Mf\|_{L^p(w)} \le c_{n,p}[w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}\|f\|_{L^p(w)}$$

y el exponente es el mejor posible en el sentido de que, al reemplazarlo por otro más pequeño, la desigualdad falla. En el caso $p = 1$, el resultado se sigue de la desigualdad de Fefferman-Stein [13]. Dado un peso cualquiera w, se tiene que

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \le c_n\|f\|_{L^1(Mw)},$$

de lo cual se sigue, teniendo en cuenta la definición de peso A_1, que

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \le c_n[w]_{A_1}\|f\|_{L^1(w)}.$$

Buckley también estableció una estimación para operadores singulares, pero no era la mejor posible. En cualquier caso, sus resultados no recibieron inicialmente demasiada atención. En 2001, Astala, Iwaniec y Saksman [1] redujeron la posibilidad de obtener una automejora de la integrabilidad de las derivadas de la ecuación de Beltrami a probar la dependencia lineal en la constante A_2 de la transformada de Beurling. En otras palabras, si B es la transformada de Beurling, las soluciones de la ecuación de Beltrami tendrían la citada automejora en caso de verificarse la siguiente estimación:

$$\|Bf\|_{L^2(w)} \leq c_{n,2,B}[w]_{A_2}\|f\|_{L^2(w)}, \qquad w \in A_2. \tag{7}$$

Petermichl y Volberg [36] demostraron que, efectivamente, (7) se verifica. No mucho después, Petermichl obtuvo resultados análogos para la transformada de Hilbert y las de Riesz [34, 35], que, combinados con un resultado de extrapolación [8], permitían obtener la siguiente estimación:

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq c_{n,p,T}[w]_{A_p}^{\text{máx}\left\{1,\frac{1}{p-1}\right\}}\|f\|_{L^p(w)}, \qquad w \in A_p, \tag{8}$$

donde T es la transformada de Hilbert o cualquiera de las transformadas de Riesz. Observamos que dicho exponente es además el mejor posible, resultado debido a Buckley [2].

Teniendo en cuenta que los operadores que hemos mencionado más arriba tenían dependencia lineal en la constante A_2, la pregunta natural, que fue conocida como conjetura A_2, era si dicha dependencia se verificaba también para todo operador de Calderón-Zygmund T, es decir, si

$$\|Tf\|_{L^2(w)} \leq c_{n,2,T}[w]_{A_2}\|f\|_{L^2(w)}, \qquad w \in A_2. \tag{9}$$

Un buen número de autores se interesó por este problema, aportando respuestas parciales o nuevas vías para atacar el problema. Sin embargo, fue Hytönen el que consiguió convertir en teorema la conjetura A_2, en un trabajo que acabó siendo publicado en *Annals of Mathematics* [18].

4. Dominación *sparse*

Alrededor de la conjetura (ya teorema) A_2 y bajo la influencia de la misma, un buen número de autores ha dedicado parte de su labor en los últimos años a abordar la cuestión de establecer distintos tipos de desigualdades cuantitativas para diversos operadores. Esto ha llevado, entre otras cosas, a un aumento del nivel de comprensión de la teoría y al desarrollo de una depurada forma de estudiar los distintos operadores reemplazándolos por objetos diádicos más manejables, en el contexto de lo que ha venido a denominarse teoría de dominación *sparse*. Para presentar el marco en el que se desarrolla dicha teoría empezaremos tomando prestadas de Lerner y Nazarov [26] algunas definiciones fundamentales.

Dado un cubo Q de $\mathbb{R}^n$ es posible construir una red de cubos diádicos de Q de la siguiente forma.

1. Definimos a la familia $\mathcal{D}_0(Q)$ como $\mathcal{D}_0(Q) = \{Q\}$.
2. La familia $\mathcal{D}_1(Q)$ es la constituida por los 2^n subcubos que se obtienen al dividir a Q en 2^n cubos iguales.
3. Inductivamente, dado $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}_{k+1}(Q)$ es la familia constituida por los $2^{(k+1)n}$ subcubos obtenidos al dividir a cada $P \in \mathcal{D}_k(Q)$ en 2^n subcubos iguales. Si $R \in \mathcal{D}_{k+1}(Q)$ está contenido en $P \in \mathcal{D}_k(Q)$ diremos que R es hijo de P y también que P es el padre de R.

Llamaremos red diádica de Q o asociada a Q a la familia

$$\mathcal{D}(Q) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}_k(Q).$$

Una propiedad interesante de $\mathcal{D}(Q)$ es que, si $P, Q \in \mathcal{D}(Q)$, entonces necesariamente $P \cap Q \in \{P, Q, \emptyset\}$. Podemos visualizar la construcción de las generaciones 0, 1 y 2 en la figura 1.

Apoyándonos en la definición anterior vamos a presentar la definición de retículo diádico, que será el ambiente natural para definir el concepto de familia *sparse*, clave para construir los llamados operadores *sparse*.

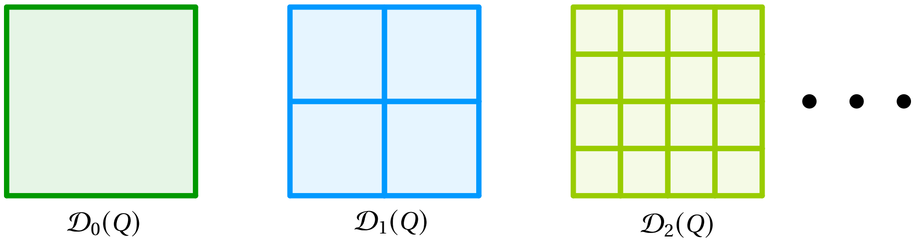

Figura 1: Generaciones 0, 1 y 2 para un cubo Q.

Definición 3. Decimos que una familia $\mathcal{D}$ de cubos de $\mathbb{R}^n$ es un **retículo diádico** si verifica las siguientes propiedades:

1. Si $Q \in \mathcal{D}$ entonces todos sus descendientes diádicos están en $\mathcal{D}$. En otras palabras: si $Q \in \mathcal{D}$, entonces $\mathcal{D}(Q) \subset \mathcal{D}$.
2. Si $P, Q \in \mathcal{D}$, existe un ancestro común a ambos, es decir, existe $R \in \mathcal{D}$ tal que $P, Q \in \mathcal{D}(R)$.
3. Para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ existe $Q \in \mathcal{D}$ tal que $K \subset Q$. ◂

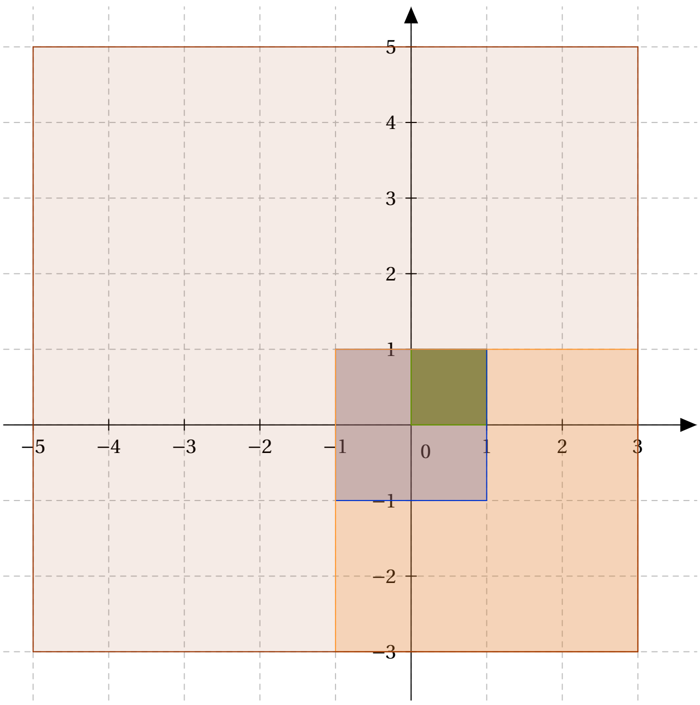

Figura 2: Sucesión de cubos en $\mathbb{R}^2$ adecuada para construir un retículo diádico.

Observación 2. Un método para construir un retículo diádico es el siguiente. Partiendo de un cubo Q_0, consideramos una sucesión de cubos $\{Q_j\}_{j=0}^{\infty}$ de manera que para cada $j > 0$ se tiene que Q_j tiene un vértice común con Q_{j-1} y $l(Q_j) = 2l(Q_{j-1})$ y, adicionalmente, $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=0}^{\infty} Q_j$ (ver figura 2). Para dicha sucesión es sencillo ver que

$$\mathcal{D} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{D}(Q_j)$$

es un retículo diádico. ◂

Llegados a este punto estamos en disposición de presentar la definición de familia *sparse* (que en castellano vendría a traducirse como familia dispersa).

Definición 4. Sea $\mathcal{D}$ un retículo diádico. Sea $\eta \in (0,1)$. Decimos que una familia $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ es ***η*-*sparse*** si

1. Para cada $Q \in \mathcal{S}$ existe un subconjunto medible $E_Q \subset Q$ tal que
$$\eta|Q| \leq |E_Q|.$$
2. Los conjuntos E_Q son disjuntos dos a dos. ◂

Un primer ejemplo de familia *sparse* es la familia de intervalos $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ con $I_k = [0, 2^{-k}]$. En este caso basta con tomar $E_k = I_k \setminus I_{k+1}$.

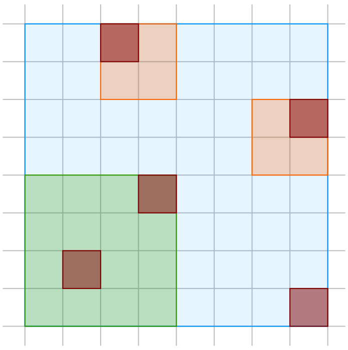

Figura 3: Ejemplo de familia $\frac{1}{2}$-*sparse*.

En la figura 3 podemos ver otro ejemplo de familia $\frac{1}{2}$-*sparse*. Para comprobar esto basta con tomar $E_Q = Q \setminus \cup_{P\in\mathcal{S}:P\subsetneq Q} P$ o simplemente un subconjunto de medida $\frac{1}{2}|Q|$ en el caso en que el cubo Q no tenga ningún subcubo.

En el siguiente teorema presentamos, por fin, uno de los resultados paradigmáticos dentro de lo que se conoce como teoría de dominación *sparse*, la dominación *sparse* puntual para operadores de Calderón-Zygmund.

Teorema 1. *Sea T un operador de Calderón-Zygmund. Sea $\varepsilon \in (0,1)$. Para cada función f integrable con soporte compacto, existen 3^n retículos diádicos $\mathcal{D}_j$ y 3^n familias $\frac{1-\varepsilon}{3^n}$*-sparse *$\mathcal{S}_j \subset \mathcal{D}_j$ tales que*
$$|Tf(x)| \leq \frac{c_n c_T}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{3^n} A_{\mathcal{S}_j}|f|(x) \qquad \text{c.t.p. } x \in \mathbb{R}^n,$$
donde
$$A_{\mathcal{S}}f(x) = \sum_{Q\in\mathcal{S}} \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)\,\mathrm{d}y\,\chi_Q(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$
siendo $A_{\mathcal{S}}$ el operador al que conocemos como operador sparse *y $c_T = C_{T,2} + C_K + \|\omega\|_{Dini}$ (ver definición 2).*

Observación 3. Puede parecer un problema el hecho de que las familias *sparse* elegidas dependan de f; sin embargo, a efectos prácticos, dicha circunstancia no restringe la aplicabilidad del resultado, dado que, como veremos algo más adelante, este tipo de dominación se utilizará para obtener estimaciones independientes de la familia *sparse*.

Por otra parte, otra observación interesante [33] es que, fijado un cubo de una familia *sparse*, el conjunto de puntos de dicho cubo que están contenidos en una cantidad infinita de cubos de la familia tiene medida cero. Esta propiedad hace posible que los operadores *sparse* estén bien definidos para funciones integrables. ◂

El teorema 1 fue obtenido de forma independiente por Conde-Alonso y Rey [5] y Lerner y Nazarov [26] para operadores de Calderón-Zygmund con módulo de continuidad satisfaciendo una condición algo menos general que la condición de Dini en la definición 2. Más tarde, Lacey [21] extendió el resultado a operadores satisfaciendo la condición de Dini. A este trabajo de Lacey le siguió otro de Hytönen, Roncal y Tapiola [20] en el que se obtenía la versión cuantitativa con la constante c_T que hemos presentado aquí. Finalmente, Lerner [23] obtuvo una prueba sumamente elegante de dicho resultado cuantitativo, basada en el control de un operador de tipo maximal asociado a T. Dicha técnica ha sido aplicada exitosamente en otros contextos, como el matricial [33], el de los conmutadores [30] o incluso en sentido de dominación «bilineal» a integrales singulares «*rough*» [24] (ver el artículo de Conde-Alonso, Culiuc, Di Plinio y Ou [4] para la prueba original de dicho resultado y la sección 6 para algunos detalles adicionales) o a los conmutadores de las mismas [37]. De cara a introducirse al análisis diádico y a la teoría de dominación *sparse*, recomendamos al lector la lectura del estudio de Lerner y Nazarov [26] y las notas de Hytönen [19].

De alguna manera, los resultados de dominación *sparse* pueden considerarse como una actualización del principio de Calderón-Zygmund. Dicho principio afirmaba que «para cada operador singular debería existir un operador maximal adecuado que lo controlase en algún sentido». Por ejemplo, si T es un operador de Calderón-Zygmund, Coifman y Fefferman [3] establecieron, esencialmente, que, si $w \in A_q$ para algún $q \geq 1$, entonces

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq c_{n,T,p,w}\|Mf\|_{L^p(w)}, \qquad 0 < p < \infty.$$

A la vista del teorema 1, la actualización de este principio podría enunciarse del siguiente modo: «para cada operador singular existe un operador *sparse* adecuado que controla a dicho operador en algún sentido».

5. Una prueba simple del teorema A_2

Para ilustrar el uso de las técnicas de dominación *sparse* vamos a presentar una prueba del teorema A_2. Para dicho fin necesitaremos un resultado previo que tomamos prestado de Lerner y Nazarov [26, theorem 15.1].

Teorema 2. *Sean $\mathcal{D}$ un retículo diádico y w un peso. Definimos el operador maximal $M_w^{\mathcal{D}}$ como*

$$M_w^{\mathcal{D}}f(x) = \sup_{Q\in\mathcal{D}\,:\,Q\ni x} \frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(y)|w(y)\,\mathrm{d}y.$$

Entonces:

1. *Si $1 < p < \infty$,*
$$\|M_w^{\mathcal{D}}f\|_{L^p(w)} \leq p'\|f\|_{L^p(w)}.$$
2. *Si $p = 1$,*
$$\|M_w^{\mathcal{D}}f\|_{L^{1,\infty}} \leq \|f\|_{L^1(w)}.$$

El resultado que acabamos de presentar nos dice, básicamente, que el operador maximal diádico con respecto a cierto peso, que en nuestro caso va a ser un peso A_2, es acotado en L^p con constante independiente del peso.

Otro ingrediente fundamental de la prueba será la expresión de la norma por dualidad. En el caso particular $p = 2$, si $g \in L^2(w)$, entonces,

$$\|g\|_{L^2(w)} = \sup_{\|h\|_{L^2(w)}=1}\left|\int_{\mathbb{R}^n} g(x)h(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

Con estos resultados a nuestra disposición ya podemos probar el teorema A_2. Empezamos observando que, en virtud del teorema 1,

$$\|Tf\|_{L^2(w)} \leq c_n c_T \sum_{j=1}^{3^n} \|A_{\mathcal{S}_j}(|f|)\|_{L^2(w)}.$$

Por tanto, basta con establecer la estimación para operadores *sparse*. Recogemos dicha estimación en el siguiente lema.

Lema 3. *Sean $\mathcal{S}$ una familia η-sparse y $w \in A_2$. Entonces,*

$$\|A_{\mathcal{S}}f\|_{L^2(w)} \leq \frac{4}{\eta}[w]_{A_2}\|f\|_{L^2(w)}.$$

Demostración. Expresando la norma por dualidad tenemos que

$$\|A_{\mathcal{S}}f\|_{L^2(w)} = \sup_{\|h\|_{L^2(w)}=1}\left|\int_{\mathbb{R}^n} A_{\mathcal{S}}f(x)h(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right|, \tag{10}$$

de manera que basta con acotar $\left|\int_{\mathbb{R}^n} A_{\mathcal{S}}f(x)h(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right|$. Observamos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} A_{\mathcal{S}}f(x)h(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} A_{\mathcal{S}}(|f|)(x)|h(x)|w(x)\,\mathrm{d}x,$$

lo cual nos permite asumir que $f, h \geq 0$. Hecha esta reducción y llamando $\sigma = w^{-1}$, procedemos como sigue:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} A_{\mathcal{S}}f(x)h(x)w(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{Q\in\mathcal{S}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_Q h(y)w(y)\,\mathrm{d}y\right)\\
&\leq \sum_{Q\in\mathcal{S}}\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q \frac{f(y)}{\sigma(y)}\sigma(y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q h(y)w(y)\,\mathrm{d}y\right)\frac{w(Q)\sigma(Q)}{|Q|}\\
&\leq \sup_Q\left\{\frac{w(Q)\sigma(Q)}{|Q|^2}\right\}\sum_{Q\in\mathcal{S}}\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q \frac{f(y)}{\sigma(y)}\sigma(y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q h(y)w(y)\,\mathrm{d}y\right)|Q|.
\end{aligned}$$

Observamos que el supremo que aparece en el último paso no es otra cosa que la constante A_2, de manera que bastará con obtener una estimación de la suma independiente de dicha constante. Por la definición del operador maximal diádico respecto a un peso, está claro que

$$\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q \frac{f(y)}{\sigma(y)}\sigma(y)\,\mathrm{d}y\right) \leq \inf_{z\in Q} M_\sigma^{\mathcal{D}}\left(\frac{f}{\sigma}\right)(z)$$

y también que

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q h(y)w(y)\,\mathrm{d}y\right) \leq \inf_{z\in Q} M_w^{\mathcal{D}}(h)(z).$$

Por otra parte, como $\mathcal{S}$ es η-*sparse*, sabemos que para cada $Q \in \mathcal{S}$ existe un subconjunto $E_Q \subseteq Q$ tal que dichos conjuntos E_Q son disjuntos dos a dos y, además, $|Q| \leq \frac{1}{\eta}|E_Q|$. Teniendo todo esto en cuenta,

$$\begin{aligned}
&[w]_{A_2}\sum_{Q\in\mathcal{S}}\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q \frac{f(y)}{\sigma(y)}\sigma(y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q h(y)w(y)\,\mathrm{d}y\right)|Q|\\
&\leq [w]_{A_2}\frac{1}{\eta}\sum_{Q\in\mathcal{S}}\left(\inf_{z\in Q} M_\sigma^{\mathcal{D}}\left(\frac{f}{\sigma}\right)(z)\right)\left(\inf_{z\in Q} M_w^{\mathcal{D}}(h)(z)\right)|E_Q|\\
&\leq [w]_{A_2}\frac{1}{\eta}\sum_{Q\in\mathcal{S}}\int_{E_Q} M_\sigma^{\mathcal{D}}\left(\frac{f}{\sigma}\right)(x)M_w^{\mathcal{D}}(h)(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

En este punto hacemos uso de una propiedad clave de los conjuntos E_Q, el hecho de que son disjuntos dos a dos. Dicha propiedad nos permite continuar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\eta}[w]_{A_2}\sum_{Q\in\mathcal{S}}\int_{E_Q} M_\sigma^{\mathcal{D}}\left(\frac{f}{\sigma}\right)(x)M_w^{\mathcal{D}}(h)(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\eta}[w]_{A_2}\int_{\cup_{Q\in\mathcal{S}}E_Q} M_\sigma^{\mathcal{D}}\left(\frac{f}{\sigma}\right)(x)M_w^{\mathcal{D}}(h)(x)\,\mathrm{d}x\\
&\leq \frac{1}{\eta}[w]_{A_2}\int_{\mathbb{R}^n} M_\sigma^{\mathcal{D}}\left(\frac{f}{\sigma}\right)(x)M_w^{\mathcal{D}}(h)(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\eta}[w]_{A_2}\int_{\mathbb{R}^n} M_\sigma^{\mathcal{D}}\left(\frac{f}{\sigma}\right)(x)M_w^{\mathcal{D}}(h)(x)w(x)^{\frac{1}{2}}\sigma(x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\\
&\leq \frac{1}{\eta}[w]_{A_2}\left\|M_\sigma^{\mathcal{D}}\left(\frac{f}{\sigma}\right)\right\|_{L^2(\sigma)}\|M_w^{\mathcal{D}}(h)\|_{L^2(w)} \leq \frac{4}{\eta}[w]_{A_2}\left\|\frac{f}{\sigma}\right\|_{L^2(\sigma)}\|h\|_{L^2(w)} = \frac{4}{\eta}[w]_{A_2}\|f\|_{L^2(w)}\|h\|_{L^2(w)},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia directa del teorema 2 y la última identidad se sigue de que $\left(\frac{|f|}{\sigma}\right)^2\sigma = |f|^2 w$. En resumen, hemos probado que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} A_{\mathcal{S}}f(x)h(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{4}{\eta}[w]_{A_2}\|f\|_{L^2(w)}\|h\|_{L^2(w)},$$

de manera que, tomando supremo cuando $\|h\|_{L^2(w)} = 1$ y teniendo en cuenta (10), obtenemos la estimación deseada. ■

Observación 4. Contrariamente a lo que podría parecer, la estimación establecida en el lema 3 es anterior a la prueba del teorema A_2 y se debe a Cruz-Uribe, Martell y Pérez [6]. En dicho trabajo, los autores reducían la conjetura A_2 para operadores singulares con cierta regularidad a operadores *sparse*. Fue sin embargo Lerner [22] el primero en conectar la dominación *sparse* con los operadores de Calderón-Zygmund, obteniendo así una nueva prueba del teorema A_2. El resultado de dominación *sparse* que obtuvo fue un resultado en norma, que en el caso particular que nos ocupa se enuncia como sigue:

$$\|Tf\|_{L^2(w)} \leq c\sup\|A_{\mathcal{S}}f\|_{L^2(w)},$$

donde el supremo se toma sobre todas las familias *sparse* $\mathcal{S}$ contenidas en todos los retículos diádicos posibles. Este resultado es el precursor de la dominación *sparse* que presentamos en la sección 4 y probablemente el desencadenante que llevó al desarrollo de dicha teoría. ◂

6. Más resultados basados en la dominación *sparse*

Sea $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$, donde $\mathbb{S}^{n-1}$ es la esfera $n-1$ dimensional. Por ejemplo, $\mathbb{S}^1$ es la circunferencia en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{S}^2$ es la esfera (hueca) en $\mathbb{R}^3$. Asumamos adicionalmente que $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0$. Bajo estas hipótesis, para f «suficientemente buena», el operador T_Ω definido como

$$T_\Omega f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{\Omega\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)}{|x-y|^n}f(y)\,\mathrm{d}y$$

tiene sentido [9, 15]. Las transformadas de Riesz y de Hilbert son casos particulares de esta clase de operadores. T_Ω satisface las mismas propiedades de acotación que los operadores de Calderón-Zygmund. Es de tipo fuerte (p,p) (tanto para el caso sin pesos [9] como para el caso con pesos [10]) y de tipo débil $(1,1)$ (tanto para el caso sin pesos [38] como para el caso con pesos [11, 12]). No obstante, este tipo de operador es más difícil de tratar que los operadores de Calderón-Zygmund, ya que, a diferencia de lo que ocurre con estos últimos, $K(x,y) = \frac{\Omega\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)}{|x-y|^n}$ no satisface ninguna condición de regularidad. Es por esto que en inglés se denomina a estos operadores como «*rough*».

Conde-Alonso, Culiuc, Di Plinio y Ou [4] obtuvieron una dominación *sparse* en el sentido bilineal (ver el trabajo de Lerner [24] para una prueba alternativa). El resultado es el siguiente: para cada $1 < r < \infty$, dadas f con soporte compacto e integrable y g «suficientemente buena», existen 3^n retículos diádicos $\mathcal{D}_j$ y 3^n familias *sparse* $\mathcal{S}_j \subset \mathcal{D}_j$ tales que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} T_\Omega(f)(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq c_n\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})}r'\sum_{j=1}^{3^n}\sum_{Q\in\mathcal{S}_j}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)|\,\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|g(x)|^r\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}|Q|.$$

En la práctica, este tipo de resultado permite recuperar la gran mayoría de los resultados que se pueden obtener utilizando la dominación puntual, ya que muchos de ellos (como, por ejemplo, el teorema A_2 cuya prueba vimos en la sección anterior) se basan en el uso de la norma por dualidad. Sin embargo, la presencia del promedio L^r y de r' en la estimación la hacen más «imprecisa» que el análogo para operadores de Calderón-Zygmund que se sigue trivialmente del teorema 1:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} Tf(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq c_n c_T\sum_{j=1}^{3^n}\sum_{Q\in\mathcal{S}_j}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)|\,\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|g(x)|\,\mathrm{d}x\right)|Q|.$$

En el siguiente teorema presentamos una serie de estimaciones que, en algunos casos, admiten nuevas pruebas utilizando resultados de dominación *sparse*, mientras que, en otros casos, están completamente basados en dichas técnicas. Además, contrastaremos los casos de los operadores de Calderón-Zygmund y los operadores T_Ω que acabamos de presentar. Como veremos a continuación, la mencionada «imprecisión» de la dominación *sparse* disponible para estos últimos repercute en algunos de los resultados que se pueden obtener utilizándola como ingrediente.

Teorema 4. *Sea $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ tal que $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0$. Sea T un operador de Calderón-Zygmund. Entonces:*

1. *Si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$, entonces*

$$\|T_\Omega f\|_{L^p(w)} \leq c_{n,p}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})}[w]_{A_p}^{p'}\|f\|_{L^p(w)}.$$

2. *Si $1 \leq q < p < \infty$ y $w \in A_q$, entonces*

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq c_{n,T,p,q}[w]_{A_q}\|f\|_{L^p(w)} \quad y$$
$$\|T_\Omega f\|_{L^p(w)} \leq c_{n,p,q}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})}[w]_{A_q}\|f\|_{L^p(w)}.$$

3. *Si $1 \leq p < \infty$ y $w \in A_q$ para cualquier $1 < q < \infty$, entonces*

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq c_{n,T,p,q}[w]_{A_q}\|Mf\|_{L^p(w)} \quad y$$
$$\|T_\Omega f\|_{L^p(w)} \leq c_{n,p,q}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})}[w]_{A_q}^2\|Mf\|_{L^p(w)}.$$

4. *Para $p = 1$, si $w \in A_1$, entonces*

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_{n,T}[w]_{A_1}\log(e + [w]_{A_1})\|f\|_{L^1(w)} \quad y$$
$$\|T_\Omega f\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_{n,p,q}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})}[w]_{A_1}^2\log(e + [w]_{A_1})\|f\|_{L^1(w)}$$

y en el caso de T, además, la dependencia es la mejor posible.

En el caso T_Ω, todas las estimaciones del teorema que acabamos de enunciar fueron obtenidas por Li, Pérez, Rivera-Ríos y Roncal [31]. La estimación en el apartado 1 es la mejor hasta la fecha, si bien hay ciertos indicios (por ejemplo, los resultados de Lerner [25]) de que, en el caso $p = 2$, la dependencia debería ser lineal en lugar de cuadrática. En el caso de los operadores de Calderón-Zygmund, las estimacionenes de los apartados 2 y 3 pueden obtenerse empleando esencialmente la misma prueba que presentan Li *et al.* [31], aunque son anteriores a dicho trabajo. Finalmente, en cuanto al apartado 4, en el caso de los operadores de Calderón-Zygmund la estimación superior fue obtenida por Lerner, Ombrosi y Pérez [28, 29]. Domingo-Salazar, Lacey y Rey [7] presentaron una prueba basada en la dominación *sparse* (ver también el artículo de Frey y Nieraeth [14]). El hecho de que la dependencia en la constante A_1 es la mejor posible es un resultado muy reciente debido a Lerner, Nazarov y Ombrosi [27]. En el caso de los operadores *rough* la desigualdad en el apartado 4 fue obtenida por Li *et al.* [31]. Finalmente, cabe reseñar que, en el caso de los apartados 3 y 4, Li *et al.* [31] conjeturan que la dependencia de la correspondiente constante A_p es la misma que la que se verifica para los operadores de Calderón-Zygmund.

Referencias

[1] Astala, Kari; Iwaniec, Tadeusz y Saksman, Eero. «Beltrami operators in the plane». En: *Duke Mathematical Journal* 107.1 (2001), págs. 27-56. issn: 0012-7094. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-01-10713-8.

[2] Buckley, Stephen M. *Harmonic analysis on weighted spaces.* Tesis doct. The University of Chicago, 1990.

[3] Coifman, Ralph R. y Fefferman, Charles. «Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals». En: *Studia Mathematica* 51 (1974), págs. 241-250. issn: 0039-3223. https://doi.org/10.4064/sm-51-3-241-250.

[4] Conde-Alonso, José M.; Culiuc, Amalia; Di Plinio, Francesco y Ou, Yumeng. «A sparse domination principle for rough singular integrals». En: *Analysis & PDE* 10.5 (2017), págs. 1255-1284. issn: 2157-5045. https://doi.org/10.2140/apde.2017.10.1255.

[5] Conde-Alonso, José M. y Rey, Guillermo. «A pointwise estimate for positive dyadic shifts and some applications». En: *Mathematische Annalen* 365.3-4 (2016), págs. 1111-1135. issn: 0025-5831. url: 10.1007/s00208-015-1320-y.

[6] Cruz-Uribe, David; Martell, José M. y Pérez, Carlos. «Sharp weighted estimates for classical operators». En: *Advances in Mathematics* 229.1 (2012), págs. 408-441. issn: 0001-8708. url: 10.1016/j.aim.2011.08.013.

[7] Domingo-Salazar, Carlos; Lacey, Michael y Rey, Guillermo. «Borderline weak-type estimates for singular integrals and square functions». En: *Bulletin of the London Mathematical Society* 48.1 (2016), págs. 63-73. issn: 0024-6093. https://doi.org/10.1112/blms/bdv090.

[8] Dragičević, Oliver; Grafakos, Loukas; Pereyra, M. Cristina y Petermichl, Stefanie. «Extrapolation and sharp norm estimates for classical operators on weighted Lebesgue spaces». En: *Publicacions Matemàtiques* 49.1 (2005), págs. 73-91. issn: 0214-1493. https://doi.org/10.5565/PUBLMAT_49105_03.

[9] Duoandikoetxea, Javier. *Fourier analysis.* Trad. del original de 1995 en castellano por Cruz-Uribe, David. Vol. 29. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2001, págs. xviii+222. isbn: 978-0-8218-2172-5.

[10] Duoandikoetxea, Javier y Rubio de Francia, José L. «Maximal and singular integral operators via Fourier transform estimates». En: *Inventiones Mathematicae* 84.3 (1986), págs. 541-561. issn: 0020-9910. https://doi.org/10.1007/BF01388746.

[11] Fan, Dashan y Sato, Shuichi. «Weak type $(1,1)$ estimates for Marcinkiewicz integrals with rough kernels». En: *The Tohoku Mathematical Journal. Second Series* 53.2 (2001), págs. 265-284. issn: 0040-8735. https://doi.org/10.2748/tmj/1178207481.

[12] Fan, Dashan y Sato, Shuichi. «Weighted weak type $(1,1)$ estimates for singular integrals and Littlewood-Paley functions». En: *Studia Mathematica* 163.2 (2004), págs. 119-136. issn: 0039-3223. https://doi.org/10.4064/sm163-2-2.

[13] Fefferman, Charles y Stein, Elias M. «Some maximal inequalities». En: *American Journal of Mathematics* 93 (1971), págs. 107-115. issn: 0002-9327. https://doi.org/10.2307/2373450.

[14] Frey, Dorothy y Nieraeth, Bas. «Weak and strong type $A_1 - A_\infty$ estimates for sparsely dominated operators». En: *Journal of Geometric Analysis* (2018). issn: 1559-002X. https://doi.org/10.1007/s12220-018-9989-2.

[15] García-Cuerva, José y Rubio de Francia, José L. *Weighted norm inequalities and related topics.* Vol. 116. North-Holland Mathematics Studies. Notas de Matemática 104. North-Holland Publishing Co., 1985, págs. x+604. isbn: 978-0-444-87804-5.

[16] Grafakos, Loukas. *Classical Fourier analysis.* 3.ª ed. Vol. 249. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2014, págs. xviii+638. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-1194-3.

[17] Hunt, Richard; Muckenhoupt, Benjamin y Wheeden, Richard. «Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 176 (1973), págs. 227-251. issn: 0002-9947. https://doi.org/10.2307/1996205.

[18] Hytönen, Tuomas P. «The sharp weighted bound for general Calderón-Zygmund operators». En: *Annals of Mathematics. Second Series* 175.3 (2012), págs. 1473-1506. issn: 0003-486X. https://doi.org/10.4007/annals.2012.175.3.9.

[19] Hytönen, Tuomas P. *Dyadic analysis and weights.* Apuntes de un curso en la Universidad de Helsinki. 2017. url: https://wiki.helsinki.fi/download/attachments/213996485/dyadic.pdf.

[20] Hytönen, Tuomas P.; Roncal, Luz y Tapiola, Olli. «Quantitative weighted estimates for rough homogeneous singular integrals». En: *Israel Journal of Mathematics* 218.1 (2017), págs. 133-164. issn: 0021-2172. url: 10.1007/s11856-017-1462-6.

[21] Lacey, Michael T. «An elementary proof of the A_2 bound». En: *Israel Journal of Mathematics* 217.1 (2017), págs. 181-195. issn: 0021-2172. url: 10.1007/s11856-017-1442-x.

[22] Lerner, Andrei K. «A simple proof of the A_2 conjecture». En: *International Mathematics Research Notices. IMRN* 14 (2013), págs. 3159-3170. issn: 1073-7928. url: 10.1093/imrn/rns145.

[23] Lerner, Andrei K. «On pointwise estimates involving sparse operators». En: *New York Journal of Mathematics* 22 (2016), págs. 341-349. issn: 1076-9803. url: http://nyjm.albany.edu/j/2016/22_341.html.

[24] Lerner, Andrei K. «A weak type estimate for rough singular integrals». En: *ArXiv e-prints* (mayo de 2017). arXiv: 1705.07397 [math.CA].

[25] Lerner, Andrei K. «A note on weighted bounds for rough singular integrals». En: *Comptes Rendus Mathematique* 356.1 (2018). https://doi.org/10.1016/j.crma.2017.11.016.

[26] Lerner, Andrei K. y Nazarov, Fedor. «Intuitive dyadic calculus: the basics». En: *Expositiones Mathematicae* (2018). https://doi.org/10.1016/j.exmath.2018.01.001.

[27] Lerner, Andrei K.; Nazarov, Fedor y Ombrosi, Sheldy. «On the sharp upper bound related to the weak Muckenhoupt-Wheeden conjecture». En: *ArXiv e-prints* (oct. de 2017). arXiv: 1710.07700 [math.CA].

[28] Lerner, Andrei K.; Ombrosi, Sheldy y Pérez, Carlos. «Sharp A_1 bounds for Calderón-Zygmund operators and the relationship with a problem of Muckenhoupt and Wheeden». En: *International Mathematics Research Notices. IMRN* 6 (2008). issn: 1073-7928. https://doi.org/10.1093/imrn/rnm161.

[29] Lerner, Andrei K.; Ombrosi, Sheldy y Pérez, Carlos. «A_1 bounds for Calderón-Zygmund operators related to a problem of Muckenhoupt and Wheeden». En: *Mathematical Research Letters* 16.1 (2009), págs. 149-156. issn: 1073-2780. https://doi.org/10.4310/MRL.2009.v16.n1.a14.

[30] Lerner, Andrei K.; Ombrosi, Sheldy y Rivera-Ríos, Israel P. «On pointwise and weighted estimates for commutators of Calderón-Zygmund operators». En: *Advances in Mathematics* 319 (2017), págs. 153-181. issn: 0001-8708. https://doi.org/10.1016/j.aim.2017.08.022.

[31] Li, Kangwei; Pérez, Carlos; Rivera-Ríos, Israel P. y Roncal, Luz. «Weighted norm inequalities for rough singular integral operators». En: *ArXiv e-prints* (ene. de 2017). arXiv: 1701.05170 [math.CA].

[32] Muckenhoupt, Benjamin. «Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 165 (1972), págs. 207-226. issn: 0002-9947. https://doi.org/10.2307/1995882.

[33] Nazarov, Fedor; Petermichl, Stefanie; Treil, Sergei y Volberg, Alexander. «Convex body domination and weighted estimates with matrix weights». En: *Advances in Mathematics* 318 (2017), págs. 279-306. issn: 0001-8708. https://doi.org/10.1016/j.aim.2017.08.001.

[34] Petermichl, Stefanie. «The sharp bound for the Hilbert transform on weighted Lebesgue spaces in terms of the classical A_p characteristic». En: *American Journal of Mathematics* 129.5 (2007), págs. 1355-1375. issn: 0002-9327. https://doi.org/10.1353/ajm.2007.0036.

[35] Petermichl, Stefanie. «The sharp weighted bound for the Riesz transforms». En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 136.4 (2008), págs. 1237-1249. issn: 0002-9939. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-07-08934-4.

[36] Petermichl, Stefanie y Volberg, Alexander. «Heating of the Ahlfors-Beurling operator: weakly quasiregular maps on the plane are quasiregular». En: *Duke Mathematical Journal* 112.2 (2002), págs. 281-305. issn: 0012-7094. https://doi.org/10.1215/S0012-9074-02-11223-X.

[37] Rivera-Ríos, Israel P. «Improved $A_1 - A_\infty$ and related estimates for commutators of rough singular integrals». En: *ArXiv e-prints* (mayo de 2017). arXiv: 1705.09981 [math.CA].

[38] Seeger, Andreas. «Singular integral operators with rough convolution kernels». En: *Journal of the American Mathematical Society* 9.1 (1996), págs. 95-105. issn: 0894-0347. https://doi.org/10.1090/S0894-0347-96-00185-3.