TEMat

Álgebras de Boole y la dualidad de Stone

Clara María Corbalán Mirete
Universidad de Murcia
claramaria.corbalan@um.es

Resumen: Este artículo tiene como objetivo introducir los conceptos de álgebra de Boole y espacio de Stone, así como presentar la dualidad existente entre ambos. Para ello, comenzamos presentando este tipo de álgebras, algunas de sus propiedades y sus elementos y subconjuntos más destacables: átomos, ideales, filtros y ultrafiltros. Gracias a ellos seremos capaces de demostrar el teorema de Stone, el cual cuenta con dos versiones y establece que toda álgebra de Boole $\mathfrak{B}$ es isomorfa al álgebra de los clopen sobre el espacio de los ultrafiltros de $\mathfrak{B}$. Además de esto, y ya para finalizar, probaremos que todo espacio de Stone X es homeomorfo al espacio de los ultrafiltros del álgebra de los clopen sobre X.

Abstract: The purpose of this paper is to introduce the concepts of Boolean algebra and Stone space, and to present the duality between them. In order to achieve this, we begin by presenting some of the Boolean algebra's properties and its most fundamental elements and subsets: atoms, ideals, filters and ultrafilters. Then, we will be able to prove Stone's theorem, which has two versions and states that every Boolean algebra $\mathfrak{B}$ is isomorphic to the clopen algebra on the space of ultrafilters of $\mathfrak{B}$. Finally, we will prove that every Stone space X is homeomorphic to the space of ultrafilters of the clopen algebra on X.

Palabras clave: álgebra de Boole, espacio de Stone, clopen, dual, ultrafiltro.

MSC2010: 03G05, 06E15.

Recibido: 1 de octubre de 2018.
Aceptado: 25 de febrero de 2019.

Agradecimientos: Me gustaría mostrar mi gratitud a Antonio Avilés López y a Gonzalo Martínez Cervantes, directores de mi Trabajo Final de Máster, por su ayuda, paciencia y dedicación, ya que este artículo se basa, en parte, en dicho trabajo. A los revisores por ayudarme a mejorar la calidad del mismo. A José Luis, mi amigo, por el apoyo prestado ahora y siempre. Y también a Paco porque siempre he podido contar con él.

Referencia: Corbalán Mirete, Clara María. «Álgebras de Boole y la dualidad de Stone». En: *TEMat*, 3 (2019), págs. 75-86. issn: 2530-9633. url: https://temat.es/articulo/2019-p75.

1. Introducción

Llamadas así en honor al matemático inglés autodidacta George Boole, las álgebras de Boole aparecieron por primera vez como estructura algebraica en un pequeño panfleto [1] publicado en 1847 en respuesta a la controversia generada entre el profesor Augustus De Morgan y *sir* William Hamilton acerca de la llamada «cuantificación del predicado» y, más tarde, en 1854, como parte de su trabajo más importante, *An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities* [2]. Boole intentó reducir la lógica a un álgebra sencilla que solo utilizara dos cantidades (0, 1) y tres operaciones básicas (y, o, no).

Sin embargo, en la actualidad estos trabajos únicamente poseen interés histórico, pues, a pesar de los pequeños avances que realizaron Schröder, Löwenheim y Huntington a principios de siglo, se considera que la teoría moderna de álgebras de Boole se inició en 1930 con las aportaciones de Marshall Stone y Alfred Tarski. Desde entonces ha habido un desarrollo constante de este campo. Así, en 1948, el matemático estadounidense Claude Shannon demostró que las álgebras de Boole se podían aplicar para optimizar el diseño de los sistemas de conmutación telefónica y que los circuitos con relés eran capaces de resolver problemas relacionados con ellas. De este modo, Boole se convirtió, con la ayuda de Shannon, en uno de los fundadores de la era digital.

Por otra parte, la dualidad topológica de Stone tiene su origen a la vez que la teoría moderna de álgebras de Boole y los espacios de Hausdorff compactos cero-dimensionales, también llamados espacios de Stone, pues existe una correspondencia entre los homomorfismos entre álgebras de Boole y las aplicaciones entre espacios de Stone. Como consecuencia, las cuestiones algebraicas en las álgebras de Boole se traducen en topológicas en los espacios de Stone y viceversa.

2. Álgebras de Boole

Las álgebras de Boole se definen a partir de una lista de axiomas algebraicos. Ahora nos dedicaremos a presentar las leyes aritméticas que se derivan de dichos axiomas y algunas nociones básicas acerca de estas estructuras y sobre algunos de sus subconjuntos. Las principales fuentes de referencia para la elaboración de este artículo han sido los libros de Koppelberg [5] y Jané [4]. Se recomienda su consulta para una mayor profundización en el tema.

Definición 1. Un **álgebra de Boole** es un álgebra $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, \vee^{\mathfrak{B}}, \wedge^{\mathfrak{B}}, \neg^{\mathfrak{B}}, 0^{\mathfrak{B}}, 1^{\mathfrak{B}})$, donde $\mathcal{B} \neq \emptyset$, que satisface los siguientes axiomas:

I) $\forall x, y \in \mathcal{B},\ x \vee y = y \vee x \quad \text{y} \quad x \wedge y = y \wedge x.$

II) $\forall x, y, z \in \mathcal{B},\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \quad \text{y} \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$

III) $\forall x, y, z \in \mathcal{B},\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad \text{y} \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$

IV) $\forall x \in \mathcal{B},\ x \vee \neg x = 1 \quad \text{y} \quad x \wedge \neg x = 0.$

V) $\forall x \in \mathcal{B},\ x \vee 0 = x \quad \text{y} \quad x \wedge 1 = x.$ ◂

Observación 2. Conviene tener en cuenta que los axiomas dados en la definición anterior dependen del autor, pues existen varias versiones equivalentes. Esto puede comprobarse consultando el libro de Koppelberg [5], en donde se enuncian unos axiomas similares que pueden resultar útiles para probar algunos de los resultados cuya demostración no se ha realizado. ◂

Un álgebra de Boole se dice que es **propia** si se cumple que $0^{\mathfrak{B}} \neq 1^{\mathfrak{B}}$; en otro caso, diremos que es impropia.

Si $a, b \in \mathfrak{B}$, decimos que $a \vee b$ es la unión o disyunción de a y b; que $a \wedge b$ es la intersección o conjunción de a y b, y que $\neg a$ es el complemento de a.

Definición 3. Una estructura $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, \vee^{\mathfrak{A}}, \wedge^{\mathfrak{A}}, \neg^{\mathfrak{A}}, 0^{\mathfrak{A}}, 1^{\mathfrak{A}})$ es una **subálgebra** de un álgebra de Boole $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, \vee^{\mathfrak{B}}, \wedge^{\mathfrak{B}}, \neg^{\mathfrak{B}}, 0^{\mathfrak{B}}, 1^{\mathfrak{B}})$ si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $0_{\mathfrak{A}} = 0_{\mathfrak{B}}$, $1_{\mathfrak{A}} = 1_{\mathfrak{B}}$ y las operaciones $\vee^{\mathfrak{A}}, \wedge^{\mathfrak{A}}, \neg^{\mathfrak{A}}$ son las restricciones de $\vee^{\mathfrak{B}}, \wedge^{\mathfrak{B}}, \neg^{\mathfrak{B}}$ a $\mathcal{A}$. ◂

Para todo conjunto A, el **álgebra potencia** $P(A) = (\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \,^{-}, \emptyset, A)$, donde para cada $X \subseteq A$, $\overline{X} = A \setminus X$, es un álgebra de Boole. $P(A)$ es propia si y solo si $A \neq \emptyset$.

Más generalmente, dado un conjunto A, un **álgebra de conjuntos** sobre A es una subálgebra de $P(A)$. Así, una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de A es el universo de un álgebra de conjuntos sobre A si y solo si $\emptyset, A$ son elementos de $\mathcal{B}$ y para todo $X, Y \in \mathcal{B}$ se cumple que $X \cup Y, X \cap Y, A \setminus X \in \mathcal{B}$.

Ejemplo 4 (álgebras finitas/cofinitas). Sea X un conjunto cualquiera. Un subconjunto a de X se dice que es cofinito en X si $X \setminus a$ es finito. Consideremos

$$A = \{a \subseteq X : a \text{ es finito o cofinito}\}.$$

Entonces, A es un álgebra de conjuntos sobre X, denominada álgebra finita/cofinita sobre X. Para comprobar que $a \cup b$ y $a \cap b$ pertenecen a A para $a, b \in A$, nótese que $a \cup b$ es finita si a y b son finitos, y cofinita en otro caso. Que $a \cap b \in A$ se sigue de las leyes de De Morgan $a \cap b = X \setminus ((X \setminus a) \cup (X \setminus b))$ puesto que A es cerrado bajo complementarios y uniones. ◂

Si X tiene una cardinalidad infinita $\varkappa$, entonces tiene un álgebra finita/cofinita. Puesto que X tiene exactamente $\varkappa$ subconjuntos finitos, todo cardinal infinito se corresponde con la cardinalidad de un álgeba de Boole. Un entero no negativo k, sin embargo, cumple esto si y solo si $k = 2^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, como se sigue del corolario 28.

Ejemplo 5 (álgebra de los clopen). Sea X un espacio topológico. Un subconjunto de X es un clopen si es abierto y cerrado. El conjunto de los subconjutos clopen, $\mathrm{Clop}(X)$, es un álgebra de conjuntos sobre X, denominada álgebra de los clopen sobre X. ◂

He aquí algunos primeros resultados en relación a las álgebras booleanas cuyas demostraciones, como se puede apreciar, son sencillas y rutinarias.

Lema 6. *Toda álgebra booleana cumple que*

- I) $x \vee x = x$ *y* $x \wedge x = x$.
- II) $x \wedge 0 = 0$ *y* $x \vee 1 = 1$.
- III) $\neg x$ *es el único elemento* $y \in \mathcal{B}$ *tal que* $x \wedge y = 0$ *y* $x \vee y = 1$.
- IV) $\neg\neg x = x$.
- V) *si* $\neg x = \neg y$, *entonces* $x = y$.
- VI) $\neg 0 = 1$ *y* $\neg 1 = 0$.
- VII) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ *y* $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$.
- VIII) $x \vee (x \wedge y) = x$ *y* $x \wedge (x \vee y) = x$.
- IX) $x \vee (\neg x \vee y) = 1$ *y* $x \wedge (\neg x \wedge y) = 0$.

Demostración. I) Haciendo uso de los axiomas de la definición 1 es sencillo ver que

$$x \vee x = (x \vee x) \wedge 1 = (x \vee x) \wedge (x \vee \neg x) = x \vee (x \wedge \neg x) = x \vee 0 = x.$$

De forma similar se obtiene el otro resultado.

II) En efecto,

$$x \wedge 0 = x \wedge (x \wedge \neg x) = (x \wedge x) \wedge \neg x = x \wedge \neg x = 0.$$

De forma similar se obtiene que $x \vee 1 = 1$.

III) Supongamos que $x \wedge y = 0$ y $x \vee y = 1$. Entonces, aplicando los axiomas, se tiene que

$$\begin{aligned} y &= y \wedge 1 = y \wedge (x \vee \neg x) = (y \wedge x) \vee (y \wedge \neg x) = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge y) = 0 \vee (\neg x \wedge y) \\ &= (x \wedge \neg x) \vee (\neg x \wedge y) = (\neg x \wedge x) \vee (\neg x \wedge y) = \neg x \wedge (x \vee y) = \neg x \wedge 1 = \neg x. \end{aligned}$$

IV) Aplicando los axiomas se sabe que $\neg x \vee x = x \vee \neg x = 1$ y que $\neg x \wedge x = x \wedge \neg x = 0$. Por la propiedad anterior, se tiene que $x = \neg\neg x$.

v) Si $\neg x = \neg y$, entonces $x = \neg\neg x = \neg\neg y = y$.

vi) Veamos que $\neg 0 = 1$. Sabemos que $x \vee \neg x = 1$; por tanto, $0 \vee \neg 0 = 1$ y debemos probar que $0 \vee 1 = 1$:

$$0 \vee 1 = 1 \vee 0 = (0 \vee \neg 0) \vee 0 = (0 \vee 0) \vee (\neg 0 \vee 0) = 0 \vee (\neg 0 \vee 0) = (\neg 0 \vee 0) \vee 0 = \neg 0 \vee 0 = 0 \vee \neg 0 = 1.$$

El otro caso se prueba de forma similar.

vii) Se tiene que

$$\begin{aligned}(x \vee y) \wedge \neg x \wedge \neg y &= ((x \wedge \neg x) \vee (y \wedge \neg x)) \wedge \neg y = (0 \vee (y \wedge \neg x)) \wedge \neg y = (0 \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x \wedge \neg y)\\ &= 0 \vee (y \wedge \neg y \wedge \neg x) = 0 \vee (0 \wedge \neg x) = 0 \vee 0 = 0.\end{aligned}$$

La segunda igualdad se obtiene por un argumento análogo.

viii) Es fácil comprobar que

$$x \vee (x \wedge y) = (x \wedge 1) \vee (x \wedge y) = x \wedge (1 \vee y) = x \wedge (y \vee 1) = x \wedge 1 = x.$$

De forma análoga se obtiene el segundo resultado.

ix) Por último,

$$x \vee (\neg x \vee y) = (x \vee \neg x) \vee y = 1 \vee y = 1.$$

La otra igualdad se prueba de forma similar. ■

Proposición 7. *En toda álgebra de Boole se cumple que*

i) $(x \vee y) \vee (\neg x \wedge \neg y) = 1$.

ii) $(x \vee y) \wedge (\neg x \wedge \neg y) = 0$.

Demostración. i) Tenemos que

$$\begin{aligned}(x \vee y) \vee (\neg x \wedge \neg y) &= ((x \vee y) \vee \neg x) \wedge ((x \vee y) \vee \neg y)\\ &= (y \vee (x \vee \neg x)) \wedge (x \vee (y \vee \neg y)) = (y \vee 1) \wedge (x \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1.\end{aligned}$$

ii) Se procede de manera similar. ■

Corolario 8 (leyes de De Morgan). *Toda álgebra booleana cumple que*

i) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$.

ii) $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$.

Demostración. Basta con aplicar la proposición anterior y el punto ii) del lema 6. ■

A continuación enunciaremos un principio general que, en lo que a computación se refiere, ahorra una gran cantidad de trabajo.

Definición 9. Si E es una expresión en un lenguaje cuyos únicos símbolos no lógicos son $\vee, \wedge, \neg, 0, 1$, entonces E', la **expresión dual**, se obtiene a partir de E al reemplazar los símbolos $\vee, \wedge, 0, 1$ por $\wedge, \vee, 1, 0$, respectivamente, dejando fijo $\neg$.

Una forma alternativa de interpretar E es como función de $\mathcal{B}^n$ en $\mathcal{B}$ dada por múltiples composiciones de $\vee^{\mathfrak{B}}, \wedge^{\mathfrak{B}}, \neg^{\mathfrak{B}}$. ◂

Obsérvese que $(E')'$ es E y que la expresión dual de cada uno de los axiomas anteriores es un axioma.

Definición 10. Si $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, \vee^{\mathfrak{B}}, \wedge^{\mathfrak{B}}, \neg^{\mathfrak{B}}, 0^{\mathfrak{B}}, 1^{\mathfrak{B}})$ es un álgebra de Boole, denotaremos como $\mathfrak{B}'$ al álgebra dual de $\mathfrak{B}$, cuyo universo también es $\mathcal{B}$ pero tal que $\vee^{\mathfrak{B}'} = \wedge^{\mathfrak{B}}$, $\wedge^{\mathfrak{B}'} = \vee^{\mathfrak{B}}$, $\neg^{\mathfrak{B}'} = \neg^{\mathfrak{B}}$, $0^{\mathfrak{B}'} = 1^{\mathfrak{B}}$ y $1^{\mathfrak{B}'} = 0^{\mathfrak{B}}$. ◂

Está claro que $(\mathfrak{B}')' = \mathfrak{B}$ y que todo enunciado E es verdadero en $\mathfrak{B}$ si y solo si E' lo es en $\mathfrak{B}'$. En consecuencia, $\mathfrak{B}'$ satisface los axiomas y es, por tanto, un álgebra de Boole. A partir de estas consideraciones podemos establecer el siguiente principio:

Proposición 11 (principio de dualidad). *Si E es un enunciado verdadero en toda álgebra de Boole, su dual E' también lo es.*

Demostración. Sea E tal enunciado y sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Boole. Veamos que E' es verdadero en $\mathfrak{B}$.

Dado que $\mathfrak{B}'$ es un álgebra de Boole, se tiene que E es verdadero en $\mathfrak{B}'$. Por tanto, como sabemos que todo enunciado E es verdadero en $\mathfrak{B}$ si y solo si E' lo es en B', se tiene que E' es verdadero en $(\mathfrak{B}')'$. Pero $(\mathfrak{B}')' = \mathfrak{B}$. Por tanto, se tiene que, tal y como queríamos probar, E' es verdadero en $\mathfrak{B}$. ∎

Seguidamente, definiremos una relación de orden en las álgebras de Boole, pero antes debemos probar un primer resultado.

Lema 12. *En toda álgebra de Boole se cumple que*

$$x \wedge y = x \iff x \vee y = y.$$

Demostración. Supongamos que $x \wedge y = x$. Haciendo uso de los axiomas se tiene que

$$\begin{aligned} y &= y \wedge 1 = y \wedge (x \vee \neg x) = (y \wedge x) \vee (y \wedge \neg x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge \neg x) \\ &= x \vee (y \wedge \neg x) = (x \vee y) \wedge (x \vee \neg x) = (x \vee y) \wedge 1 = x \vee y. \end{aligned}$$

Para la implicación contraria deberemos utilizar esto mismo haciendo uso del principio de dualidad. Así, sabemos que, si $y \wedge x = y$, entonces $y \vee x = x$. Por dualidad, se tiene que, si $y \vee x = y$, entonces $y \wedge x = x$. Y, finalmente, por el axioma I) de la definición 1, se tiene que, si $x \vee y = y$, entonces $x \wedge y = x$. ∎

Definición 13. Dada un álgebra de Boole $\mathfrak{B}$, definimos el **orden canónico** de $\mathfrak{B}$, al que denotaremos como $\leq^{\mathfrak{B}}$ o simplemente $\leq$, como

$$x \leq y \iff x \wedge y = x.$$

O, equivalentemente,

$$x \leq y \iff x \vee y = y.$$ ◂

Lema 14. *El orden canónico de un álgebra de Boole es un orden parcial, pues*

I) $x \leq x$*;*

II) *si* $x \leq y$ *e* $y \leq x$*, entonces* $x = y$*;*

III) *si* $x \leq y$ *e* $y \leq z$*, entonces* $x \leq z$*.*

Demostración. I) Como vimos en el lema 6, se tiene que $x \wedge x = x$. Por tanto, se tiene que $x \leq x$ por la definición de orden.

II) Si $x \leq y$ e $y \leq x$, por la definición, se tiene que $x = x \wedge y$ e $y = y \wedge x$. Entonces, por el axioma I), se tiene que $x = y$.

III) Si $x \leq y$ e $y \leq z$, por definición, $x = x \wedge y$ e $y = y \wedge z$. Por tanto,

$$x \wedge z = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y = x.$$

Así, $x \leq z$. ∎

Proposición 15. *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Boole,*

I) $(\mathcal{B}, \leq)$ *es un retículo, es decir, para cada par de elementos* $\{x, y\}$ *existen un supremo,* $x \vee y$*, y un ínfimo,* $x \wedge y$*.*

II) 1 *es el elemento máximo y* 0*, el mínimo de* $(\mathcal{B}, \leq)$*.*

Demostración. I) Veamos que el supremo de $\{x, y\}$ es $x \vee y$. Se tiene que $x \leq x \vee y$, pues

$$x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y.$$

Sea z una cota superior arbitraria de x e y, es decir, $y \leq z$ y $x \leq z$. Por tanto,

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee z = z.$$

Se tiene, pues, que $x \vee y \leq z$, lo que prueba que $x \vee y$ es la menor cota superior de $\{x, y\}$.

El caso del ínfimo resulta análogo por dualidad.

II) Dado que $x \vee \neg x = 1$, 1 es el supremo de $\{x, \neg x\}$. En particular, $x \leq 1, \forall\, x$. ■

Lema 16. *Si $x \leq x'$ e $y \leq y'$, entonces $x \vee y \leq x' \vee y'$, $x \wedge y \leq x' \wedge y'$ y, además, $\neg x' \leq \neg x$.*

Lema 17. *En toda álgebra de Boole $\mathfrak{B}$ se cumple que*

I) *$x \leq y$ si y solo si $\neg y \leq \neg x$ si y solo si $x \wedge \neg y = 0$.*

II) *$z \wedge x \leq y$ si y solo si $x \leq \neg z \vee y$.*

Definición 18. Un álgebra de Boole se dirá **completa** si todo conjunto tiene un supremo. ◂

Definición 19. Un **homomorfismo** entre dos álgebras de Boole $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ es una aplicación $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ tal que, para todo $x, y \in \mathcal{A}$,

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y), \quad f(\neg x) = \neg f(x), \quad f(0) = 0 \quad \text{y} \quad f(1) = 1.$$

Un homomorfismo $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ entre dos álgebras de Boole es un monomorfismo o embebimiento si es inyectivo. Y diremos que es epimorfismo si es suprayectivo. ◂

Definición 20. Un isomorfismo $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ entre álgebras de Boole es un monomorfismo que además es epimorfismo. ◂

Proposición 21. *Supongamos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son dos álgebras de Boole y que f es una biyección entre ellas. Entonces, f es un isomorfismo entre las álgebras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ si y solo si f es un isomorfismo entre los órdenes $(\mathcal{A}, \leq^{\mathfrak{A}})$ y $(\mathcal{B}, \leq^{\mathfrak{B}})$.*

Demostración. Por la proposición 15 tenemos definidos los símbolos lógicos en términos del orden. La demostración se deja para el lector. ■

2.1. Átomos, ultrafiltros y el teorema de Stone

Esta sección está destinada a enunciar teorema de Stone, el cual tiene dos versiones, la versión conjuntista y la topológica, cuyas demostraciones veremos más adelante.

Notación 22. Habitualmente se identifica $\mathcal{B}$ con $\mathfrak{B}$; por ello, a partir de ahora escribiremos $x \in \mathfrak{B}$ cuando un elemento x pertenezca al álgebra. ◂

Definición 23. Llamaremos **átomo** en un álgebra de Boole a todo elemento $a \in \mathfrak{B}$ distinto de 0 tal que $\{b \in \mathfrak{B} : b \leq a\} = \{0, a\}$. Denotaremos como $\operatorname{At}\mathfrak{B}$ al conjunto de los átomos de $\mathfrak{B}$.

Diremos que $\mathfrak{B}$ es un álgebra atómica si para todo elemento $x \in \mathfrak{B}$ distinto de 0 existe algún átomo a tal que $a \leq x$. ◂

Ejemplo 24. Un álgebra potencia $P(X)$ y el álgebra finita/cofinita sobre X son atómicas, siendo los átomos los conjuntos unipuntuales $\{x\}$, con $x \in X$.

Otro ejemplo de álgebra atómica es cualquier álgebra de Boole finita, dado que si $x > 0$ en un álgebra de Boole y no existiese ningún átomo por debajo de x, habría una sucesión infinita estrictamente decreciente $x_0 = x > x_1 > x_2 > \ldots$ en $\mathfrak{A}^+ = \{x \in \mathfrak{A} : 0 < x\} = \mathfrak{A} \setminus \{0\}$. ◂

Lema 25. *Para todo elemento $a \in \mathfrak{B}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I) *a es un átomo de $\mathfrak{B}$;*

II) *para todo $x \in \mathfrak{B}$, o bien $a \leq x$ o bien $a \leq \neg x$, pero no ambos;*

III) *$a > 0$ y, para todo $x, y \in \mathfrak{B}$, $a \leq x \vee y$ si y solo si $a \leq x$ o $a \leq y$.*

Proposición 26. *Para toda álgebra de Boole, la aplicación $f : \mathfrak{B} \to P(\operatorname{At}\mathfrak{B})$ definida por el conjunto $f(x) = \{a \in \operatorname{At}\mathfrak{B} : a \leq x\}$ es un homomorfismo. Será un embebimiento si $\mathfrak{B}$ es atómica y un epimorfismo si es completa.*

Demostración. Evidentemente, $f(0) = \varnothing$ y $f(1) = \operatorname{At}\mathfrak{B}$. Por el lema 25 II) se tiene que

$$f(\neg x) = \{a \in \operatorname{At}\mathfrak{B} : a \leq \neg x\} = \operatorname{At}\mathfrak{B} \setminus \{a \in \operatorname{At}\mathfrak{B} : a \leq x\} = \operatorname{At}\mathfrak{B} \setminus f(x),$$

y que $f(x \vee y) = f(x) \cup f(y)$ se obtiene de manera similar aplicando el lema 25 III). Además, se tiene que $f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y)$ puesto que, por ser $x \wedge y$ el ínfimo de $\{x, y\}$,

$$a \leq x \wedge y \text{ si y solo si } a \leq x \text{ y } a \leq y,$$

lo cual es cierto para todo $a \in \mathfrak{B}$. Por tanto, f es un homomorfismo.

Consideremos ahora $\mathfrak{B}$ un álgebra atómica y sean $x \neq y$ en $\mathfrak{B}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \nleq y$. En tal caso, $x \wedge \neg y \neq 0$ por el lema 17 I), y existirá un átomo $a \in \mathfrak{B}$ tal que $a \leq x \wedge \neg y$. Se tiene que $a \in f(x)$ y $a \notin f(y)$ y, por tanto, que $f(x) \neq f(y)$, siendo f inyectiva.

Por último, f es un epimorfismo si $\mathfrak{B}$ es completa pues, dado un conjunto de átomos $A \subseteq \operatorname{At}\mathfrak{B}$, se tiene que $f(\sup A) = A$. En efecto, obviamente $A \subseteq f(\sup A)$. Y si $A \neq f(\sup A)$, existe un átomo $a \notin A$ tal que $a \leq \sup A$. En tal caso, como $a \notin A$, $b \leq \neg a$ para todo $b \in A$. De ello se tiene que $a \leq \sup A \leq \neg a$, es decir, $a \leq \neg a$, lo cual es absurdo. ■

Esta proposición no solo es una versión más débil del teorema de Stone, sino que es una descripción de las álgebras de Boole atómicas completas.

Corolario 27. *Toda álgebra de Boole atómica es isomorfa a un álgebra de conjuntos. Toda álgebra de Boole completa y atómica es isomorfa a un álgebra potencia.*

Corolario 28. *Las álgebras booleanas finitas son, salvo isomorfismos, las álgebras potencia de los conjuntos finitos.*

Demostración. Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra booleana finita, entonces $\operatorname{At}\mathfrak{B}$ es finita y $\mathfrak{B}$ es completa y atómica. Por la proposición 26, $\mathfrak{B}$ es isomorfa a $P(\operatorname{At}\mathfrak{B})$. ■

En particular, un álgebra de Boole tendrá por cardinal un número natural si y solo si es una potencia de 2.

Corolario 29. *Dos álgebras booleanas finitas son isomorfas si y solo si tienen la misma cardinalidad.*

Demostración. Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tienen la misma cardinalidad $\varkappa$, entonces, como $\mathfrak{A} \simeq P(\operatorname{At}\mathfrak{A})$ y $\mathfrak{B} \simeq P(\operatorname{At}\mathfrak{B})$, se tiene que $\varkappa = 2^n$, donde $n = |\operatorname{At}\mathfrak{A}| = |\operatorname{At}\mathfrak{B}|$. Recíprocamente, toda biyección entre $\operatorname{At}\mathfrak{A}$ y $\operatorname{At}\mathfrak{B}$ da lugar a un isomorfismo entre $P(\operatorname{At}\mathfrak{A})$ y $P(\operatorname{At}\mathfrak{B})$ y, por ende, entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$. ■

Pasemos ahora a ver algunas definiciones y propiedades referentes a los filtros y ultrafiltros en álgebras de Boole.

Los ultrafiltros son la principal herramienta en la prueba del teorema de Stone. Estos surgen de manera natural a partir de los embebimientos de álgebras de Boole en álgebras potencia. Veamos, primeramente, una definición más sencilla de lo que es un ultrafiltro en un álgebra booleana.

Sea $e\colon \mathfrak{B} \to P(X)$ un embebimiento o, para mayor generalidad, un homomorfismo. Entonces, para cualquier punto $x \in X$, el subconjunto

$$F = \{a \in \mathfrak{B} : x \in e(a)\}$$

de $\mathfrak{B}$ tiene las siguientes propiedades:

- $1 \in F,\ 0 \notin F$,
- $a \wedge b \in F$ si y solo si $a, b \in F$,
- $a \vee b \in F$ si y solo si $a \in F$ o $b \in F$,
- $\neg a \in F$ si y solo si $a \notin F$.

Los subconjuntos de $\mathfrak{B}$ con estas propiedades son exactamente los ultrafiltros de $\mathfrak{B}$. Pasemos ahora a la definición en base a los filtros del álgebra.

Definición 30. Un **ideal** en un álgebra de Boole $\mathfrak{B}$ es un subconjunto, I, de $\mathfrak{B}$ tal que para cualesquiera $a, b \in \mathfrak{B}$

- $0 \in I$;
- si $a, b \in I$, entonces $a \vee b \in I$;
- si $a \in I$ y $b \leq a$, entonces $b \in I$. ◂

Un ideal I es **propio** si y solo si $I \neq \mathfrak{B}$. En otro caso se dirá impropio.

Definición 31. Un **filtro** en un álgebra de Boole $\mathfrak{B}$ es un ideal en el álgebra dual $\mathfrak{B}'$. Así, un subconjunto F de $\mathfrak{B}$ es un filtro en $\mathfrak{B}$ si y solo si para cualesquiera $a, b \in \mathfrak{B}$

- $1 \in F$;
- si $a, b \in F$, entonces $a \wedge b \in F$;
- si $a \in F$ y $a \leq b$, entonces $b \in F$. ◂

Un filtro F es **propio** si y solo si $F \neq \mathfrak{B}$. En otro caso se dirá impropio. Un filtro F es **maximal** si es propio y no existe otro filtro en $\mathfrak{B}$ que lo contenga como subconjunto propio.

Observación 32. Para todo ideal I se cumple que $0 \in I$ y para todo filtro F, que $1 \in F$. Además, un ideal es propio si y solo si no contiene al 1 y un filtro lo es si y solo si no contiene al 0. ◂

Lema 33. *Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Boole. Si $X \subset \mathcal{B}$, entonces*

- *X es ideal de $\mathfrak{B}$ si y solo si $\{\neg a : a \in X\}$ es filtro en $\mathfrak{B}$.*
- *X es filtro de $\mathfrak{B}$ si y solo si $\{\neg a : a \in X\}$ es ideal de $\mathfrak{B}$.*

Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Boole, la intersección de todo conjunto de filtros en $\mathfrak{B}$ es también un filtro en $\mathfrak{B}$. Así, dado X un subconjunto de $\mathfrak{B}$, hay un filtro mínimo, $F(X)$, en $\mathfrak{B}$ que incluye a X, a saber, la intersección de todos los filtros en $\mathfrak{B}$ que incluyen a X. $F(X)$ es el **filtro generado** por X. Si X es vacío, $F(X) = \{1^{\mathfrak{B}}\}$; si X es no vacío, $F(X)$ es el conjunto de los elementos $b \in \mathfrak{B}$ tales que $x_1 \wedge ... \wedge x_n \leq b$ para $n \geq 1$ y $x_1, ..., x_n \in X$.

Del mismo modo, dado que la intersección de todo conjunto de ideales en $\mathfrak{B}$ es un ideal en $\mathfrak{B}$, si $X \subseteq \mathfrak{B}$, hay un menor ideal, $I(X)$, que incluye a X. $I(X)$ es el **ideal generado** por X. Si X es vacío, $I(X) = \{0\}$; si es no vacío, $I(X)$ es el conjunto de los elementos $b \in \mathfrak{B}$ tales que $b \leq x_1 \vee ... \vee x_n$ para $n \geq 1$ y $x_1, ..., x_n \in X$.

Definición 34. Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Boole, decimos que un subconjunto $X \subseteq \mathfrak{B}$ tiene la **propiedad de la intersección finita** (PIF) si y solo si el ínfimo de todo subconjunto finito de X es distinto de 0.

Decimos que X tiene la **propiedad de la unión finita** (PUF) si y solo si el supremo de todo subconjunto finito de X es distinto de 1. ◂

Definición 35. Decimos que un ideal I en un álgebra de Boole $\mathfrak{B}$ es **primo** si y solo si es propio y, para cualesquiera $a, b \in \mathfrak{B}$, si $a \wedge b \in I$ se tiene que $a \in I$ o $b \in I$.

Dualmente, un filtro F en un álgebra $\mathfrak{B}$ es un **ultrafiltro** si y solo si es propio y, para cualesquiera $a, b \in \mathfrak{B}$, si $a \vee b \in F$ se tiene que $a \in F$ o $b \in F$. ◂

Así, un ideal es primo si y solo si su filtro dual es un ultrafiltro, y un filtro es un ultrafiltro si y solo si su ideal dual es primo.

Observación 36. Otra forma de definirlos y que resulta mucho más práctica a la hora de comprobar si un conjunto es un ultrafiltro es la siguiente:

Un filtro F en $\mathfrak{B}$ es un ultrafiltro si para cada $x \in \mathfrak{B}$ se tiene que $x \in F$ o $\neg x \in F$, pero no ambos. ◂

Proposición 37. *Un filtro es maximal si y solo si es un ultrafiltro.*

Demostración. Para un filtro F y un elemento $a \notin F$, el conjunto $\{b \in \mathfrak{B} : \exists z \in F, z \wedge \neg a \leq b\}$ es un filtro que extiende a F y contiene a $\neg a$. ■

Teorema 38. *Un subconjunto de un álgebra de Boole está contenido en un ultrafiltro si y solo si posee la propiedad de intersección finita (PIF).*

Demostración. Por tener la propiedad PIF, el filtro generado es propio, luego se tiene que el conjunto $\{F \subseteq \mathfrak{B} : X \subseteq F \text{ y } F \text{ filtro propio}\}$ es no vacío. Aplicando el lema de Zorn y la proposición 37 se obtiene el resultado. ■

Corolario 39. *Un elemento a de un álgebra de Boole está contenido en un ultrafiltro si y solo si $a > 0$.*

Definición 40. Para un álgebra de Boole $\mathfrak{B}$,

$$\operatorname{Ult}\mathfrak{B} = \{F \subseteq \mathfrak{B} : F \text{ es un ultrafiltro de } \mathfrak{B}\}$$

es el conjunto de los ultrafiltros de $\mathfrak{B}$.

La aplicación $s\colon \mathfrak{B} \to P(\operatorname{Ult}\mathfrak{B})$ definida por

$$s(x) = \{F \in \operatorname{Ult}\mathfrak{B} : x \in F\}$$

se denomina **aplicación de Stone**. ◂

Teorema 41 (de representación de Stone, versión conjuntista). *Toda álgebra de Boole es isomorfa a un álgebra de conjuntos.*

Demostración. La prueba de que la aplicación de Stone s es un homomorfismo de $\mathfrak{B}$ en $P(\operatorname{Ult}\mathfrak{B})$ es análoga a la que aparece en la proposición 26.

Veamos que s es inyectiva. Consideremos $x \neq y$ en $\mathfrak{B}$; sin pérdida de generalidad podemos considerar $x \nleq y$. Por tanto, $x \wedge \neg y > 0$, por el lema 17 I). Por el corolario 39, sea F un ultrafiltro que contenga a $x \wedge \neg y$, de modo que, por una definición de ultrafiltro equivalente a la dada, contendrá a x y a $\neg y$. De ese modo, se tiene que $x \in F$ e $y \notin F$, siendo esto último por la observación 36, lo cual implica que $F \in s(x) \setminus s(y)$. ■

Recordemos que un álgebra de conjuntos es una subálgebra del álgebra potencia sobre un conjunto dado. Esta versión del teorema de Stone establece que toda álgebra de Boole $\mathfrak{B}$ es isomorfa a un álgebra de conjuntos, y gracias a la versión topológica que estudiaremos a continuación veremos que se trata del álgebra de los clopen sobre un espacio topológico.

3. Espacios de Stone

Esta sección establece la dualidad fundamental entre las álgebras de Boole y unos espacios topológicos especiales, los espacios de Stone. Así, el álgebra dual de un espacio de Stone X es $\operatorname{Clop}(X)$, el álgebra de los subconjuntos clopen de X, y el espacio dual de un álgebra de Boole $\mathfrak{B}$ es el conjunto $\operatorname{Ult}\mathfrak{B}$ de los ultrafiltros de $\mathfrak{B}$, equipado con la llamada topología de Stone. El resultado de toda esta teoría es que toda álgebra de Boole $\mathfrak{B}$ es isomorfa a $\operatorname{Clop}(\operatorname{Ult}\mathfrak{B})$ —para ser exactos, la aplicación $s\colon \mathfrak{B} \to P(\operatorname{Ult}\mathfrak{B})$ definida anteriormente es un isomorfismo entre $\mathfrak{B}$ y $\operatorname{Clop}(\operatorname{Ult}\mathfrak{B})$—. En particular, obtendremos una versión más fuerte del teorema de representación de Stone.

El álgebra $\operatorname{Clop}(X)$ de los subespacios clopen de un espacio topológico arbitrario es uno de los ejemplos estándar de álgebra de conjuntos. Para un espacio conexo X, sin embargo, este álgebra se reduce a $\{\varnothing, X\}$.

Recordemos algunos conceptos topológicos antes de entrar en materia.

Definición 42. Diremos que $\beta \subset \tau$ es una **base** de la topología τ si y solo si para todo punto p contenido en un abierto U existe $B \in \beta$ tal que $p \in B \subset U$. ◂

Equivalentemente, una familia β no vacía de subconjuntos de X formará base de alguna topología si se cumple:

- $\bigcup\{B : B \in \beta\} = X$.
- Para cualesquiera $B, B' \in \beta$ se verifica que $B \cap B' = \cup\beta_i$, para ciertos $\beta_i \in \beta$.

Ahora introduciremos algunos **axiomas de separación** en topología, ya que haremos uso de ellos más adelante. Un espacio topológico X se dice que es

- T_2 o **Hausdorff** si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$ existen U, V abiertos tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \varnothing$.
- **normal** si para todo par de cerrados disjuntos $C, C' \subset X$ existen U, V abiertos disjuntos tales que $C \subset U$, $C' \subset V$ y $U \cap V = \varnothing$.
- T_4 si es normal y T_2.

Definición 43. Un espacio topológico X es **compacto** si todo cubrimiento por abiertos de X admite un subrecubrimiento finito. ◂

Proposición 44. *Si K es compacto y T_2, entonces K es T_4.*

Definición 45. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es **cero-dimensional** si $\mathrm{Clop}(X)$ es una base de la topología de X. ◂

Definición 46. X es un **espacio de Stone** si es Hausdorff, compacto y cero-dimensional. ◂

Que un espacio sea cero-dimensional es equivalente a que exista una base o subbase para X formada por conjuntos clopen. Por ejemplo, el espacio de los números irracionales con la topología heredada de $\mathbb{R}$ es cero-dimensional, teniendo $(a, b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ con $a, b \in \mathbb{Q}$ como base de clopens.

Ejemplo 47. Veamos algunos ejemplos de espacios de Stone:

I) Todo espacio finito y discreto es de Stone. En particular, denotaremos como 2 al espacio de Stone $2 = \{0, 1\}$ con la topología discreta.

II) Por el teorema de Tychonoff, el espacio producto de cualquier familia de espacios de Stone es de Stone. En particular, también lo es el espacio 2^I para cualquier conjunto de índices I, el cual es conocido como el espacio de Cantor de peso $|I|$, para un I infinito.

III) Todo subespacio cerrado de un espacio de Stone es un espacio de Stone. ◂

Definición 48. Un espacio X diremos que es **conexo** si $\mathrm{Clop}(X) = \{\varnothing, X\}$, es decir, si X no es la unión de dos subconjuntos cerrados disjuntos no vacíos.

Un espacio topológico X es **totalmente disconexo** si ningún subespacio con al menos dos elementos es conexo. ◂

Teorema 49. *Un espacio de Hausdorff compacto es cero-dimensional, y por tanto de Stone, si y solo si es totalmente disconexo.*

Demostración. Sea X un compacto Hausdorff. Si X es cero-dimensional e Y un subespacio de X con dos puntos distintos y e y', entonces existe un clopen A tal que $y \in A$ e $y' \notin A$. Así que $Y \cap A$ es un subconjunto clopen propio no vacío de Y e Y no es conexo. Por consiguiente, X es totalmente disconexo.

Recíprocamente, supongamos que X es totalmente disconexo. Sean pues $x \in X$ y U un entorno abierto de x; debemos encontrar un clopen F de X tal que $x \in F \subseteq U$, probando así que $\mathrm{Clop}(X)$ es una base. Para ello definimos

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathrm{Clop}(X) : x \in F\}, \quad q = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F.$$

Basta probar que $q \subseteq U$ y que q es clopen. En efecto, dado que X es compacto, U abierto y todo $F \in \mathcal{F}$ cerrado, para algún subconjunto finito F' de $\mathcal{F}$ se tiene que $\bigcap F' \subseteq U$ y podemos considerar $F = \bigcap F'$. Veamos que $q = \{x\}$; para ello, supongamos que q tiene al menos dos puntos, por lo que no es conexo al ser X totalmente disconexo. De este modo,

$$q = q_1 \cup q_2,$$

donde q_1, q_2 son cerrados disjuntos no vacíos de q. Ahora tenemos que q es un subconjunto cerrado de X; por tanto, cada q_i es cerrado en X. Por la compacidad y, por tanto, normalidad de X, podemos escoger dos abiertos disjuntos U_1, U_2 tales que $q_i \subseteq U_i$. Entonces, $q \subseteq U_1 \cup U_2$ y, nuevamente por compacidad,

$F \subseteq U_1 \cup U_2$ para algún $F \in \mathcal{F}$. De este modo, tanto $U_1 \cap F$ como $U_2 \cap F$ son clopen en F y, por tanto, como F es clopen, también en X. Dado que $x \in F$, podemos asumir que $x \in U_1 \cap F$. Entonces, $U_1 \cap F \in \mathcal{F}$ y $q \subseteq U_1 \cap F$. Esto implica que $q_2 \subseteq q \subseteq U_1$, lo cual contradice que $q_2 \subseteq U_2$, que los U_i fuesen disjuntos y que q_i fuese no vacío. ∎

A esto se debe que a los compactos Hausdorff en ocasiones se les denote como compactos totalmente disconexos o cero-dimensionales de manera indistinta.

Lema 50. *Sea X un espacio de Stone.*

I) *Si $B \subseteq \mathrm{Clop}(X)$ es una base para X cerrada bajo uniones finitas, entonces $B = \mathrm{Clop}(X)$.*
II) *Si Y es un subespacio cerrado de X, entonces $\mathrm{Clop}(Y) = \{a \cap Y : a \in \mathrm{Clop}(X)\}$.*
III) *Si y, z son subconjuntos cerrados y disjuntos de X, existe un subconjunto clopen de X que separa y de z, es decir, tal que $y \subseteq a$ y $z \subseteq X \setminus a$.*

Ahora estamos preparados para probar la versión topológica del teorema de representación de Stone.

Recordemos que $\mathrm{Ult}\,\mathfrak{B}$ es el conjunto de todos los ultrafiltros de un álgebra de Boole $\mathfrak{B}$ y que la aplicación de Stone es un monomorfismo de álgebras de Boole. En particular, $s(\mathfrak{B})$ es una familia de subconjuntos de $\mathrm{Ult}\,\mathfrak{B}$ cerrada bajo intersecciones finitas y, por tanto, base de una topología.

Definición 51. Para un álgebra de Boole $\mathfrak{B}$ se define la topología de Stone como la única topología en $\mathrm{Ult}\,\mathfrak{B}$ que tiene como base $s(\mathfrak{B})$.

$\mathrm{Ult}\,\mathfrak{B}$ dotado de la topología de Stone es el espacio de Stone o espacio dual o el espacio de los ultrafiltros de $\mathfrak{B}$. ◂

Teorema 52 (de representación de Stone, versión topológica). *Toda álgebra de Boole es isomorfa al álgebra de los clopen de un espacio de Stone. Más concretamente, el espacio dual $\mathrm{Ult}\,\mathfrak{B}$ de un álgebra de Boole $\mathfrak{B}$ es un espacio de Stone y la aplicación de Stone $s\colon \mathfrak{B} \to P(\mathrm{Ult}\,\mathfrak{B})$ es un isomorfismo entre $\mathfrak{B}$ y $\mathrm{Clop}(\mathrm{Ult}\,\mathfrak{B})$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Boole y $X = \mathrm{Ult}\,\mathfrak{B}$ su espacio dual. X es cero-dimensional puesto que todos los elementos de la base $s(a)$ son clopen, por ser $X \setminus s(a) = s(\neg a)$. Además, X es Hausdorff, pues si suponemos que F, G son dos ultrafiltros distintos de $\mathfrak{B}$, por la maximalidad de F podemos tomar $a \in F \setminus G$. Entonces, $s(a)$ y $s(\neg a)$ son entornos disjuntos de F y G.

Veamos que X es compacto. Para ello, sea U un recubrimiento abierto de X. Bastará considerar el caso en el que todo elemento de U es un elemento básico; por ello, consideremos $U = \{s(a) : a \in A\}$, con $A \subseteq \mathfrak{B}$. Supongamos que X no posee subrecubrimiento finito; entonces, para $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \dots, a_n \in A$ se tiene que

$$s(a_1) \cup \dots \cup s(a_n) \neq X = s(1),$$

y, por tanto, $a_1 \vee \dots \vee a_n \neq 1$ y $\neg a_1 \wedge \dots \wedge \neg a_n \neq 0$. De esto, se sigue que el conjunto $\neg A = \{\neg a : a \in A\}$ tiene la PIF. Por el teorema 38, consideremos ahora F un ultrafiltro de $\mathfrak{B}$ que contiene a $\neg A$. Entonces, para cada $a \in A$ se tiene que $\neg a \in F$, $a \notin F$ y $F \notin s(a)$, lo cual contradice que U es un cubrimiento de X.

Por tanto, X es un espacio de Stone. Dado que la aplicación de Stone s es un monomorfismo entre $\mathfrak{B}$ y $\mathrm{Clop}(X)$, por el lema 50 I) se tiene que $\mathrm{Clop}(X) = s(\mathfrak{B})$ considerando $B = s(\mathfrak{B})$ la base de X. ∎

Definición 53. Para un espacio de Stone X, llamamos álgebra dual de X a $\mathrm{Clop}(X)$. Para cada $x \in X$, el conjunto

$$t(x) = \{A \in \mathrm{Clop}(X) : x \in A\}$$

es un ultrafiltro de $\mathrm{Clop}(X)$. Esto define la aplicación de Stone

$$t\colon X \to \mathrm{Ult}\,\mathrm{Clop}(X).$$ ◂

De este modo, vemos que el teorema 52 puede enunciarse de forma que establezca que toda álgebra de Boole es isomorfa a su bidual, esto es, al álgebra dual de su espacio dual. Recíprocamente, todo espacio de Stone es homeomorfo a su bidual.

Teorema 54. *Todo espacio de Stone es homeomorfo al espacio de Stone de un álgebra de Boole. Más concretamente, para un espacio de Stone X, la aplicación $t\colon X \to \operatorname{Ult}\operatorname{Clop}(X)$ es un homeomorfismo entre X y $\operatorname{Ult}\operatorname{Clop}(X)$.*

Demostración. Basta probar que t es continua y biyectiva puesto que tanto X como $\operatorname{Ult}\operatorname{Clop}(X)$ son espacios Hausdorff y compactos.

Consideremos $\mathfrak{A} = \operatorname{Clop}(X)$. La continuidad de t se sigue del hecho de que las preimágenes de los conjuntos básicos $s(a)$, $a \in \mathfrak{A}$, son abiertos: para $a \in \mathfrak{A}$ y $x \in X$, se tiene $x \in t^{-1}(s(a))$ si y solo si $t(x) \in s(a)$ si y solo si $a \in t(x)$ si y solo si $x \in a$, de modo que $t^{-1}(s(a)) = a$ es clopen.

Para probar que t es inyectiva, consideremos x e y puntos distintos de X. Dado que X es un espacio de Stone, podemos tomar $a \in \operatorname{Clop}(X)$ tal que $x \in a$ e $y \notin a$. Por tanto, $a \in t(x) \setminus t(y)$.

Finalmente, para demostrar que t es suprayectiva debemos considerar un ultrafiltro $F \in \operatorname{Ult}\operatorname{Clop}(X)$. Como X es compacto y F es una familia de subconjuntos cerrados de X que posee la PIF, podemos tomar $x \in X$ de modo que $x \in a$ para cada $a \in F$. Entonces, $F \subseteq t(x)$ y, por la maximalidad del ultrafiltro F, se tiene que $F = t(x)$. ∎

Referencias

[1] Boole, George. *The mathematical analysis of logic*. Philosophical Library, 1847.

[2] Boole, George. *An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. Dover Publications, Inc., New York, 1957, xi+424 pp. (1 plate).

[3] Corbalán Mirete, Clara María. *Sumas torcidas de espacios de Banach*. Trabajo de Fin de Máster. Universidad de Murcia, 2018. url: https://www.um.es/documents/118351/7120416/Clara+Corbal%C3%A1n+Mirete+-+TFM.pdf/7150b8f5-7023-4679-9a9c-2fe41f74157a.

[4] Jané, Ignacio. *Álgebras de Boole y lógica*. Vol. 5. Materials Docents. Edicions Universitat Barcelona, 1989. isbn: 978-84-7875-040-5.

[5] Koppelberg, Sabine. *Handbook of Boolean algebras*. Vol. 1. Edited by J. Donald Monk and Robert Bonnet. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989, págs. xx+312. isbn: 978-0-444-70261-6.