

TEMat

Este trabajo fue galardonado con el primer premio en la edición de 2019 del Premi Poincaré, entregado por la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya.



Estudio de una familia de curvas formadas inductivamente a partir de una construcción geométrica

✉ Pau Redon Muñoz^a
Universitat Politècnica de Catalunya
(UPC)
pauredonm@gmail.com

Resumen: Este artículo nace de preguntarse cuál es la curva equidistante a una parábola y a su foco. Veremos que la respuesta a esta pregunta es una parte de la cúbica de Tschirnhausen, una curva estudiada en el siglo XVII por varios matemáticos. Para obtener esta curva, aplicaremos a la parábola y a su foco una construcción geométrica que también puede ser aplicada en la cúbica de Tschirnhausen y al foco de la parábola inicial para obtener otra curva, y a las curvas subsiguientes. Parte del artículo se centrará en estudiar las propiedades de esta familia de curvas.

Abstract: This article is built over asking what is the curve equidistant from a parabola and its focus. We will see that the answer to this question is a part of Tschirnhausen's cubic, a curve studied by various mathematicians during the 17th century. To obtain this curve, we will apply to a parabola and its focus a geometric construction that can also be applied to Tschirnhausen's cubic and the initial parabola's focus to obtain another curve, and to the subsequent curves. Part of the paper will be dedicated to studying the properties of this family of curves.

Palabras clave: geometría euclídea, geometría algebraica, curvas, espirales sinusoidales.

MSC2010: 14H50.

Recibido: 18 de septiembre de 2019.

Aceptado: 30 de abril de 2020.

Agradecimientos: Quiero agradecer a todos los que me han ayudado a realizar este artículo, en especial a mi tutora del Trabajo de Investigación de Bachillerato, Yolanda Segarra, y al jurado de los Premios Poincaré por escoger mi trabajo como ganador y darme la oportunidad de publicarlo en esta revista.

Referencia: REDON MUÑOZ, Pau. «Estudio de una familia de curvas formadas inductivamente a partir de una construcción geométrica». En: *TEMat*, 4 (2020), págs. 1-14. ISSN: 2530-9633. URL: <https://temat.es/articulo/2020-p1>.

^aEste trabajo fue realizado como Trabajo de investigación de Bachillerato en el Institut d'Àlella.

1. Introducción

Se cree que las secciones cónicas fueron definidas por primera vez por el geómetra griego Menaechmus (380-320 a. C.) como parte de su solución al problema de duplicar el cubo. La definición dada por Menaechmus difiere de la definición actual de sección cónica y es la siguiente. La sección cónica es determinada por la intersección de un cono con un plano perpendicular a una generatriz cualquiera de este cono. El tipo de cónica definida dependerá del ángulo formado en el vértice del cono: si el ángulo es obtuso, recto o agudo la intersección será una hipérbola, una parábola o una elipse, respectivamente.

Más tarde, Apolonio de Perga (262-190 a. C.) haría un importante progreso en la teoría de las secciones cónicas en su más famosa obra *Sobre las secciones cónicas*. Este estudio de Apolonio hizo posible extender la definición anterior de Menaechmus a la usada actualmente. Demostró que, independientemente del ángulo formado en el vértice de un doble cono, la intersección de este con cualquier plano resulta en una sección cónica.

A principios del siglo XVII, aparece la geometría analítica y se introducen los sistemas de coordenadas en la geometría, por obra de personajes como Desargues, Kepler, Descartes y Fermat. Kepler empezó a usar el término «foco» de una parábola, y fue el primero en enunciar rigurosamente el concepto de continuidad (el cambio continuo de una entidad matemática de un estado a otro) para tratar la parábola como el caso límite entre una elipse y una hipérbola cuando uno de los dos focos se va al infinito. Con esta introducción del término «foco» se da paso a una de las definiciones de la parábola más conocidas y usadas actualmente: la parábola es el lugar geométrico formado por los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto llamado foco y una recta llamada directriz.

La definición de parábola que acabamos de ver es la base de este artículo, ya que es la definición que ha inspirado la pregunta siguiente: «¿Cuál es la curva formada por los puntos equidistantes a una parábola y a su foco?». Veremos más adelante en el artículo que la respuesta a esta pregunta coincide con una parte de una curva estudiada en finales del siglo XVII por Tschirnhausen, L'Hôpital y Catalan.

Para estudiar esta curva, proponemos una definición de un lugar geométrico, y, más tarde en el artículo, veremos que esta definición responde a la pregunta formulada en el párrafo anterior.

Definición 1. Sea C una curva derivable en todos sus puntos¹, y sea F un punto coplanario con C pero exterior a esta. Llamamos $f(C, F)$ al lugar geométrico de los puntos que se obtienen haciendo para cada $P \in C$ la intersección entre la mediatriz del segmento FP y la recta normal (o las rectas normales, si hay más de una) a la curva en el punto F . ◀

Este artículo tendrá dos partes. En la primera parte analizaremos el lugar geométrico $\gamma = f(\Gamma, F)$ para cualquier parábola Γ con foco F . En esta parte veremos la propiedad de equidistancia de la curva $f(\Gamma, F)$ a Γ y F , y veremos la similitud de la cúbica de Tschirnhausen con γ . En la segunda parte del artículo estudiaremos la familia de curvas a las que llamaremos γ_k , definidas de la siguiente manera: γ_0 es una línea recta arbitraria en el plano, y F un punto exterior a esta línea; entonces $\gamma_k = f(\gamma_{k-1}, F)$ para $k \in \mathbb{N}$. Observemos que, con esta definición, $\gamma_1 = \Gamma$.

Durante todo el artículo supondremos que estamos trabajando en el plano euclídeo.

2. La curva γ

Todas las parábolas son semejantes, lo que significa que, dadas dos parábolas arbitrarias, siempre podemos transformar una en la otra mediante transformaciones rígidas (traslaciones y rotaciones) u homotecias. Entonces, sin pérdida de generalidad, durante esta sección trabajaremos con la forma general de la parábola con el eje de simetría vertical, $y = a(x - h)^2 + k$, con k, h y a reales y $a \neq 0$.

¹Una curva plana C es derivable en todo punto si admite unas ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$ de modo que $f(t)$ y $g(t)$ sean funciones derivables para todo t .

2.1. Ecuación paramétrica de γ

Para encontrar la ecuación de γ , usaremos la definición 1. Consideremos una parábola Γ de ecuación $\Gamma: y = a(x - h)^2 + k$. Es conocido que el foco de esta parábola tiene coordenadas $F = (h, k + 1/4a)$. Para empezar, encontraremos la ecuación de la mediatriz entre el foco y un punto $P = (t, a(t - h)^2 + k)$ de la parábola. Entonces, encontraremos la ecuación de la línea normal a la parábola en el punto P . Finalmente, encontraremos la intersección Q entre estas dos líneas rectas y, como sabemos que $Q \in \gamma$, basta con tratar la variable t del punto P como el parámetro de la ecuación paramétrica.

La ecuación de la mediatriz entre P y F es

$$(x - h)^2 + \left(y - \left(k + \frac{1}{4a}\right)\right)^2 = (x - t)^2 + (y - (a(t - h)^2 + k))^2.$$

La ecuación de la recta normal a la parábola en el punto P es la siguiente:

$$y = a(t - h)^2 + k + \frac{1}{2a} + \frac{x - h}{2a(h - t)}.$$

Ahora, para encontrar el punto de intersección de las dos rectas tenemos que resolver el sistema dado por las ecuaciones de las dos rectas:

$$\begin{cases} y = \frac{x - h}{2a(h - t)} + k + a(h - t)^2 + \frac{1}{2a}, \\ (x - h)^2 + \left(y - \left(k + \frac{1}{4a}\right)\right)^2 = (x - t)^2 + (y - (a(t - h)^2 + k))^2. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema resulta que γ es una curva de ecuaciones paramétricas derivables, con parámetro $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{3(t - h)}{4} + h - a^2(t - h)^3, \\ y(t) &= \frac{12a^2(h - t)^2 + 8ak + 1}{8a}. \end{aligned}$$

2.2. Representación gráfica de γ

Para conocer las propiedades de la curva, es importante conocer su representación gráfica. Para hacerlo, usaremos la parábola de ecuación $y = x^2$. Entonces, las ecuaciones paramétricas de la curva γ respectiva a esta parábola son

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{3t}{4} - t^3, \\ y(t) &= \frac{12t^2 + 1}{8}, \end{aligned}$$

y la representación de estas ecuaciones se muestra en la figura 1.

2.3. Propiedad de equidistancia de γ

En esta sección responderemos a la pregunta formulada en la introducción: «¿Cuál es la curva formada por los puntos equidistantes a una parábola y a su foco?» Demostraremos que la respuesta es una parte de la curva γ y veremos cuál es.

Observación 2. Veamos en qué casos la construcción aplicada en dos puntos $P_1 = (t_1, a(t_1 - h)^2 + k)$ y $P_2 = (t_2, a(t_2 - h)^2 + k)$ de la parábola diferentes resulta en el mismo punto Q de la curva γ . Cuando esto pasa, tenemos que

$$x(t_1) = x(t_2), \quad y(t_1) = y(t_2),$$

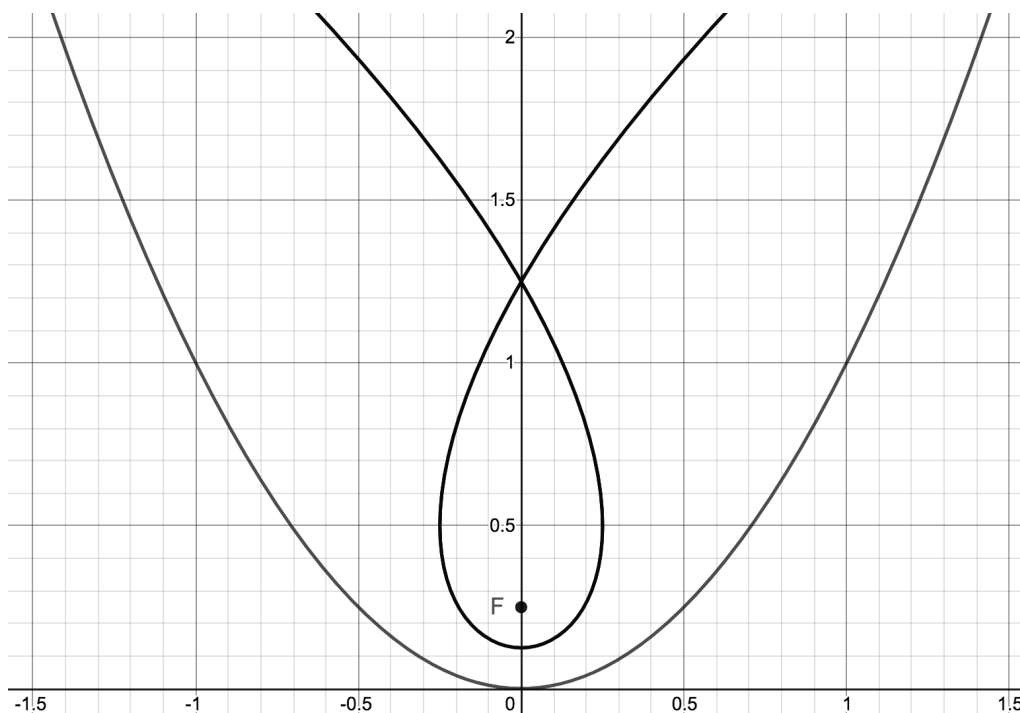


Figura 1: Representación gráfica de γ con su respectiva parábola y foco.

es decir,

$$\begin{cases} \frac{3(t_1 - h)}{4} + h - a^2(t_1 - h)^3 = \frac{3(t_2 - h)}{4} + h - a^2(t_2 - h)^3, \\ \frac{12a^2(h - t_1)^2 + 8ak + 1}{8a} = \frac{12a^2(h - t_2)^2 + 8ak + 1}{8a}. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema en función de t_1 y t_2 , sin pérdida de generalidad, llegamos a que $t_1 = h - \sqrt{3}/2a$ y $t_2 = h + \sqrt{3}/2a$. El punto resultante de aplicar la construcción en P_1 o en P_2 es $Q = (h, 5a/4 + k)$. El punto Q es el único punto con la propiedad que buscábamos.

Si $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$, derivando esta función en los puntos t_1 y t_2 vemos que la curva admite dos tangentes distintas en el punto Q . ◀

Definición 3. Sean $x(t)$ e $y(t)$ las ecuaciones que definen la curva γ para una parábola genérica con ecuación $y = a(x - h)^2 + k$. Definimos el bucle de la curva γ como el conjunto de puntos $(x(t), y(t))$ tales que $h - \sqrt{3}/2a \leq t \leq h + \sqrt{3}/2a$. ◀

Nota 4. Debido a la observación 2, tenemos que el bucle de γ forma una curva cerrada, ya que es continua y los dos extremos de la curva son el mismo punto. ◀

Ahora enunciaremos y demostraremos dos lemas que usaremos en la demostración de la propiedad de equidistancia de γ .

Lema 5. Sea $\Gamma: y = a(x - h)^2 + k$, y sea γ la curva formada a partir de esta parábola usando la definición 1. Separamos el plano real en dos semiplanos $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq h\}$ y $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq h\}$. Consideremos el punto $P = (t, a(t - h)^2 + k)$ y el punto Q de γ obtenido al aplicar la construcción a P , $Q = (x(t), y(t))$. Entonces, P y Q están en el mismo semiplano si y solo si Q forma parte del bucle de γ .

Demostración. Que Q pertenezca al bucle de γ es equivalente a decir que $a^2(t - h)^2 \leq 3/4$. La función $x(t)$ se puede reescribir como

$$x(t) = (t - h) \left(\frac{3}{4} - a^2(t - h)^2 \right) + h.$$

Así, es fácil ver que, si $t \leq h$, entonces $x(t) \leq h$ si y solo si $a^2(t - h)^2 \leq 3/4$, y análogamente para $t \geq h$. ■

Lema 6. Consideremos la parábola $\Gamma: y = a(x - h)^2 + k$ y los dos semiplanos S_1 y S_2 del lema anterior. Sean $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ dos puntos diferentes de la parábola Γ en el mismo semiplano S_i , con x_1 y x_2 diferentes a h . Las rectas r_1 y r_2 normales a la parábola en los puntos P y Q , respectivamente, se cruzan en el semiplano S_j , con $j \neq i$.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que tanto P como Q están en el semiplano S_1 , y que $a > 0$. Entonces, $x_1 < h$ y $x_2 < h$. También supongamos que $x_1 > x_2$, así que $y_1 < y_2$. Decimos que $y_1 + d = y_2$ para algún $d > 0$.

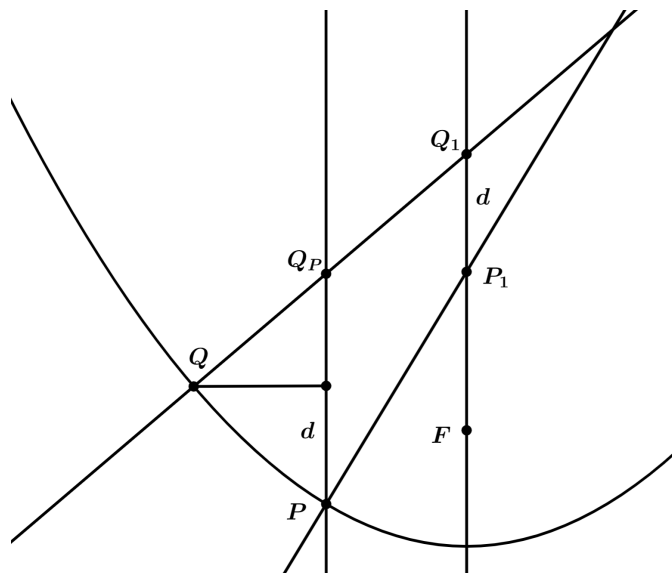


Figura 2: Diagrama de la construcción del lema 6.

Sean P_1 y Q_1 los puntos de intersección de las rectas normales r_1 y r_2 con la recta $x = h$. Se puede calcular² que $P_1 = (h, y_1 + 1/2a)$ y $Q_1 = (h, y_1 + d + 1/2a)$. De aquí deducimos que $|P_1Q_1| = d$, y Q_1 está por encima de P_1 .

Entonces, sea $Q_p = (x_1, t)$ el punto de intersección de la recta r_2 con la recta $x = x_1$. Como Q_p está en el segmento QQ_1 , tenemos que $y_1 + d < t < y_1 + d + 1/2a$ y, en consecuencia, $|PQ_p| > d = |P_1Q_1|$, con Q_p por encima de P .

Finalmente, consideramos las dos rectas paralelas $x = x_1$ y $x = h$, y las intersecciones de estas dos rectas con r_1 y r_2 , que son los puntos P y P_1 , y Q_p y Q_1 , respectivamente. Como $|PQ_p| > |P_1Q_1|$, podemos aplicar el teorema de Tales para concluir que r_1 y r_2 se cruzan en el semiplano S_2 . ■

Teorema 7. El bucle de la curva γ construida a partir de la parábola $\Gamma: y = a(x - h)^2 + k$ con foco F es el lugar geométrico de todos los puntos que están a igual distancia de Γ que de F .

Demostración. Para demostrar este teorema, primero veremos que, si un punto cumple la propiedad de equidistancia, entonces pertenece a γ , y después hallaremos los puntos de γ que satisfacen la propiedad.

Sea R un punto que no pertenece a la parábola. Consideramos el círculo más pequeño con centro R tal que este círculo tenga algún punto en común con la parábola. Llamamos P a uno de estos puntos en común (si hay más de uno, escogemos un punto arbitrario entre ellos). Como la parábola es una función continua y derivable, la circunferencia será tangente a la parábola en el punto P , lo cual implica que R pertenece a la recta normal a Γ en P . Como hemos considerado la circunferencia más pequeña posible, la distancia de R a la parábola es la misma que la distancia de R a P . Entonces, el punto R cumple la propiedad de equidistancia solo si está a la misma distancia de P que de F , o, lo que es equivalente, que R se halla en la mediatriz entre P y F . Esto implica que $R \in \gamma$.

²Este cálculo está hecho en el trabajo original en el que está basado este artículo [5].

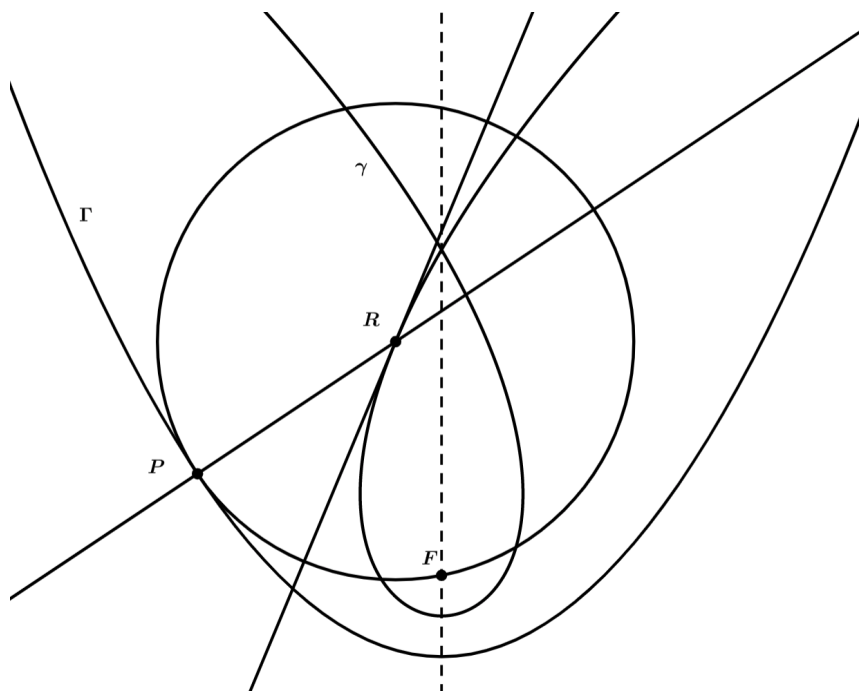


Figura 3: Diagrama de la primera parte del teorema 7.

Ahora hallaremos los puntos de γ que cumplen la propiedad deseada. Sea A un punto de γ . Sabemos por la construcción de γ que existe un punto B de la parábola Γ tal que la recta normal a Γ en B y la mediatriz del segmento BF se cortan en A . Entonces, como $|BA| = |AF|$, el punto A cumple la propiedad de equidistancia si y solo si el punto de Γ más cercano a A es B .

Supongamos que A no pertenece al bucle de γ . Por el lema 5, A y B no están en el mismo semiplano. Entonces, B no puede ser el punto de Γ más cercano a A , ya que podemos comprobar que el punto B' , simétrico a B respecto a la recta $x = h$, pertenece a Γ y $|B'A| < |BA|$.

Ahora, supongamos que A pertenece al bucle de γ . Si A es el punto medio entre F y el vértice de la parábola, A cumple la propiedad de equidistancia ya que es el único punto de γ tal que su punto más cercano de la parábola es su vértice³. Entonces, supongamos que A es un punto del bucle diferente del punto medio entre F y el vértice. Por el lema 5, el punto B está en el mismo semiplano que A ; por el lema 6, B es el único punto de este semiplano, excluyendo el vértice de la parábola, tal que la recta normal a Γ en B pasa por A . Entonces, $|BA|$ es la distancia entre A y la parábola, y hemos demostrado el teorema. ■

2.4. Semejanza de γ con la cúbica de Tschirnhausen

La cúbica de Tschirnhausen[4], también llamada trisectriz de Catalan y cúbica de l'Hôpital, es una curva estudiada por Tschirnhausen en 1690 y por l'Hôpital en 1696. Esta curva se caracteriza por las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$\begin{aligned}x &= a(1 - 3t^2), \\y &= at(3 - t^2),\end{aligned}$$

y su ecuación polar⁴ es

$$\tau(\theta) = a \sec^3(\theta/3).$$

³Es fácil de comprobar, se deja como ejercicio al lector.

⁴Para representar un punto P en coordenadas polares usaremos $P = (r, \alpha)$, donde r es la distancia al origen y α el ángulo que forma la parte positiva del eje X con PO , en sentido antihorario. Definimos la ecuación polar de una curva como la distancia r en función del ángulo α , $r = f(\alpha)$.

Queremos demostrar que esta curva es semejante a la curva γ ; para ello, demostraremos primero los siguientes dos lemas.

Lema 8. *Todas las curvas γ son semejantes. Esto significa que se puede transformar cualquier curva γ en otra usando solo transformaciones rígidas y homotecias.*

Demostración. Sabemos que todas las parábolas son semejantes. Entonces, consideremos dos curvas γ_1 y γ_2 con sus respectivas parábolas Γ_1 y Γ_2 . Si aplicamos a todo el sistema formado por Γ_1 y Γ_2 las transformaciones necesarias para transformar la primera parábola en la segunda, también transformaremos γ_1 en γ_2 , ya que la curva gamma está formada por una construcción geométrica basada solo en la parábola. Entonces, todas las curvas γ son semejantes. ■

Lema 9. *Todas las cúbicas de Tschirnhausen son semejantes.*

Demostración. Sean τ_1 y τ_2 dos cúbicas de Tschirnhausen, con ecuaciones polares $\tau_1(\theta) = a \sec^3(\theta/3)$ y $\tau_2(\theta) = b \sec^3(\theta/3)$. Si aplicamos una homotecia a τ_2 de razón a/b y centro de homotecia en el origen de coordenadas, obtendremos la curva τ_1 , así que todas las cúbicas de Tschirnhausen son semejantes. ■

Teorema 10. *La cúbica de Tschirnhausen es semejante a γ .*

Demostración. Usaremos los lemas anteriores para demostrar que las dos curvas son similares. Demostraremos que la cúbica de Tschirnhausen para un valor concreto de a es semejante a una curva γ concreta. Escogeremos la cúbica de Tschirnhausen con $a = 1/8$, y la curva γ con parámetros $a = 1, k = h = 0$. Transformaremos la cúbica de Tschirnhausen en γ a partir de transformaciones rígidas. Primero usaremos una rotación de 90° , y más tarde una translación.

Para hacer la rotación, multiplicaremos las coordenadas de la ecuación paramétrica por la matriz de rotación:

$$\left(\frac{1}{8}(1-3t^2), \frac{1}{8}t(3-t^2)\right) \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{8}t(3-t^2), \frac{1}{8}(3t^2-1)\right).$$

Podemos hacer el cambio de variable $t = 2s$ para obtener que

$$x = \frac{3s}{4} - s^3, \quad y = \frac{1}{8}(12s^2 - 1).$$

Ahora, aplicamos la translación dada por el vector $\vec{v} = (0, 1/4)$ a la curva. Nos quedan las siguientes ecuaciones:

$$x = \frac{3s}{4} - s^3, \quad y = \frac{12s^2 + 1}{8}.$$

Como podemos ver, estas ecuaciones paramétricas son las correspondientes a la curva γ con parámetros $a = 1, k = h = 0$, así que, si tenemos en cuenta los dos lemas anteriores, el teorema está demostrado. ■

3. Generalización de la curva γ

En la sección anterior hemos hablado de la cúbica de Tschirnhausen, intentando responder la pregunta de la equidistancia que hemos planteado en la introducción. Para responder a esta pregunta, hemos dado una construcción geométrica en la definición 1. En esta tercera sección generalizaremos el concepto de curva γ tal y como hemos mencionado en la introducción.

Recordemos que $F = (0, 0)$, $\gamma_0 : y = -1$ y $\gamma_k = f(\gamma_{k-1}, F)$. A continuación demostraremos las siguientes tres propiedades de la curva γ_k (para $k \geq 1$):

1. Sea P_0 un punto cualquiera de la directriz γ_0 . Para cada punto P_{k-1} ($k \geq 1$) que pertenece a la curva γ_{k-1} , llamamos P_k al punto resultante de aplicar la construcción explicada en la definición 1 en el punto P_{k-1} . Entonces, si $A = (0, -1)$, la siguiente relación de ángulos se cumple:

$$\angle AFP_0 = \angle P_{k-1}FP_k.$$

2. La ecuación polar que define a la curva γ_k es la siguiente:

$$\gamma_k(\theta) = 2 \left(\frac{1}{2 \cos\left(\frac{\theta+\pi/2}{k+1}\right)} \right)^{k+1}.$$

3. La mediatriz entre los puntos R_{k-1} y F es tangente a la curva γ_k en el punto R_k .

Haremos juntamente la demostración de estas tres propiedades. Será una demostración por inducción fuerte, donde la hipótesis inductiva será suponer que las tres propiedades mencionadas se cumplen para los números naturales menores o iguales que k .

Demostración.

Caso base.

Demostraremos el caso base para $k = 1$. Recordemos que $A = (0, -1)$. El punto P_0 pertenece a la recta $\gamma_0 : y = -1$. Definimos a P_0 con el ángulo α que forma el segmento FP_0 con el segmento FA .

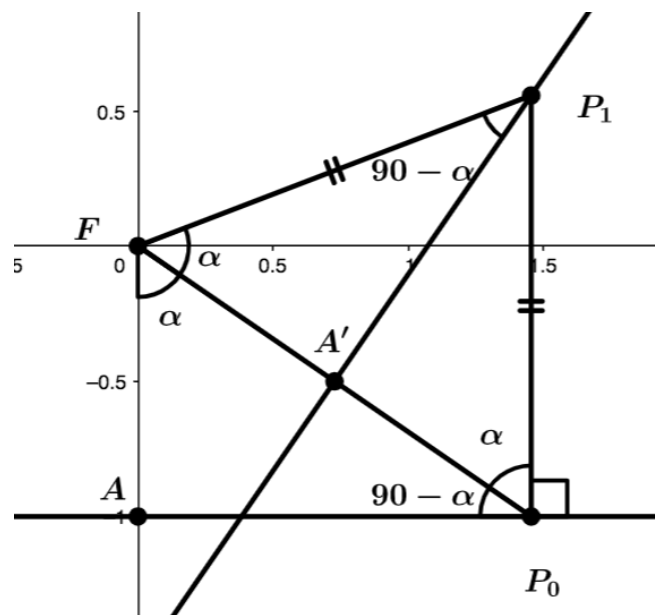


Figura 4: Diagrama de la construcción utilizada para caso base.

Como podemos ver en la figura 4, el punto P_1 es la intersección entre la mediatriz de FP_0 y la perpendicular a γ_0 en el punto P_0 . Ya que el ángulo $\angle FAP_0$ es recto, $\angle A'P_0F = 90^\circ - \alpha$ y $\angle FP_0P_1 = \alpha$. Entonces, como P_1 está en la mediatriz de FP_0 , sabemos que $\angle P_0FP_1 = \alpha$, lo que demuestra la primera propiedad para el caso base.

Definimos A' como el punto medio de FP_0 . Sabemos que $|FA| = 1$, así que $|FP_0| = 1/\cos \alpha$. Entonces, $|FA'| = |FP_0|/2 = 1/(2 \cos \alpha)$ y, si nos fijamos en el triángulo rectángulo $\triangle FA'P_1$, vemos también que $|FP_1| = |FA'|/\cos \alpha = 2(1/(2 \cos \alpha))^2$. Llamaremos θ al ángulo que define el punto P_1 en forma polar. Entonces, $2\alpha = \angle AFP_1 = \pi/2 + \theta$, de lo que deducimos que $\alpha = (\theta + \pi/2)/2$. Finalmente, escribimos la fórmula para la distancia $|FP_1|$ en función del ángulo θ , que coincide con la ecuación polar de γ_1 :

$$\gamma_1(\theta) = 2 \left(\frac{1}{2 \cos\left(\frac{\theta+\pi/2}{2}\right)} \right)^2.$$

La segunda propiedad está demostrada para el caso base.

Sabemos que γ_1 es una parábola, y es conocido que la mediatriz entre el foco de la parábola y cualquier punto de su directriz es tangente a la parábola, así que la tercera parte de la hipótesis inductiva también se cumple.

Paso inductivo.

Supongamos que las tres propiedades están demostradas para todo entero entre 1 y k , los dos incluidos. Ahora las demostraremos para $k + 1$.

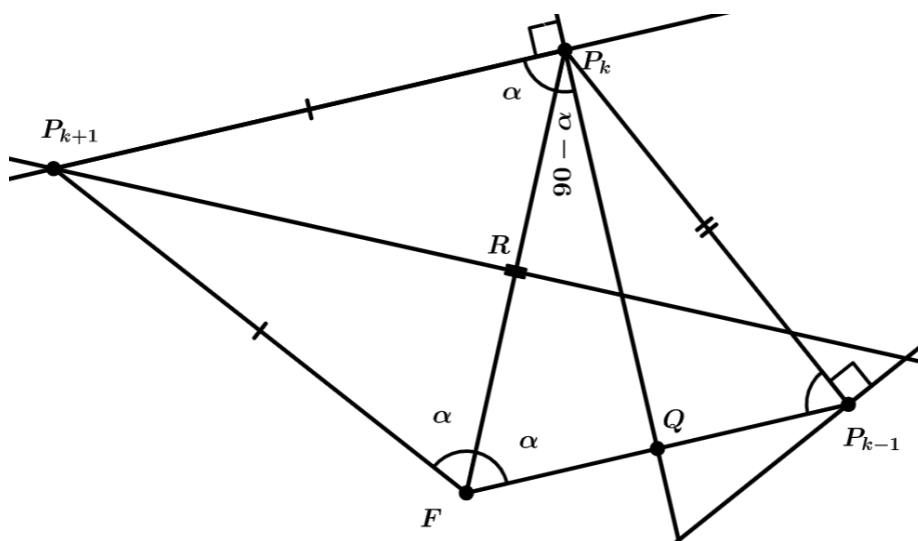


Figura 5: Diagrama de la construcción usada en el paso inductivo.

Sabemos por la tercera propiedad de la hipótesis inductiva que la mediatriz entre R_{k-1} y F es tangente a la curva γ_k en el punto R_k . Entonces, la recta perpendicular a esta mediatriz en el punto R_k será la recta normal a la curva γ_k que necesitamos para encontrar el punto R_{k+1} a partir de la construcción ya definida. El punto R_{k+1} es la intersección entre esta recta normal y la mediatriz entre R_k y F .

Llamamos Q y R a los puntos medios de los segmentos $R_{k-1}F$ y R_kF , respectivamente, como podemos observar en la figura 5. Por la primera propiedad de la hipótesis de inducción, $\angle R_{k-1}FP_k = \alpha$. Como $\angle R_kQF$ es recto, tenemos que $\angle FR_kQ = 90^\circ - \alpha$, $\angle R_{k+1}R_kF = \alpha$ y, finalmente, $R_kFR_{k+1} = \alpha$, lo cual demuestra la primera propiedad para $k + 1$.

Recordemos que $\alpha = (\theta_1 + \pi/2)/2$, donde θ_1 es el ángulo que FR_1 forma con el eje de abscisas. En consecuencia, $\theta_1 = 2\alpha - \pi/2$. Si llamamos θ al ángulo que FR_k forma con el eje de abscisas, podemos afirmar que $\theta = \theta_1 + (k - 1)\alpha$ ya que, por la primera propiedad de la hipótesis, $\angle P_{n-1}FP_n = \alpha$ para todo n natural menor que $k + 1$. Entonces, $\theta = (k + 1)\alpha - \pi/2$. En consecuencia, también sabemos que FR_{k+1} forma un ángulo de valor $\alpha(k + 2) - \pi/2$ con la parte positiva del eje de abscisas. Por la segunda parte de la hipótesis de inducción, sabemos que

$$|FR_k| = \gamma_k(\theta) = 2 \left(\frac{1}{2 \cos \left(\frac{\theta + \pi/2}{k+1} \right)} \right)^{k+1}.$$

Si aplicamos el cambio de variable $\theta = \alpha(k + 1) - \pi/2$, tenemos que

$$|FR_k| = \gamma_k \left(\alpha(k + 1) - \frac{\pi}{2} \right) = 2 \left(\frac{1}{2 \cos \alpha} \right)^{k+1}.$$

Tenemos que $|FR| = |FR_k|/2$ y, considerando el triángulo rectángulo $\triangle FRP_{k+1}$, sabemos que $|FR_{k+1}| = |FR_k|/(2 \cos \alpha)$. Entonces,

$$\gamma_{k+1} \left(\alpha(k + 2) - \frac{\pi}{2} \right) = |FR_{k+1}| = \frac{\gamma_k \left(\alpha(k + 1) - \frac{\pi}{2} \right)}{2 \cos \alpha} = 2 \left(\frac{1}{2 \cos \alpha} \right)^{k+2}$$

Si ahora deshacemos el cambio de variable $\alpha = (\theta + \pi/2)/(k + 2)$, tenemos que

$$\gamma_{k+1}(\theta) = 2 \left(\frac{1}{2 \cos \left(\frac{\theta + \pi/2}{k+2} \right)} \right)^{k+2}.$$

Por lo tanto, la segunda propiedad ha sido demostrada para $k + 1$.

Para finalizar esta demostración nos falta demostrar la tercera propiedad para $k + 1$, que dice que la mediatriz entre los puntos P_k y F es tangente a la curva γ_{k+1} en el punto P_{k+1} . Lo demostraremos de la siguiente manera. Sabemos que la mediatriz de $P_k F$ y γ_{k+1} se intersecan en el punto P_{k+1} por la construcción que hemos definido. Entonces, tenemos que ver que las derivadas de las dos curvas tienen el mismo valor en el punto P_{k+1} .

El punto P_k en función del ángulo α en coordenadas polares es $(2(1/(2 \cos \alpha))^{k+1}, \alpha(k + 1) - \pi/2)$.

Sabemos que la ecuación polar de una recta r es $r(\beta) = a \sec(\beta - \beta_0)$, donde a es la distancia mínima de r al origen y β_0 es el ángulo que forma la perpendicular a r que pasa por el origen con el eje de las X positivo. Ya que el ángulo que forma $F P_k$ con el eje de abscisas positivo es $\alpha(k + 1) - \pi/2$ y la distancia mínima a la recta es $2(1/(2 \cos \alpha))^{k+1}$, la ecuación polar de la mediatriz es

$$m(\theta) = \frac{\left(\frac{1}{2 \cos \alpha}\right)^{k+1}}{\cos(\theta - (\alpha(k + 1) - \pi/2))}.$$

La derivada de la mediatriz respecto a θ es, entonces,

$$m'(\theta) = \left(\frac{1}{2 \cos \alpha}\right)^{k+1} \frac{\text{sen}(\theta - (\alpha(k + 1) - \pi/2))}{\cos^2(\theta - (\alpha(k + 1) - \pi/2))},$$

y el valor de la derivada en el punto P_{k+1} , que está definido por el ángulo $\theta = \alpha(k + 2) - \pi/2$, es

$$m'(\alpha(k + 2) - \pi/2) = \left(\frac{1}{2 \cos \alpha}\right)^{k+1} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}.$$

Ahora derivamos la curva $\gamma_{k+1}(\theta)$ respecto a θ :

$$\gamma'_{k+1}(\theta) = \left(\frac{1}{2 \cos\left(\frac{\theta + \pi/2}{k+2}\right)}\right)^{k+1} \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta + \pi/2}{k+2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta + \pi/2}{k+2}\right)}.$$

Finalmente, el valor de esta derivada en el punto P_{k+1} es

$$\gamma'_{k+1}(\alpha(k + 2) - \pi/2) = \left(\frac{1}{2 \cos \alpha}\right)^{k+1} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}.$$

Como las dos derivadas en el punto P_{k+1} tienen el mismo valor, sabemos que la mediatriz es tangente a γ_{k+1} , lo que demuestra la tercera propiedad y concluye la demostración. ■

Entonces, la curva γ_k tiene la ecuación polar siguiente:

$$\gamma_k(\theta) = 2 \left(\frac{1}{2 \cos\left(\frac{\theta + \pi/2}{k+1}\right)}\right)^{k+1}.$$

Observación 11. Es fácil ver que la curva polar γ_k tiene período $2\pi(k + 1)$, ya que $\cos x$ tiene período 2π . El valor mínimo de $|\gamma_k(\theta)|$ es adoptado cuando⁵

$$\cos\left(\frac{\theta + \pi/2}{k + 1}\right) = \pm 1 \implies \theta = -\frac{\pi}{2} + n\pi(k + 1), \quad n \in \mathbb{Z},$$

y la curva no está definida para

$$\cos\left(\frac{\theta + \pi/2}{k + 1}\right) = 0 \implies \theta = -\frac{\pi}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi(k + 1), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \blacktriangleleft$$

⁵El punto en coordenadas polares (θ, r) para $r < 0$ se define como el punto simétrico a $(\theta, -r)$ respecto al origen de coordenadas.

Definición 12. Llamaremos *ala negativa* de γ_k a la curva

$$\gamma_k(\theta), \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2} + \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi(k+1), -\frac{\pi}{2} + n\pi(k+1) \right]$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Llamaremos *ala positiva* de γ_k a la curva

$$\gamma_k(\theta), \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2} + n\pi(k+1), -\frac{\pi}{2} + \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi(k+1) \right)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. ◀

Se deja como ejercicio para el lector ver que cualquier punto de γ_k pertenece a una de las dos alas.

3.1. La curva γ_k como espiral sinusoidal

Una espiral sinusoidal es una curva de la forma

$$r^n = a^n \cos(n\theta),$$

donde $na \neq 0$ con n racional y a real. Si escogemos $n = -1/(m+1)$, $a = 1/2^m$ y $\theta = \alpha + \pi/2$, con m natural, tenemos la siguiente curva:

$$r = 2 \left(\frac{1}{2 \cos\left(\frac{\alpha + \pi/2}{m+1}\right)} \right)^{m+1}.$$

Entonces, podemos concluir que las curvas γ_k forman parte de la familia de las espirales sinusoidales, en concreto las espirales en que $n = -1/m$ con m natural.

3.2. Representación gráfica de γ_k

Ahora que hemos demostrado la ecuación polar de la curva γ_k podemos representarla en el plano cartesiano, como veremos en la figura 6.

Esta figura está hecha con la calculadora gráfica Desmos [2]. Esta calculadora ha sido muy útil para enunciar las propiedades de la curva γ_k , sobre todo para las siguientes secciones del artículo. En el enlace de la bibliografía se puede ver la representación de la curva γ_k para cualquier k y una ayuda visual para la sección 3.4.

3.3. Intersecciones de γ_k con el círculo $r(\theta) = 2$

Observando la figura 6, vemos que las curvas γ_k cruzan el círculo $r(\theta) = 2$ en unos ángulos concretos. El teorema 13, además de ser interesante como propiedad, será útil en la sección 3.4.

Teorema 13. *Hay seis posibles puntos de intersección de γ_k con la circunferencia centrada en el origen de radio 2.*

Demostración. Para demostrar este teorema determinaremos los ángulos θ tales que $\gamma_k(\theta) = \pm 2$ para cada valor de k . Aislaremos θ de la ecuación siguiente:

$$2 \left(\frac{1}{2 \cos\left(\frac{\theta + \pi/2}{k+1}\right)} \right)^{k+1} = \pm 2.$$

La expresión anterior es equivalente⁶ a

$$\cos\left(\frac{\theta + \pi/2}{k+1}\right) = \pm \frac{1}{2}.$$

⁶Esto se puede comprobar fácilmente haciendo un análisis por casos.

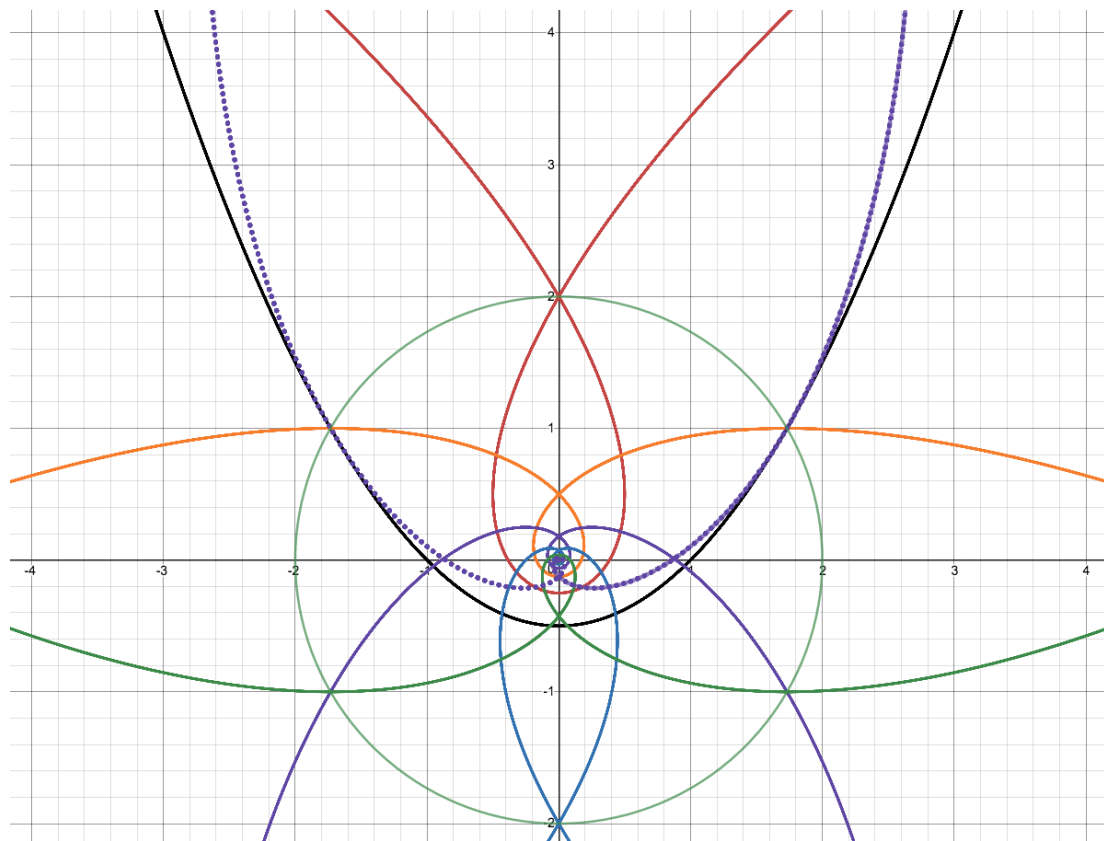


Figura 6: Podemos ver γ_1 en negro, γ_2 en rojo, γ_3 en naranja, γ_4 en violeta, γ_5 en azul, γ_6 en verde oscuro y γ_7 en violeta punteado.

Ahora consideramos dos casos:

- $\frac{\theta + \pi/2}{k+1} = \pi n + \frac{\pi}{3}$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

Si aislamos θ tenemos que

$$\theta = -\frac{\pi}{2} + \pi(k+1)\left(n + \frac{1}{3}\right).$$

Como k y n son enteros, concluimos que los ángulos resultantes son de la forma $\pi\ell/3 - \pi/2$ para valores de ℓ enteros.

Los puntos definidos por estos ángulos pertenecen a el ala positiva de γ_k , ya que

$$-\frac{\pi}{2} + \pi(k+1)\left(n + \frac{1}{3}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2} + n\pi(k+1), -\frac{\pi}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi(k+1)\right).$$

- $\frac{\theta + \pi/2}{k+1} = \pi n - \frac{\pi}{3}$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

Hacemos lo mismo en este caso:

$$\theta = -\frac{\pi}{2} + \pi(k+1)\left(n - \frac{1}{3}\right).$$

Igual que en el caso anterior, los valores de los ángulos que buscamos son de la forma $\theta = \pi\ell/3 - \pi/2$ para ℓ entero.

Y, análogamente, los puntos definidos por estos ángulos pertenecen a el ala negativa de γ_k .

Concluimos que solo hay seis ángulos para los que la curva γ_k puede intersectar la circunferencia de radio 2, y estos son

$$\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6} \text{ y } \frac{\pi}{6}. \quad \blacksquare$$

3.4. γ_k cuando k tiende a infinito

Explorando la curva γ_k para diferentes valores de k en la web Desmos [2], es fácil darse cuenta que, para valores de k suficientemente grandes, las alas de γ_k forman espirales. En esta sección veremos cuál es la espiral a la que cada ala de γ_k se aproxima cuando k tiende a infinito.

Como dice la intuición y puede ser demostrado fácilmente, las dos alas de la curva γ_k son simétricas respecto el eje vertical. Entonces, sin pérdida de generalidad, estudiaremos el ala positiva de γ_k .

Para k muy grande, vemos que los valores que adopta $\gamma_k(\theta)$ son arbitrariamente pequeños alrededor de $\theta = 0$. Para resolver este problema y poder trabajar mejor con el ala positiva de γ_k para cualquier k , definiremos una rotación⁷ $\tilde{\gamma}_k$ de γ_k , definida con la relación $\tilde{\gamma}_k(\theta) = \gamma_k(\theta + \pi(k+1)/3 - \pi/2)$, tal que la intersección de el ala positiva de γ_k con la circunferencia $r(\theta) = 2$ se encuentre en el eje de abscisas:

$$\tilde{\gamma}_k(\theta) = 2 \left(\frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\theta}{k+1}\right)} \right)^{k+1}.$$

La curva $\tilde{\gamma}_k$ es similar a la curva γ_k ya que es una rotación de ella, y podemos ver que $\tilde{\gamma}_k(0) = 2$ para todo k . Finalmente, podemos calcular el límite cuando k tiende a infinito,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}_k(\theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\theta}{k}\right)} \right)^k.$$

Usando que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}_k(\theta) = 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\cos \frac{\theta}{k} - \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{k}} \right)^k.$$

Es conocido que, si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{(f(x)-1)g(x)}$. Usando esta propiedad,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}_k(\theta) = 2 \lim_{k \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{1}{\cos(\theta/k) - \sqrt{3} \sin(\theta/k)} - 1\right)k} = 2e^{\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\cos(\theta/k) - \sqrt{3} \sin(\theta/k)} - 1\right)k}.$$

Trabajando con el límite del exponente y simplificando, tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\cos \frac{\theta}{k} - \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{k}} - 1 \right) k = \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(1 - \cos \frac{\theta}{k} \right) + \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\sqrt{3} \sin \frac{\theta}{k} \right) = 0 + \sqrt{3}\theta$$

Entonces, podemos concluir que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}_k(\theta) = 2e^{\sqrt{3}\theta}.$$

La curva en forma polar $r(\theta) = ae^{b\theta}$ con a, b reales diferentes de 0 es una espiral logarítmica. Por lo tanto, cuando k tiende a infinito, las dos alas de la curva γ_k se aproximan a dos espirales logarítmicas de la forma $r(\theta) = \pm 2e^{\sqrt{3}(\theta-\alpha)}$, para algún α real.

⁷En coordenadas polares, el punto (r, θ) representa una rotación respecto el origen de coordenadas del punto $(r, \theta + \alpha)$.

Referencias

- [1] BURTON, David M. *The History of Mathematics: An Introduction*. 7.^a ed. Nueva York: McGraw-Hill, 2011. ISBN: 978-0-07-338315-6.
- [2] *Desmos, Calculadora gráfica*. URL: <https://www.desmos.com/calculator/aorz8y1ldc>.
- [3] FERRÉOL, Robert. *Tschirnhausen's cubic*. En: *Encyclopédie des formes mathématiques remarquables*. 2017. URL: <https://www.mathcurve.com/courbes2d.gb/tschirnhausen/tschirnhausen.shtml>.
- [4] LAWRENCE, J. Dennis. *A Catalog of Special Plane Curves*. Mineola, Nueva York: Dover Publications, 1972. ISBN: 978-0-486-60288-2.
- [5] REDON, Pau. *La corba gamma*. Trabajo de Investigación de Bachillerato. 2019. URL: https://fme.upc.edu/ca/premi-poincare/edicions-anteriors/Premi-poincare-2019/arxius/poincare-2019-memoria-poincare_077-la_corba_gamma.pdf.
- [6] WEISSTEIN, Eric W. *Sinusoidal spirals*. En: *MathWorld*. A Wolfram Web Resource. URL: <http://mathworld.wolfram.com/SinusoidalSpiral.html>.