TEMat

Grafo asociado a los tamaños de las clases de conjugación de un grupo finito

A la memoria de Carlo Casolo

Víctor Sotomayor
Centro Universitario EDEM - Valencia
vsotomayor@edem.es

Resumen: En el presente trabajo asociamos a los tamaños de las clases de conjugación de un grupo finito G el denominado *grafo primo* $\Delta(G)$: los vértices son los números primos que dividen a algún tamaño de clase de G, y dos primos p y q forman una arista si pq divide a algún tamaño de clase. Nuestro objetivo en este artículo es doble: por un lado, mostrar algunos resultados básicos en esta área de investigación, y por otro lado, demostrar un bonito e importante teorema de S. Dolfi sobre la inexistencia de *conjuntos independientes* de tres vértices en este grafo cuando G es resoluble; es decir, dados tres vértices en $\Delta(G)$, siempre existen al menos dos de ellos conectados.

Abstract: In this paper we attach to the set of conjugacy class sizes of a finite group G the so-called *prime graph* $\Delta(G)$: the vertices are the prime numbers that divide some conjugacy class size of G, and two primes p and q form and edge whenever pq divides some class size. Our objective in this note is twofold: on the one hand, to show some basic results within this research area; on the other hand, to prove a nice and important theorem due to S. Dolfi about the non-existence of *independent sets* of three vertices in this graph when G is soluble; that is, given three distinct vertices of $\Delta(G)$, there always exist at least two of them which are connected.

Palabras clave: grupos finitos, clases de conjugación, grafos.

MSC2010: 20E45.

Recibido: 9 de agosto de 2019.
Aceptado: 15 de enero de 2020.

Agradecimientos: Este trabajo ha sido financiado por el contrato predoctoral ACIF/2016/170 de la Generalitat Valenciana, España. Me gustaría agradecer a los revisores sus cuidadosas revisiones y sus sugerencias de mejora.

Referencia: Sotomayor, Víctor. «Grafo asociado a los tamaños de las clases de conjugación de un grupo finito». En: *TEMat*, 4 (2020), págs. 101-113. ISSN: 2530-9633. URL: https://temat.es/articulo/2020-p101.

1. Introducción

En el presente trabajo, todos los grupos considerados son finitos. El estudio de la relación existente entre ciertos números naturales asociados a un grupo y su estructura es un amplio tema de investigación dentro de la teoría de grupos finitos. Concretamente, los tamaños de las clases de conjugación han tenido una especial relevancia en las últimas décadas. En el artículo de Ortiz Sotomayor [9] se muestra una introducción preliminar a esta área, estudiándose cómo algunas propiedades aritméticas concretas de los tamaños de clase controlan la estructura del grupo.

En esta línea, diversos autores están considerando recientemente un novedoso enfoque: grafos asociados a los tamaños de clase de un grupo G. Uno de los grafos que más interés está teniendo es el denominado *grafo primo* $\Delta(G)$, donde el conjunto de vértices $V(G)$ son los números primos que dividen a algún tamaño de clase de G, y el conjunto de aristas $E(G)$ está formado por pares $\{p, q\}$ de vértices p y q tales que su producto pq divide a algún tamaño de clase.

Dentro de este contexto, dos preguntas naturales que surgen son las siguientes: dado un grafo primo asociado a los tamaños de clase un grupo G, ¿qué podemos decir sobre la estructura de G? Y ¿qué grafos ocurren como grafos primos asociados a los tamaños de clase de G? Respecto a la primera pregunta veremos que, por ejemplo, un grafo primo $\Delta(G)$ no contiene como vértice a un primo divisor del orden de G si y solo si G tiene un p-subgrupo de Sylow contenido en su centro. También veremos que si dos vértices p y q no son adyacentes en $\Delta(G)$, entonces G tiene p-subgrupos de Sylow abelianos o q-subgrupos de Sylow abelianos, entre otras propiedades. No obstante, el principal resultado que probaremos en este trabajo responde a la segunda de las preguntas planteadas anteriormente. Antes de enunciarlo, recordamos que un *conjunto independiente* de un grafo $\mathcal{G}$ es un subconjunto π del conjunto de vértices tal que ningún par de elementos de π son adyacentes en $\mathcal{G}$.

Teorema A. *Si G es un grupo resoluble y p, q y r son tres números primos distintos tales que $\{p, q, r\} \subseteq V(G)$, entonces al menos dos de ellos forman una arista en $\Delta(G)$. En particular, $\Delta(G)$ no contiene conjuntos independientes de tres vértices.*

Este célebre teorema fue probado inicialmente por S. Dolfi [3, Theorem 16]. Sin embargo, algunos años más tarde el mismo autor solucionó algunos errores que había en su prueba [4]. Además, Dolfi [4] también proporcionó una demostración del mismo resultado eliminando la hipótesis de la resolubilidad del grupo, aunque haciendo uso de la clasificación de los grupos finitos simples. Señalamos también que la prueba del teorema A que presentamos en este artículo utiliza algunos razonamientos alternativos respecto de la original dada por Dolfi [3] y corregida posteriormente [4].

El teorema A tiene importantes consecuencias. La primera de ellas es que, en cierto sentido, el grafo $\Delta(G)$ tiende a poseer muchas aristas. Otras dos consecuencias inmediatas que se desprenden de dicho resultado vienen dadas en el corolario que aparece a continuación. Recordamos primeramente algunas definiciones que aparecen de la teoría de grafos. Una *componente conexa* de un grafo $\mathcal{G}$ es un subgrafo $\mathcal{H}$ donde todo par de vértices están conectados por algún camino y no hay aristas entre $\mathcal{H}$ y el resto del grafo $\mathcal{G}$. El *diámetro* de un grafo es la máxima distancia entre dos de sus vértices. Un grafo es *completo* cuando todo par de vértices están unidos por una arista.

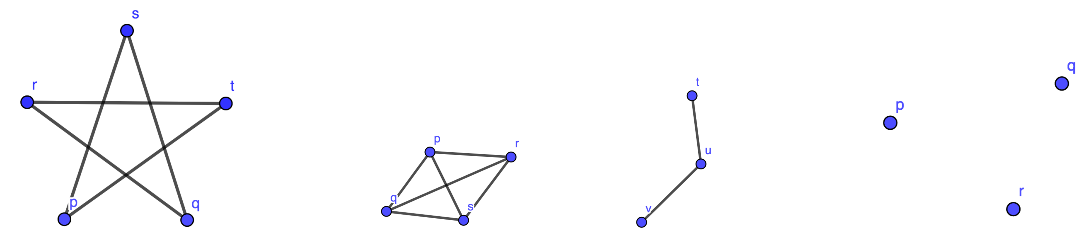
Corolario B. *Sea G un grupo resoluble. Entonces, el número de componentes conexas de $\Delta(G)$ es a lo sumo 2. Además,*

- *si $\Delta(G)$ es conexo, entonces su diámetro es a lo sumo 3;*
- *si $\Delta(G)$ es disconexo, entonces tiene dos componentes conexas que son grafos completos.*

Hemos mencionado anteriormente que el teorema A es cierto sin la hipótesis de la resolubilidad de G debido al trabajo de Dolfi [4], luego el corolario B se cumple realmente también para cualquier grupo G. Sin embargo, este hecho ya era conocido [3, Remark 8, Theorem 17] incluso antes de publicarse el trabajo de Dolfi [4].

Recordemos que, dado un grafo $\mathcal{G}$, el *grafo complementario* $\overline{\mathcal{G}}$ es el grafo que tiene el mismo conjunto de vértices que $\mathcal{G}$ y dos vértices forman una arista en $\overline{\mathcal{G}}$ si y solo si no forman una arista en $\mathcal{G}$. En otras palabras, es el mismo grafo pero con las aristas intercambiadas.

Así pues, el principal teorema de Dolfi [4] puede reescribirse como sigue: para cualquier grupo G, el grafo $\overline{\Delta}(G)$ no contiene ciclos de longitud 3. Recientemente, en el trabajo conjunto entre Dolfi, Pacifici, Sanus y Sotomayor [5], se ha probado que dicho teorema admite una versión mucho más general: el grafo $\overline{\Delta}(G)$ no contiene ciclos de longitud impar. Este tipo de grafos se llaman también grafos *bipartitos*, es decir, grafos cuyos conjuntos de vértices pueden dividirse en dos conjuntos independientes disjuntos de tal forma que toda arista une a un elemento de cada conjunto. Observemos que estos subconjuntos de vértices (llamados *cliques*) inducen subgrafos completos en $\Delta(G)$, luego dicho teorema nos dice que el grafo $\Delta(G)$ contiene dos cliques disjuntos cuya unión es $V(G)$. Por tanto, el segundo caso del corolario B se corresponde con la situación de dos cliques no conexos entre sí, mientras que en el primer caso existe alguna arista entre ambos cliques. Como consecuencia directa de los razonamientos anteriores, podemos afirmar que los grafos de la figura 1 no son posibles grafos $\Delta(G)$ para ningún grupo G.



(a) El grafo complementario es un ciclo de longitud 5.

(b) Consta de dos componentes conexas, pero una no es completa.

(c) Es un conjunto independiente de tamaño 3.

Figura 1: Grafos que no ocurren como $\Delta(G)$ para ningún grupo G.

Finalmente, destacamos que en el artículo recopilatorio de Lewis [8] puede encontrarse una excelente colección de resultados, aparte de los aquí presentes, sobre diversos grafos asociados a diferentes conjuntos de números naturales relativos a un grupo. Notemos que dicho trabajo fue publicado en 2008, por lo que muchos resultados que han sido probados en esta última década no aparecen en él.

La estructura del artículo es la siguiente: en las secciones 2 y 3 exponemos algunos resultados previos genéricos de la teoría de grupos y específicos de tamaños de clase, respectivamente. Dichos resultados serán necesarios para demostrar el teorema A en la sección 4, mientras que la última sección la dedicamos a la prueba del corolario B.

Notación. Utilizaremos notación y terminología estándar del contexto de la teoría de grupos finitos, las cuales siguen principalmente los libros de Doerk y Hawkes [2] y Isaacs [6]. No obstante, recordamos a continuación los principales conceptos que aparecerán frecuentemente. Para un grupo G, sea x^G la *clase de conjugación* de un elemento $x \in G$, es decir, $x^G = \{x^g \mid g \in G\} = \{g^{-1}xg \mid g \in G\}$. El tamaño de este conjunto lo denotaremos por $|x^G|$. El conjunto de primos divisores de un número natural n lo denotaremos por $\pi(n)$. En particular, $\pi(G)$ es el conjunto de primos divisores del orden de G. Para un número primo p, escribiremos $\mathrm{Syl}_p(G)$ para denotar al conjunto de p-subgrupos de Sylow de G. Usaremos $\mathbf{Z}(G)$ para referirnos al centro de un grupo G. Si H y K son subconjuntos de G, entonces el centralizador y normalizador en K de H los denotaremos por $\mathbf{C}_K(H)$ y $\mathbf{N}_K(H)$, respectivamente. Escribiremos $\langle H_1, H_2, \dots, H_n \rangle$ para referirnos al menor grupo que contenga a los subgrupos $H_1, H_2, \dots, H_n$. Si N es un subgrupo normal de G, escribiremos $N \trianglelefteq G$. Finalmente, usaremos la notación $\leqslant$ y $<$ para la inclusión e inclusión propia de subgrupos, mientras que $\subseteq$ y $\subset$ serán inclusión e inclusión propia de subconjuntos, respectivamente. ◂

2. Preliminares de grupos

Comenzamos esta sección recordando de manera breve algunos conceptos y propiedades básicas de la teoría de grupos.

Dado un grupo G, la célebre *identidad de Dedekind* afirma que, si U, V y W son subconjuntos de G tales que $V \subseteq U$, entonces $U \cap VW = V(U \cap W)$.

Diremos que un subgrupo H es *característico* en G, y escribiremos H car G, si $\phi(H) = H$ para cualquier automorfismo ϕ de G. Es fácil ver que todo subgrupo característico es normal ya que la conjugación es un caso particular de automorfismo de un grupo. Además, si H_1 car $H_2 \trianglelefteq G$, entonces $H_1 \trianglelefteq G$.

Dados dos elementos $a, b \in G$, definimos el *conmutador* de a y b como $[a, b] := a^{-1}b^{-1}ab$. Si A y B son dos subgrupos de G, entonces $[A, B] := \langle [a, b] \mid a \in A, b \in B\rangle \leqslant G$. En particular, $G' := [G, G]$ es el *subgrupo derivado* de G, el cual es característico en G. Notemos que $a \in \mathbf{C}_G(b)$ es equivalente a $[a, b] = 1$, y $G' = 1$ si y solo si G es abeliano. Análogamente, se define $G^{(2)} := [G', G']$ y, en general, $G^{(i)} := [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$. Es fácil ver que un grupo es resoluble si y solo si existe un número natural n tal que $G^{(n)} = 1$. Un par de sencillas propiedades de los conmutadores que serán útiles son las siguientes.

Lema 1 ([2, A - Lemma 7.4 (a-c)]). *Sean A y B dos subgrupos de un grupo G y N un subgrupo normal de G. Entonces,*

1. $[A, B] = [B, A] \trianglelefteq \langle A, B\rangle$;
2. $[A, B]N/N = [AN/N, BN/N]$.

Sea P un p-subgrupo de Sylow de G para un primo p. Definimos el *subgrupo p-radical* $\mathbf{O}_p(G)$ de G como la intersección de todos los conjugados de P en G. Claramente, $\mathbf{O}_p(G)$ es un p-subgrupo normal de G. De hecho, es el mayor p-subgrupo normal de G, ya que cualquier otro p-subgrupo normal de G estará contenido en todos los conjugados de P por el segundo y el tercer teorema de Sylow. De manera análoga, definimos el subgrupo $\mathbf{O}_{p'}(G)$ como el mayor subgrupo normal de G cuyo orden es no divisible por p.

Un grupo es *nilpotente* si es el producto directo de sus subgrupos de Sylow. El *subgrupo de Fitting* $\mathbf{F}(G)$ de G es el producto de los subgrupos p-radicales de G para cada primo p. Como todos ellos son normales en G y tienen intersección trivial, en particular forman un producto directo, luego $\mathbf{F}(G)$ es un subgrupo nilpotente y normal en G. Sea N un subgrupo nilpotente y normal en G. Observemos que $\mathbf{O}_p(N)$ es el único p-subgrupo de Sylow de N por el segundo teorema de Sylow, luego $\mathbf{O}_p(N)$ car $N \trianglelefteq G$. Se sigue que $\mathbf{O}_p(N) \leqslant \mathbf{O}_p(G)$ para cada primo p, luego $N \leqslant \mathbf{F}(G)$ y por tanto $\mathbf{F}(G)$ es el mayor subgrupo normal y nilpotente de G.

La intersección de todos los subgrupos maximales de G es el *subgrupo de Frattini* $\mathbf{\Phi}(G)$ de G, el cual es un subgrupo característico de G. Las principales propiedades del subgrupo $\mathbf{\Phi}(G)$ son las siguientes.

Lema 2. *Si G es un grupo, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Si $H \leqslant G$ tal que $G = H\mathbf{\Phi}(G)$, entonces $G = H$.*
2. (Argumento de Frattini) *Si $N \trianglelefteq G$ y $P \in \mathrm{Syl}_p(N)$, entonces $G = N\mathbf{N}_G(P)$.*
3. *$\mathbf{\Phi}(G)$ es un subgrupo nilpotente. En particular, $\mathbf{\Phi}(G) \leqslant \mathbf{F}(G)$.*
4. *Si $N \trianglelefteq G$ y $U \leqslant G$ tal que $N \leqslant \mathbf{\Phi}(U)$, entonces $N \leqslant \mathbf{\Phi}(G)$.*
5. *Si $N \trianglelefteq G$, entonces $\mathbf{\Phi}(N) \leqslant \mathbf{\Phi}(G)$.*
6. *Si G es p-grupo y $\mathbf{\Phi}(G) = 1$, entonces G es abeliano.*

Demostración. 1. Supongamos por reducción al absurdo que $H < G$, luego existe un subgrupo maximal M de G tal que $H \leqslant M$. Pero $\mathbf{\Phi}(G) \leqslant M$ por definición, luego $H\mathbf{\Phi}(G) \leqslant M < G$, lo cual contradice la hipótesis $G = H\mathbf{\Phi}(G)$.

2. Sea $x \in G$. Entonces $P^x \leqslant N^x = N$ porque N es normal en G. Como $|P^x| = |P|$, entonces vuelve a ser un p-subgrupo de Sylow de N y, por el segundo teorema de Sylow, existe $y \in N$ tal que $P^x = P^y$. Así, $xy^{-1} \in \mathbf{N}_G(P)$. Como $x = (xy^{-1})y$ y x era arbitrario, concluimos que $G = \mathbf{N}_G(P)N$.

3. Si $P \in \mathrm{Syl}_p(\mathbf{\Phi}(G))$, como $\mathbf{\Phi}(G)$ es normal en G, entonces por el argumento de Frattini tenemos que $G = \mathbf{\Phi}(G)\mathbf{N}_G(P)$. Por el punto 1 deducimos que $G = \mathbf{N}_G(P)$, luego P es normal en G y, en particular, en $\mathbf{\Phi}(G)$, para cada primo p. La última afirmación se debe a que $\mathbf{F}(G)$ es el mayor subgrupo normal y nilpotente de G.

4. Supongamos que $N \nleqslant \mathbf{\Phi}(G)$, por lo que existe un subgrupo maximal M de G tal que $N \nleqslant M$. Entonces, $M < MN \leqslant G$ y, por maximalidad de M, deducimos que $G = MN$. Por tanto, usando la hipótesis $N \leqslant \mathbf{\Phi}(U)$ y la identidad de Dedekind, tenemos que $U = U \cap G = U \cap MN = N(U \cap M)$. Consecuentemente,

$U = N(U \cap M) \leqslant \mathbf{\Phi}(U)(U \cap M)$, luego $U = U \cap M$ por la propiedad del punto 1. Así, $N \leqslant U \leqslant M$, lo cual es una contradicción.

5. Como $\mathbf{\Phi}(N)$ car $N \trianglelefteq G$, entonces $\mathbf{\Phi}(N) \trianglelefteq G$. Aplicando el punto 4 con N y $\mathbf{\Phi}(N)$, obtenemos la tesis.

6. Sea M un subgrupo maximal arbitrario de G. Entonces, M es normal en G y $|G : M| = p$. Se sigue que G/M es abeliano, luego usando el lema 1 (2) deducimos $[G/M, G/M] = [G,G]M/M = 1$. Por tanto, $G' \leqslant M$, para todo M maximal de G. Se sigue que $G' \leqslant \mathbf{\Phi}(G) = 1$, luego G es abeliano. ■

La estructura de los normales minimales resolubles de un grupo G será utilizada frecuentemente en la prueba del principal teorema del trabajo. En este sentido, el sencillo resultado que viene a continuación es fundamental. Es una de las razones por las cuales imponemos la hipótesis de resolubilidad del grupo en el teorema A.

Lema 3. *Sea N un subgrupo normal minimal resoluble de un grupo G. Entonces, N es abeliano y $|N|$ es una potencia de primo.*

Demostración. Como N es resoluble, entonces existe un número natural n tal que $N^{(n)} = 1$. En particular, el subgrupo derivado $N' < N$. Pero N' car $N \trianglelefteq G$, luego $N' \trianglelefteq G$. Como N es normal minimal de G, deducimos que $N' = 1$ y N es abeliano. En particular, N es nilpotente. Si p y q son dos primos divisores de $|N|$, entonces $\mathbf{O}_p(N)$ y $\mathbf{O}_q(N)$ son subgrupos de Sylow de N únicos. Luego son característicos en $N \trianglelefteq G$. Se sigue que ambos son normales en G y, por la minimalidad de N, deducimos que solamente uno de ellos puede ser igual a N. Por tanto, $|N|$ es una potencia de primo. ■

El subgrupo de G generado por sus normales minimales es el *subgrupo socle* $\mathrm{Soc}(G)$. Como dos normales minimales distintos tienen intersección trivial, es fácil ver que $\mathrm{Soc}(G)$ es el producto directo de un subconjunto de normales minimales de G. En particular, si G es resoluble, el subgrupo $\mathrm{Soc}(G)$ es abeliano por el lema 3. De hecho, se cumplen las siguientes importantes igualdades, que serán de mucha utilidad en la demostración del teorema A. La prueba utiliza técnicas elementales pero no es inmediata, luego será referida.

Lema 4 ([2, A - Theorem 10.6 (c) (ii)]). *Sea G un grupo resoluble. Entonces,*

$$\mathbf{F}(G/\mathbf{\Phi}(G)) = \mathbf{F}(G)/\mathbf{\Phi}(G) = \mathbf{C}_{G/\mathbf{\Phi}(G)}(\mathbf{F}(G)/\mathbf{\Phi}(G)) = \mathrm{Soc}(\mathbf{F}(G)/\mathbf{\Phi}(G)).$$

Una situación significativa que aparecerá en numerosas ocasiones en el resto del trabajo es la siguiente. Diremos que un subgrupo A de un grupo G es *complementado en* G si existe un subgrupo H tal que $G = AH$ con $A \cap H = 1$. En particular, si un p-subgrupo de Sylow de G es complementado por un subgrupo normal de G, diremos que G es *p-nilpotente*.

A continuación, presentamos algunos resultados preliminares que serán necesarios para el resto del trabajo. Para agilizar la lectura, algunas de las pruebas serán referidas. El siguiente resultado se le atribuye a Gaschütz y nos da una condición suficiente para que un subgrupo normal abeliano sea complementado. Aunque es un resultado clásico en la teoría de grupos, incluimos su corta demostración.

Lema 5. *Si A es un subgrupo abeliano normal de un grupo G tal que $A \cap \mathbf{\Phi}(G) = 1$, entonces A es complementado en G.*

Demostración. Sea H un subgrupo de orden mínimo dentro del conjunto no vacío $\{T \leqslant G : G = TA\}$. Como A es abeliano y normal en G, entonces $H \cap A$ es centralizado por A y normal en H. Por tanto, $H \cap A \trianglelefteq AH = G$. Supongamos que $H \cap A$ no está contenido en $\mathbf{\Phi}(H)$. Entonces, existe un subgrupo maximal M de H tal que $H \cap A \nleqslant M$, luego $M < M(H \cap A) \leqslant H$. Por maximalidad de M en H, tenemos que $H = M(H \cap A)$. Como $H \cap A \leqslant A$, entonces $G = HA = M(H \cap A)A = MA$ con $|M| < |H|$, lo cual contradice la minimalidad de H. Deducimos que $H \cap A \leqslant \mathbf{\Phi}(H)$ y usando el lema 2 (4) obtenemos que $H \cap A \leqslant A \cap \mathbf{\Phi}(G) = 1$. ■

El próximo resultado también proporciona una condición suficiente para que un subgrupo normal sea complementado. Se trata del célebre teorema de Schur-Zassenhaus.

Teorema 6 ([2, A - Theorem 11.3]). *Sea A un subgrupo normal de un grupo G tal que $|A|$ y $|G/A|$ son coprimos. Entonces, A es complementado en G.*

En particular, el teorema de Schur-Zassenhaus determina una condición suficiente para que un grupo G sea p-nilpotente. La siguiente proposición también va en esta línea y es un resultado clásico de Burnside.

Proposición 7 ([6, Theorem 9.13]). *Sean G un grupo y P un p-subgrupo de Sylow de G. Si $P \leqslant \mathbf{Z}(\mathbf{N}_G(P))$, entonces G es p-nilpotente.*

Como aplicación del teorema 6 también mostramos la siguiente interesante propiedad del subgrupo de Frattini.

Lema 8. *Sea G un grupo. Entonces, $\pi(\mathbf{\Phi}(G)) \subseteq \pi(G / \mathbf{\Phi}(G))$.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $p \in \pi(\mathbf{\Phi}(G)) \setminus \pi(G / \mathbf{\Phi}(G))$. Por el primer teorema de Sylow, existe $P \in \mathrm{Syl}_p(\mathbf{\Phi}(G))$. Como $|G| = |G / \mathbf{\Phi}(G)| \cdot |\mathbf{\Phi}(G)|$, entonces por órdenes también $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Sabemos que $\mathbf{\Phi}(G)$ es un subgrupo nilpotente por el lema 2 (3), luego P es un subgrupo característico de $\mathbf{\Phi}(G)$, el cual es normal en G. Deducimos que $P = \mathbf{O}_p(G)$. Aplicando el teorema 6 obtenemos que $G = PH$ para cierto subgrupo H de G tal que $P \cap H = 1$. Pero entonces $G = PH \leqslant \mathbf{\Phi}(G)H$. Utilizando el lema 2 (1), deducimos que $G = H$, lo cual es imposible. ∎

Lema 9. *Sea G un grupo.*

1. *Si H es un subgrupo de G tal que $G = \bigcup_{g \in G} H^g$, entonces $G = H$.*
2. *Si $G = A \cup B$ con A y B subgrupos de G, entonces $G = A$ o $G = B$.*

Demostración. 1. Se sigue de unos sencillos argumentos de conteo [6, Corollary 4.16].

2. Supongamos que $A < G$ y $B < G$. Entonces, $|G : A| \geq 2$ y $|G : B| \geq 2$, de donde deducimos que $|A| \leq |G|/2$ y $|B| \leq |G|/2$. Como posiblemente coincidirán en algunos elementos, además del elemento identidad, obtenemos que $|G| \leq |A| + |B| \leq (|G|/2 - 1) + (|G|/2 - 1) + 1 = |G| - 1$, lo cual es una contradicción. ∎

Cerramos esta sección con un resultado clásico de acción coprima.

Lema 10 ([2, A - Proposition 12.5]). *Supongamos que P y Q son subgrupos de un grupo G de tal forma que Q actúa por conjugación sobre P. Si $|P|$ y $|Q|$ son coprimos, entonces $P = [P, Q]\,\mathbf{C}_P(Q)$.*

3. Preliminares de tamaños de clases de conjugación

Comenzamos esta sección presentando unas propiedades elementales. Recordemos que $|x^G| = |G : \mathbf{C}_G(x)|$ para cualquier elemento $x \in G$ por el teorema de la órbita-estabilizador.

Lema 11. *Sea G un grupo. Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Si $N \trianglelefteq G$, entonces $|x^N|$ divide a $|x^G|$ para todo $x \in N$.*
2. *Si $N \trianglelefteq G$, entonces $|(xN)^{G/N}|$ divide a $|x^G|$ para todo $x \in G$.*
3. *Si N y M son subgrupos normales de G tales que $M \cap N = 1$, entonces $\pi(|x^G|) \cup \pi(|y^G|) \subseteq \pi(|(xy)^G|)$ para todo $x \in N$ e $y \in M$.*
4. *Si A y B son dos subgrupos de G y $g \in G$, entonces $\mathbf{C}_A(B)^g = \mathbf{C}_{A^g}(B^g)$.*
5. *Si un primo p no divide a $|x^G|$ y $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, entonces $x \in \mathbf{C}_G(P^g)$ para algún $g \in G$.*

Demostración. Los dos primeros apartados se corresponden con el lema 5 del artículo de Ortiz Sotomayor [9]. Por tanto, nos centramos en la prueba de los apartados 3, 4 y 5.

3. Sea $g \in \mathbf{C}_G(xy)$, con $x \in N$ e $y \in M$. Entonces, $xy = (xy)^g = x^g y^g$, luego $x^{-1}x^g = y(y^g)^{-1}$. Como M y N son normales, entonces $x^{-1}x^g = y(y^g)^{-1} \in M \cap N = 1$, luego $x = x^g$ e $y = y^g$. Deducimos que $g \in \mathbf{C}_G(x) \cap \mathbf{C}_G(y)$ y, por tanto, $\mathbf{C}_G(xy) = \mathbf{C}_G(x) \cap \mathbf{C}_G(y)$, ya que la otra inclusión es evidente. Como consecuencia, obtenemos que $\mathbf{C}_G(xy) \leqslant \mathbf{C}_G(x) \leqslant G$, luego por transitividad $|x^G| = |G : \mathbf{C}_G(x)|$ divide a $|G : \mathbf{C}_G(xy)| = |(xy)^G|$ y, análogamente, $|y^G|$ divide a $|(xy)^G|$. La inclusión de conjuntos del enunciado queda probada.

4. Sea $x \in \mathbf{C}_A(B)^g$, luego $x = c^g$ para cierto $c \in \mathbf{C}_A(B)$. Como $c \in A$, entonces $x = c^g \in A^g$. Además, para cualquier $b \in B$, se cumple que $[x, b^g] = [c^g, b^g] = [c, b]^g = 1$ ya que $c \in \mathbf{C}_A(B)$. Por tanto, $x \in \mathbf{C}_{A^g}(B^g)$. Recíprocamente, si $x \in \mathbf{C}_{A^g}(B^g)$, entonces $x \in A^g$ y $[x, b^g] = 1$ para todo $b \in B$. Así, $x = a^g$ para cierto $a \in A$ y $1 = [a^g, b^g] = [a, b]^g$. Por tanto, $[a, b] = 1$ y $a \in \mathbf{C}_A(B)$, luego $x = a^g \in \mathbf{C}_A(B)^g$.

5. Observemos que $|G| = |x^G| \cdot |\mathbf{C}_G(x)|$. Por tanto, como p no divide a $|x^G|$, necesariamente la mayor potencia de p que divide a $|G|$ es exactamente la misma que la que divide a $|\mathbf{C}_G(x)|$. Deducimos por el primer teorema de Sylow que $\mathbf{C}_G(x)$ tiene un p-subgrupo de Sylow P_0 y, por órdenes, obtenemos que $P_0 \in \operatorname{Syl}_p(G)$. Además, por el segundo teorema de Sylow, $P_0 = P^g$ para algún $g \in G$, luego $P^g \leqslant \mathbf{C}_G(x)$ y $x \in \mathbf{C}_G(P^g)$. ∎

Como hemos comentado en la introducción, una de las primeras situaciones a estudiar es cuando $\Delta(G)$ no posee cierta arista. El siguiente resultado proporciona información estructural de G en este contexto. Cabe destacar que fue demostrado por Itô en 1953 [7], mucho antes de conocerse la noción de grafo primo asociado a los tamaños de clase.

Teorema 12. *Sean G un grupo y $p, q \in V(G)$. Si $\{p, q\} \notin E(G)$, entonces (salvo intercambio de p y q) G es p-nilpotente con p-subgrupos de Sylow abelianos.*

Demostración. Tomamos $P \in \operatorname{Syl}_p(G)$, $Q \in \operatorname{Syl}_q(G)$ y $g \in G$. Si $|g^G|$ es no divisible por p, entonces por el lema 11 (4) y (5) tenemos que $g \in \mathbf{C}_G(P^h) = \mathbf{C}_G(P)^h$ para cierto $h \in G$. Si p divide a $|g^G|$, entonces q no divide a dicho tamaño de clase, ya que $\{p, q\} \notin E(G)$, luego análogamente $g \in \mathbf{C}_G(Q^k) = \mathbf{C}_G(Q)^k$ para cierto $k \in G$. Por tanto,

$$G = \bigcup_{h \in G} \mathbf{C}_G(P)^h \cup \bigcup_{k \in G} \mathbf{C}_G(Q)^k.$$

Observemos que el número de conjugados en G de un subgrupo $H \leqslant G$ coincide con $|G : \mathbf{N}_G(H)|$. Además, el elemento trivial está en todos los términos de la unión anterior, luego por un argumento de conteo obtenemos que

$$|G| \leq (|\mathbf{C}_G(P)| - 1)\,|G : \mathbf{N}_G(\mathbf{C}_G(P))| + (|\mathbf{C}_G(Q)| - 1)\,|G : \mathbf{N}_G(\mathbf{C}_G(Q))| + 1.$$

Dividiendo por $|G|$ a ambos lados, tenemos que

$$1 \leq \frac{|\mathbf{C}_G(P)| - 1}{|\mathbf{N}_G(\mathbf{C}_G(P))|} + \frac{|\mathbf{C}_G(Q)| - 1}{|\mathbf{N}_G(\mathbf{C}_G(Q))|} + \frac{1}{|G|}.$$

Denotemos $n_1 = |\mathbf{N}_G(\mathbf{C}_G(P))|$ y $n_2 = |\mathbf{N}_G(\mathbf{C}_G(Q))|$. Si $\mathbf{C}_G(P) < \mathbf{N}_G(\mathbf{C}_G(P))$ y $\mathbf{C}_G(Q) < \mathbf{N}_G(\mathbf{C}_G(Q))$, entonces $1 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n_1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n_2} + \frac{1}{|G|}$, luego $\frac{|G|}{n_1} + \frac{|G|}{n_2} \leq 1$, lo cual es claramente una contradicción pues ambas fracciones son índices de subgrupos. Consecuentemente, podemos suponer, por ejemplo, que $\mathbf{C}_G(P) = \mathbf{N}_G(\mathbf{C}_G(P))$. Así, $P \leqslant \mathbf{N}_G(P) \leqslant \mathbf{N}_G(\mathbf{C}_G(P)) = \mathbf{C}_G(P)$, donde la segunda inclusión se da debido al lema 11 (4). Por tanto, P es abeliano y G es p-nilpotente por la proposición 7. ∎

Ejemplo 13. En la figura 1 (c) vimos que $\Delta(G)$ no puede constar solamente de tres vértices aislados, para ningún grupo G. Sin embargo, sí que puede constar solamente de dos vértices aislados. Sea G un grupo simétrico de grado 3. Es fácil comprobar que los tamaños de clase de G son $\{1, 2, 3\}$, luego $\Delta(G)$ está formado por los vértices 2 y 3, los cuales no son adyacentes. Además, esto es un ejemplo de un grupo que satisface las hipótesis del teorema 12. Más concretamente, G es 2-nilpotente. ◂

Otra situación clave a analizar es cuando un primo p divisor del orden de G no es vértice de $\Delta(G)$, en otras palabras, cuando todos los tamaños de clase de G son no divisibles por p. El siguiente lema caracteriza esta propiedad.

Lema 14. *Sean G un grupo, $p \in \pi(G)$ y $P \in \operatorname{Syl}_p(G)$. Entonces, $p \notin V(G)$ si y solo si $P \leqslant \mathbf{Z}(G)$.*

Demostración. Si $P \leqslant \mathbf{Z}(G)$, entonces claramente $P \leqslant \mathbf{C}_G(x) \leqslant G$ para todo $x \in G$, luego $|x^G| = |G : \mathbf{C}_G(x)|$ divide a $|G : P|$, de donde deducimos que p no divide a ningún tamaño de clase de G. Recíprocamente, si $p \notin V(G)$, entonces usando el lema 11 (4) y (5) tenemos que cada $x \in \mathbf{C}_G(P^g) = \mathbf{C}_G(P)^g$ con $g \in G$. Así, $G = \bigcup_{g \in G} \mathbf{C}_G(P)^g$ y usando el lema 9 (1) obtenemos que $G = \mathbf{C}_G(P)$, luego $P \leqslant \mathbf{Z}(G)$. ∎

El resultado posterior nos da una condición suficiente para que $\Delta(G)$ posea un clique.

Lema 15. *Sea G un grupo tal que $G/\mathbf{F}(G)$ es abeliano. Entonces, existe $g \in G$ tal que $\pi(|g^G|)$ contiene a todos los primos que dividen a $|G/\mathbf{F}(G)|$.*

Demostración. Observemos que G es claramente resoluble. Razonamos por inducción sobre $|G|$. Supongamos en primer lugar que $\mathbf{\Phi}(G) \neq 1$. Observemos que $\mathbf{F}(G/\mathbf{\Phi}(G)) = \mathbf{F}(G)/\mathbf{\Phi}(G)$ por el lema 4. Por tanto, el grupo cociente $\overline{G} := G/\mathbf{\Phi}(G)$ cumple que $\overline{G}/\mathbf{F}(\overline{G}) = (G/\mathbf{\Phi}(G))/(\mathbf{F}(G)/\mathbf{\Phi}(G))$ es isomorfo a $G/\mathbf{F}(G)$ por el tercer teorema de isomorfía, siendo este último grupo abeliano por hipótesis. Aplicando la hipótesis de inducción, tenemos que para cierto elemento $\overline{g} \in \overline{G}$ se cumple que $\pi(\overline{G}/\mathbf{F}(\overline{G})) = \pi(G/\mathbf{F}(G))$ está contenido en $\pi(|\overline{g}^{\overline{G}}|) \subseteq \pi(|g^G|)$, donde la última inclusión es en virtud del lema 11 (2).

Por tanto, podemos suponer que $\mathbf{\Phi}(G) = 1$. Usando el lema 4, podemos afirmar que, para ciertos normales minimales $N_1, \dots, N_r$ de G, se da que $\mathbf{F}(G) = \mathrm{Soc}(G) = N_1 \times \cdots \times N_r$. Además, al ser G resoluble, entonces también son resolubles todos los N_i anteriores, luego son todos abelianos por el lema 3. Luego $\mathbf{F}(G)$ es abeliano y, por el lema 5, tenemos que $G = \mathbf{F}(G)H$ para cierto subgrupo H con $\mathbf{F}(G) \cap H = 1$. Veamos que para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, existe $1 \neq x_i \in N_i$ tal que $\mathbf{C}_H(x_i) = \mathbf{C}_H(N_i)$. Sea $1 \neq x_i \in N_i$. Claramente, $\mathbf{C}_H(N_i) \leqslant \mathbf{C}_H(x_i)$. Por otra parte, sea $h \in \mathbf{C}_H(x_i)$. Entonces, $1 \neq x_i \in \mathbf{C}_{N_i}(h)$ y este subgrupo es centralizado por $\mathbf{F}(G)$, ya que $\mathbf{F}(G)$ es abeliano. Además, $\mathbf{C}_{N_i}(h)$ es normalizado por H, debido al lema 11 (4) y a que H es abeliano, ya que $G/\mathbf{F}(G) = H\,\mathbf{F}(G)/\mathbf{F}(G)$ es isomorfo por el segundo teorema de isomorfía a $H/(H \cap \mathbf{F}(G)) = H$. Así, $\mathbf{C}_{N_i}(h)$ es normal en $\mathbf{F}(G)H = G$ y $1 \neq \mathbf{C}_{N_i}(h) \leqslant N_i$. Por minimalidad de N_i, deducimos que $N_i = \mathbf{C}_{N_i}(h)$, por lo que $h \in \mathbf{C}_H(N_i)$ y, por tanto, $\mathbf{C}_H(x_i) \leqslant \mathbf{C}_H(N_i)$, luego queda probada la igualdad de ambos subgrupos.

Finalmente, considerando los elementos $1 \neq x_i$ anteriores, tomamos $g := (x_1, \dots, x_r) \in N_1 \times \cdots \times N_r = \mathbf{F}(G)$. Por ser $\mathbf{F}(G)$ abeliano tenemos, usando la identidad de Dedekind, que

$$\mathbf{C}_G(g) = \mathbf{C}_G(g) \cap G = \mathbf{C}_G(g) \cap \mathbf{F}(G)H = \mathbf{F}(G)(\mathbf{C}_G(g) \cap H) = \mathbf{F}(G)\,\mathbf{C}_H(g).$$

Además,

$$\mathbf{C}_H(g) \leqslant \mathbf{C}_H(x_1) \cap \cdots \cap \mathbf{C}_H(x_r) = \mathbf{C}_H(N_1) \cap \cdots \cap \mathbf{C}_H(N_r) \leqslant \mathbf{C}_H(\mathbf{F}(G)) \leqslant H \cap \mathbf{C}_G(\mathbf{F}(G)) = H \cap \mathbf{F}(G) = 1,$$

donde la última igualdad es por el lema 4. Deducimos que $|g^G| = |G : \mathbf{C}_G(g)| = |G : \mathbf{F}(G)|$. ∎

Cuando razonemos en la demostración del teorema A con cocientes del grupo sobre normales minimales nos será de mucha utilidad el siguiente resultado.

Lema 16. *Sea M un subgrupo normal minimal de un grupo G y sea p un primo tal que $p \in V(G) \smallsetminus V(G/M)$. Si M es abeliano y $\mathbf{Z}(G) = \mathbf{\Phi}(G) = 1$, entonces o bien $M \in \mathrm{Syl}_p(G)$, o bien $|M|$ es no divisible por p y $\mathbf{C}_M(P) = 1$ con $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. En este último caso, $p \in \pi(|x^G|)$ para todo $1 \neq x \in M$.*

Demostración. Supongamos que $M \notin \mathrm{Syl}_p(G)$. Como $\mathbf{\Phi}(G) = 1$, por el lema 5 tenemos que $G = MH$ para cierto subgrupo H de G tal que $M \cap H = 1$. Observemos que $G/M = HM/M \cong H/(H \cap M) = H$. Si $p \notin \pi(G/M)$, como $|G| = |M| \cdot |H|$ y $|M|$ es una potencia de primo por el lema 3, entonces necesariamente $M \in \mathrm{Syl}_p(G)$, lo cual no puede suceder. Luego $p \in \pi(G/M)$. Así, por hipótesis, $p \in \pi(G/M) \smallsetminus V(G/M)$ y por el lema 14 deducimos que $H \cong G/M$ tiene un p-subgrupo de Sylow central, digamos P_1.

Supongamos que M es un p-grupo. Sea $P := P_1M$. Tenemos que $M \cap P_1 \leqslant M \cap H = 1$, y por órdenes deducimos que $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Además, $M \leqslant \mathbf{N}_G(P)$ ya que $M \leqslant P$ y, claramente, $H \leqslant \mathbf{N}_G(P)$ pues $P_1 \leqslant \mathbf{Z}(H)$ y M es normal en G, luego $P \trianglelefteq MH = G$. En virtud del lema 2 (5) obtenemos que $\mathbf{\Phi}(P) \leqslant \mathbf{\Phi}(G) = 1$, luego P es abeliano por el lema 2 (6). Se sigue que P_1 conmuta con M, luego $P_1 \leqslant \mathbf{C}_G(H) \cap \mathbf{C}_G(M) \leqslant \mathbf{Z}(G) = 1$, por lo que $P = M$, lo cual es una contradicción.

Por tanto, M tiene orden no divisible por p. En este caso tenemos que $P_1 \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Observemos que $\mathbf{C}_M(P_1)$ es un subgrupo normal de $G = MH$, ya que M es abeliano y P_1 es central en H (lema 11 (4)). Como M es normal minimal de G, entonces o bien $M = \mathbf{C}_M(P_1)$, o $\mathbf{C}_M(P_1) = 1$. El primer caso implica que $P_1 \leqslant \mathbf{Z}(G) = 1$ y, como $P_1 \in \mathrm{Syl}_p(G)$, esto contradice nuestra hipótesis $p \in V(G)$. Por tanto, $\mathbf{C}_M(P_1) = 1$.

Sea $1 \neq x \in M$. Si $p \notin \pi(|x^G|)$, entonces por el lema 11 (5) tenemos que $x \in \mathbf{C}_G(P_1^g) \cap M = \mathbf{C}_M(P_1^g)$ para cierto $g \in G$. Aplicando el lema 11 (4) obtenemos que $x^{g^{-1}} \in \mathbf{C}_M(P_1^g)^{g^{-1}} = \mathbf{C}_M(P_1) = 1$, luego $x = 1$, la contradicción final. ∎

Finalizamos la sección con la proposición 18, la cual es fundamental para demostrar el teorema A. Se trata de una unificación de los dos apartados del siguiente resultado. La demostración de este requiere de técnicas más avanzadas, por lo que será referida.

Proposición 17. *Sean G un grupo y $p, q \in V(G)$ tales que $\{p, q\} \notin E(G)$. Sean $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ y $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$. Sea M un subgrupo normal de G.*

1. *Si $1 \neq |M| = t^n$ con t primo, $\mathbf{C}_M(P) = 1$ y M es abeliano y complementado en G, entonces $\mathbf{O}_q(G) = Q \cap \mathbf{C}_G(M) \leqslant \mathbf{Z}(\mathbf{C}_G(M))$.*
2. *Si $M = \mathbf{O}_{p'}([G, P])$ es normal minimal de G y Q no es normal en G, entonces*
   a) *$\overline{G} := G / \mathbf{C}_G(M)$ cumple que $\overline{G} / \mathbf{F}(\overline{G})$ y $\mathbf{F}(\overline{G})$ son cíclicos, $\overline{P} \leqslant \mathbf{F}(\overline{G})$ y $\overline{Q} \cap \mathbf{F}(\overline{G}) = 1$, y*
   b) *$\overline{G} = \overline{Q} \cdot \overline{T}$, donde $\overline{T} := \langle \overline{x} \in \overline{G} \mid q \in \pi(|\overline{x}^{\overline{G}}|) \rangle$.*

Demostración. El apartado 1 se sigue del trabajo de Casolo *et al.* [1, Proposition 3.1], mientras que el segundo apartado es exactamente lo que muestran Dolfi *et al.* [5, Proposition 2.5]. ∎

Proposición 18. *Sean G un grupo y $p, q \in V(G)$ tales que $\{p, q\} \notin E(G)$. Sean $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ y $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$. Supongamos que M es un subgrupo normal minimal abeliano de G tal que $p \notin V(G/M)$, $|M|$ es no divisible por p y M es complementado en G. Entonces, $\mathbf{O}_q(G) = Q \cap \mathbf{C}_G(M) \leqslant \mathbf{Z}(\mathbf{C}_G(M))$.*

Además, si Q no es normal en G, entonces

1. *$\overline{G} := G / \mathbf{C}_G(M)$ cumple que $\overline{G} / \mathbf{F}(\overline{G})$ y $\mathbf{F}(\overline{G})$ son cíclicos, $\overline{P} \leqslant \mathbf{F}(\overline{G})$ y $\overline{Q} \cap \mathbf{F}(\overline{G}) = 1$, y*
2. *$\overline{G} = \overline{Q} \cdot \overline{T}$, donde $\overline{T} := \langle \overline{x} \in \overline{G} \mid q \in \pi(|\overline{x}^{\overline{G}}|) \rangle$.*

Demostración. En primer lugar, observemos que M es complementado por hipótesis, luego existe $H \leqslant G$ tal que $G = HM$ con $H \cap M = 1$. Así, H es isomorfo a G/M por el segundo teorema de isomorfía. Notemos que $p \in \pi(G/M)$, ya que $|G| = |H| \cdot |M|$ y M tiene orden no divisible por p. Como estamos suponiendo que $p \notin V(G/M)$, entonces H tiene un p-subgrupo de Sylow P_0 central por el lema 14. Como M tiene orden coprimo con p, entonces, en particular, $P_0 \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Pero P es conjugado en G a P_0 por el segundo teorema de Sylow, luego podríamos trabajar desde el principio con P_0 en lugar de P, ya que el enunciado no depende de la elección del p-subgrupo de Sylow. Por tanto, salvo conjugación, podemos suponer que el p-subgrupo de Sylow central de H es P. Deducimos que $\mathbf{C}_M(P)$ es centralizado por M (por ser M abeliano) y normalizado por H, ya que $P \leqslant \mathbf{Z}(H)$ y podemos aplicar el lema 11 (4). Como M es normal minimal de G, entonces o bien $\mathbf{C}_M(P) = M$, o $\mathbf{C}_M(P) = 1$. En el primer caso obtenemos que $P \leqslant \mathbf{Z}(G)$ ya que $G = HM$, pero esto y el lema 14 nos llevan a la contradicción $p \notin V(G)$, ya que $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Por tanto, $\mathbf{C}_M(P) = 1$. En virtud del lema 3, $|M|$ es una potencia de primo, luego podemos aplicar la proposición 17 (1) y obtenemos que $\mathbf{O}_q(G) = Q \cap \mathbf{C}_G(M) \leqslant \mathbf{Z}(\mathbf{C}_G(M))$.

Por otra parte, como $p \notin V(G/M)$, de nuevo por el lema 14 tenemos que $PM/M \leqslant \mathbf{Z}(G/M)$, luego $1 = [G/M, PM/M] = [G, P]M/M$ por el lema 1 (2) y $[G, P] \leqslant M$. Pero $[G, P] \trianglelefteq \langle G, P \rangle = G$ por el lema 1 (1) y M es normal minimal de G. Como p es vértice de $\Delta(G)$, entonces, en virtud del lema 14, obtenemos que $1 \neq [G, P]$ y deducimos que $M = [G, P]$, luego trivialmente $M = \mathbf{O}_{p'}([G, P])$ ya que p no divide a $|M|$. Luego si Q no es normal en G, entonces estamos en disposición de aplicar la proposición 17 (2), lo que nos proporciona las afirmaciones 1 y 2. ∎

4. Prueba del teorema A

Demostración del teorema A. Sean p, q, r tres vértices cualesquiera del grafo $\Delta(G)$, con p, q y r números primos distintos. Nuestro objetivo es demostrar que existe alguna arista entre ellos. Observemos que cualquier subgrupo o grupo cociente de G es claramente resoluble. Trabajaremos por contraejemplo minimal, esto es, supongamos que $\{p, q, r\}$ es un conjunto independiente de $\Delta(G)$ pero todo grupo G_0 tal que $|G_0| < |G|$ y $\{p, q, r\} \subseteq V(G_0)$ cumple que $\{p, q, r\}$ no es un conjunto independiente de $\Delta(G_0)$. Sean $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ y $R \in \mathrm{Syl}_r(G)$. Dividimos la demostración en una serie de pasos.

Paso 1. Si $1 \neq N$ es un normal de G tal que $\{p, q, r\} \subseteq \pi(G/N)$, entonces $\{p, q, r\} \cap V(G/N) \subsetneq \{p, q, r\}$.

Por reducción al absurdo, supongamos que se da la igualdad entre ambos conjuntos, esto es, que $\{p, q, r\}$ son vértices de $\Delta(G/N)$. Por minimalidad de G, tenemos que dos de ellos son adyacentes en G/N, es decir, existiría $xN \in G/N$ tal que, por ejemplo, $pq \in \pi(|(xN)^{G/N}|) \subseteq \pi(|x^G|)$, donde la última inclusión se debe al lema 11 (2), lo cual contradice nuestras hipótesis. Por tanto, como $\{p, q, r\} \cap V(G/N)$ es siempre un subconjunto de $\{p, q, r\}$ y no son iguales, la inclusión es estricta.

Paso 2. Podemos suponer $\mathbf{\Phi}(G) = 1$. En particular, todo subgrupo normal en G y abeliano es complementado en G.

Supongamos que $\mathbf{\Phi}(G) \neq 1$. Observemos que $\pi(\mathbf{\Phi}(G)) \subseteq \pi(G/\mathbf{\Phi}(G))$ debido al lema 8 y, como además sabemos que $|G| = |G/\mathbf{\Phi}(G)| \cdot |\mathbf{\Phi}(G)|$, entonces $\pi(G) = \pi(G/\mathbf{\Phi}(G)) \cup \pi(\mathbf{\Phi}(G)) = \pi(G/\mathbf{\Phi}(G))$. Por tanto, $\{p, q, r\} \subseteq \pi(G/\mathbf{\Phi}(G))$. Por el paso 1, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p \notin V(G/\mathbf{\Phi}(G))$. Así, $P\,\mathbf{\Phi}(G)/\mathbf{\Phi}(G) \leqslant \mathbf{Z}(G/\mathbf{\Phi}(G))$ por el lema 14, luego $P\,\mathbf{\Phi}(G)$ es normal en G y claramente $P \in \mathrm{Syl}_p(P\,\mathbf{\Phi}(G))$. Aplicando el lema 2 (1) y (2) deducimos que $G = P\,\mathbf{\Phi}(G)\,\mathbf{N}_G(P) = P\,\mathbf{N}_G(P) = \mathbf{N}_G(P)$, luego P es normal en G. Por el teorema 6 tenemos que $G = PH$ para cierto subgrupo H de G tal que $P \cap H = 1$. Consecuentemente, H actúa por conjugación sobre P y $|H| = |G : P|$ es coprimo con $|P|$. Por el lema 10 se sigue que $P = [P, H]\,\mathbf{C}_P(H)$, luego $G = [P, H]\,\mathbf{C}_P(H)H$. Como $P\,\mathbf{\Phi}(G)/\mathbf{\Phi}(G) \leqslant \mathbf{Z}(G/\mathbf{\Phi}(G))$, obtenemos en particular que $1 = [P\,\mathbf{\Phi}(G)/\mathbf{\Phi}(G), H\,\mathbf{\Phi}(G)/\mathbf{\Phi}(G)] = [P, H]\,\mathbf{\Phi}(G)/\mathbf{\Phi}(G)$, donde la última igualdad se debe al lema 1 (2). Así, $G = [P, H]\,\mathbf{C}_P(H)H \leqslant \mathbf{\Phi}(G)\,\mathbf{C}_P(H)\,H = H\,\mathbf{C}_P(H)$ por el lema 2 (1) y, por tanto, $|G| = |H| \cdot |\mathbf{C}_P(H)|$. Por órdenes, necesariamente $P = \mathbf{C}_P(H)$, por lo que $H \trianglelefteq G$. Además, $G = P \times H$ pues $P \cap H = 1$.

Como $p \in V(G)$ por hipótesis, necesariamente $\mathbf{Z}(P) < P$ por el lema 14. Escogemos $x \in P \setminus \mathbf{Z}(P)$, el cual claramente verifica que $1 \neq |x^G| = |x^P| = |P : \mathbf{C}_P(x)|$, por lo que $p \in \pi(|x^G|)$. Por otro lado, por órdenes, cualquier q-subgrupo de Sylow Q_0 de H es un q-subgrupo de Sylow de G. Deducimos por el lema 14 que $q \in \pi(|y^H|)$ para algún $y \in H$, pues si $Q_0 \leqslant \mathbf{Z}(H)$ entonces $Q \leqslant \mathbf{Z}(G)$ y obtendríamos la contradicción $q \notin V(G)$ de nuevo por el lema 14. Aplicando el lema 11 (1) obtenemos que $q \in \pi(|y^G|)$, luego $pq \in \pi(|(xy)^G|)$ por el lema 11 (3). Esta contradicción implica que necesariamente $\mathbf{\Phi}(G) = 1$.

Finalmente, como $\mathbf{\Phi}(G) = 1$, aplicando el lema 5 con cualquier subgrupo normal abeliano de G obtenemos la última afirmación.

Paso 3. Podemos suponer que $\mathbf{Z}(G) = 1$.

Supongamos que $\mathbf{Z}(G) \neq 1$ y consideremos el grupo cociente $G/\mathbf{Z}(G)$. Claramente, $\{p, q, r\} \subseteq \pi(G/\mathbf{Z}(G))$, ya que de otra forma por órdenes tendríamos que $\mathbf{Z}(G)$ contendría un t-subgrupo de Sylow de G con $t \in \{p, q, r\}$, lo cual es una contradicción por el lema 14. Nuevamente por el paso 1, podemos suponer que $V(G/\mathbf{Z}(G))$ no contiene a alguno de los primos $\{p, q, r\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $p \notin V(G/\mathbf{Z}(G))$.

Observemos que $\mathbf{Z}(G)$ es complementado en G por el paso 2, esto es, $G = \mathbf{Z}(G)\,L$ para algún $L \leqslant G$ con $\mathbf{Z}(G) \cap L = 1$. Pero entonces L es claramente normal en $\mathbf{Z}(G)L = G$, luego $G = \mathbf{Z}(G) \times L$. Como L es isomorfo a $G/\mathbf{Z}(G)$ por el segundo teorema de isomorfía y $p \notin V(G/\mathbf{Z}(G))$, entonces por el lema 14 tenemos que L tiene un p-subgrupo de Sylow central, digamos L_p. Sea Z_p el p-subgrupo de Sylow de $\mathbf{Z}(G)$. Entonces, claramente $Z_p \times L_p \in \mathrm{Syl}_p(G)$ es central en G, contradiciendo nuestras hipótesis.

Paso 4. A lo sumo uno de los subgrupos contenidos en $\{P, Q, R\}$ es normal en G.

Por reducción al absurdo, supongamos que P y Q son ambos normales en G. Como $\{p, q\} \notin E(G)$, entonces pq no divide a ningún tamaño de clase de G. Así, si $g \in G$ cumple que $p \in \pi(|g^G|)$, entonces q no divide a dicho tamaño de clase, luego por el lema 11 (5) obtenemos que $g \in \mathbf{C}_G(Q)$ pues Q es normal en G. Si p no divide a $|g^G|$, entonces, análogamente, $g \in \mathbf{C}_G(P)$. Deducimos que $G = \mathbf{C}_G(P) \cup \mathbf{C}_G(Q)$. Notemos que ambos subgrupos son propios en G; de otra forma, tendríamos que p o q no son vértices de $\Delta(G)$ por el lema 14. Pero G no puede ser unión de dos subgrupos propios por el lema 9 (2), lo cual es una contradicción.

Paso 5. G tiene a lo sumo dos normales minimales distintos.

Supongamos que N_1, N_2, N_3 son tres normales minimales distintos de G. Al ser G resoluble, entonces por el lema 3 cada uno de ellos es un s_i-grupo abeliano para ciertos primos s_i, con $1 \leq i \leq 3$.

Si $t \in \{p, q, r\} \smallsetminus \pi(G / N_i)$ para algún i, entonces por órdenes necesariamente N_i es un t-subgrupo de Sylow de G. Usando el paso 4, deducimos que existe como máximo un $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $\pi(G / N_i)$ no contiene a algún primo de $\{p, q, r\}$. Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que tanto $\pi(G / N_1)$ como $\pi(G / N_2)$ contienen a $\{p, q, r\}$ y, por el paso 1, podemos asumir que $V(G / N_1)$ y $V(G / N_2)$ no contienen a alguno de dichos primos.

Supongamos en primer lugar que $V(G / N_1)$ y $V(G / N_2)$ no contienen al mismo primo, digamos q. Entonces, por el lema 14 tenemos que $G / N_1 \times G / N_2$ tiene un q-subgrupo de Sylow central. Consideremos ahora el homomorfismo $\phi\colon G \to G / N_1 \times G / N_2$ con $\phi(g) = (gN_1, gN_2)$ para todo $g \in G$, el cual cumple que $\ker(\phi) = N_1 \cap N_2$ y, por el primer teorema de isomorfía, $G / \ker(\phi) \cong \operatorname{Im}(\phi) \leqslant G / N_1 \times G / N_2$. Por tanto, $G / (N_1 \cap N_2)$ es isomorfo a un subgrupo de dicho producto directo. Como claramente $N_1 \cap N_2 = 1$, entonces $G = G / (N_1 \cap N_2)$ también tiene un q-subgrupo de Sylow central, es decir, $q \notin V(G)$ por el lema 14, lo cual es una contradicción.

Podemos por tanto suponer que $p \notin V(G / N_1)$ y $q \notin V(G / N_2)$. Distinguimos ahora varios casos posibles. Si N_1 es un p-grupo y N_2 es un q-grupo, entonces por el lema 16 deducimos que $P = N_1$ y $Q = N_2$, lo cual contradice el paso 4. Si $|N_1|$ es coprimo con p y $|N_2|$ es coprimo con q, entonces por el lema 16 obtenemos que $p \in \pi(|x^G|)$ y $q \in \pi(|y^G|)$ para todo $1 \neq x \in N_1$ y $1 \neq y \in N_2$. Utilizando el lema 11 (3) obtenemos la contradicción $pq \in \pi(|(xy)^G|)$. Finalmente, supongamos que $N_1 = P$ y N_2 tiene orden no divisible por q. Entonces, por órdenes y por el paso 4 tenemos que necesariamente $\{p, q, r\} \subseteq \pi(G / N_3)$. Asimismo, $V(G / N_3)$ pierde a alguno de dichos primos por el paso 1, digamos $t \in \{p, q, r\}$. Además, t no divide a $|N_3|$ por el lema 16 y el paso 4. Si $t \neq q$, entonces por el lema 16 nuevamente podemos encontrar elementos en N_2 y N_3 tales que el tamaño de clase en G del producto de ambos es divisible por tq, contradicción. Luego podemos afirmar que $t = q$ y, por tanto, $G / N_2 \times G / N_3$ tiene un q-subgrupo de Sylow central. Repitiendo el argumento del párrafo anterior, deducimos que G también tiene un q-subgrupo de Sylow central, lo cual no puede ocurrir por el lema 14 y las hipótesis del teorema.

Paso 6. $\mathbf{F}(G)$ no es normal minimal de G.

Supongamos que $\mathbf{F}(G)$ es un normal minimal de G, luego es un t-grupo abeliano para algún primo t por el lema 3. Observemos que $\mathbf{F}(G)$ es complementado en G por el paso 2, es decir, existe $H \leqslant G$ tal que $G = H\,\mathbf{F}(G)$ con $\mathbf{F}(G) \cap H = 1$. Por tanto, $\mathbf{C}_H(\mathbf{F}(G)) = \mathbf{C}_G(\mathbf{F}(G)) \cap H = \mathbf{F}(G) \cap H = 1$, donde la penúltima igualdad se debe al lema 4.

Supongamos que alguno de los primos $\{p, q, r\}$ no está contenido en $\pi(G / \mathbf{F}(G))$. Entonces, por órdenes deducimos que $\mathbf{F}(G)$ es un t-subgrupo de Sylow de G, con $t \in \{p, q, r\}$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $t = p$, luego $\mathbf{F}(G) = P$. Si $1 \neq x \in H$ cumple que $p \notin \pi(|x^G|)$, como $P \trianglelefteq G$, entonces por el lema 11 (5) obtenemos que $x \in H \cap \mathbf{C}_G(P) = \mathbf{C}_H(P) = 1$, lo cual no puede ocurrir. Luego $p \in \pi(|x^G|)$ para todo $1 \neq x \in H$. Por hipótesis, deducimos que q y r no dividen a $|x^G|$ para todo $x \in H$. Además, H es isomorfo a $G / \mathbf{F}(G)$ por el segundo teorema de isomorfía, luego existe una biyección entre $|x^H|$ y $|(x\,\mathbf{F}(G))^{G / \mathbf{F}(G)}|$ para todo $x \in H$. Como este último tamaño de clase divide a $|x^G|$ por el lema 11 (2), deducimos que $\{q, r\} \cap \pi(|x^H|) = \varnothing$ para todo $x \in H$. Así, $H \cong G / \mathbf{F}(G)$ tiene un q-subgrupo de Sylow central y un r-subgrupo de Sylow central por el lema 14. Deducimos que $\{q, r\} \cap V(G / \mathbf{F}(G)) = \varnothing$. Aplicando el lema 16 llegamos a que $\{q, r\} \subseteq \pi(|y^G|)$ para todo $1 \neq y \in \mathbf{F}(G)$, lo cual es una contradicción.

Por tanto, $\{p, q, r\} \subseteq \pi(G / \mathbf{F}(G))$ y, por el paso 1, podemos suponer que, por ejemplo, p no pertenece a $V(G / \mathbf{F}(G))$. En virtud del lema 16 tenemos además que $t \neq p$. Aplicando la proposición 18 con las aristas $\{p, q\}$ y $\{p, r\}$ obtenemos que $\mathbf{O}_q(G) = Q \cap \mathbf{C}_G(\mathbf{F}(G))$ y $\mathbf{O}_r(G) = R \cap \mathbf{C}_G(\mathbf{F}(G))$. Pero $\mathbf{C}_G(\mathbf{F}(G)) = \mathbf{F}(G)$ debido al lema 4 y es un t-grupo normal minimal, luego podemos asumir, por ejemplo, que $\mathbf{O}_q(G) = 1$ y, por tanto, Q no es normal en G. Si denotamos $\overline{G} \coloneqq G / \mathbf{C}_G(\mathbf{F}(G))$, entonces la proposición 18 (1) nos dice que $\overline{G} / \mathbf{F}(\overline{G})$ es cíclico con $\overline{Q} \cap \mathbf{F}(\overline{G}) = \mathbf{O}_q(\overline{G}) = 1$. Pero $|\overline{G}| = |\overline{G} / \mathbf{F}(\overline{G})| \cdot |\mathbf{F}(\overline{G})|$ y, por órdenes, deducimos que $q \in \pi(\overline{G} / \mathbf{F}(\overline{G}))$. Además, $\overline{G} = G / \mathbf{C}_G(\mathbf{F}(G)) = H\,\mathbf{C}_G(\mathbf{F}(G)) / \mathbf{C}_G(\mathbf{F}(G))$ es isomorfo a $H / \mathbf{C}_H(\mathbf{F}(G)) = H$ por el segundo teorema de isomorfía, luego $H / \mathbf{F}(H)$ es cíclico con $q \in \pi(H / \mathbf{F}(H))$.

Supongamos que $\mathbf{O}_r(G) = 1$ también. Entonces, R tampoco sería normal en G y, nuevamente, la proposición 18 (1) nos proporcionaría que $r \in \pi(H / \mathbf{F}(H))$. Aplicando el lema 15 tenemos que qr divide a $|g^H|$ para algún $g \in H$ y, como H es isomorfo a $G / \mathbf{F}(G)$, por el lema 11 (2) obtenemos que $qr \in \pi(|(g\,\mathbf{F}(G))^{G / \mathbf{F}(G)}|) \subseteq \pi(|g^G|)$. Por tanto, $\{q, r\} \in E(G)$, una contradicción con nuestras hipótesis.

Consecuentemente, $1 \neq \mathbf{O}_r(G)$ y, como $\mathbf{F}(G)$ es normal minimal de G, necesariamente tenemos que $\mathbf{F}(G) = \mathbf{O}_r(G)$. Aplicando el segundo apartado de la proposición 18 con la arista $\{p,q\}$ y recordando que $\mathbf{C}_G(\mathbf{F}(G)) = \mathbf{F}(G)$, obtenemos que $G/\mathbf{F}(G) = \overline{G} = \overline{Q}\cdot\overline{T}$, donde $\overline{T} = \langle \overline{x} \in \overline{G} \mid q \in \pi(|\overline{x}^{\overline{G}}|)\rangle$. Observemos que $\overline{T} \neq 1$ claramente, pues de otra forma $\overline{G} = \overline{Q} = \mathbf{F}(\overline{G})$ y, por otro lado, teníamos por la proposición 18 (1) que $\overline{Q} \cap \mathbf{F}(\overline{G}) = 1$, lo cual es una contradicción. Escogemos un generador $1 \neq \overline{x} = x\,\mathbf{F}(G)$ de $\overline{T}$, el cual verifica que $q \in \pi(|(x\,\mathbf{F}(G))^{G/\mathbf{F}(G)}|)$, y por el lema 11 (2) deducimos que $q \in \pi(|x^G|)$. Entonces, por hipótesis $r \notin \pi(|x^G|)$. Por el lema 11 (5) y la definición de $\mathbf{O}_r(G)$, obtenemos que $x \in \mathbf{C}_G(R^g) \leqslant \mathbf{C}_G(\mathbf{O}_r(G)) \leqslant \mathbf{C}_G(\mathbf{F}(G)) = \mathbf{F}(G)$, lo cual es claramente una contradicción.

Paso 7. $\mathbf{F}(G) = P \times N$ con P y N normales minimales abelianos de G, $q \notin V(G/N)$ y q coprimo con $|N|$.

Por los pasos 5 y 6 junto con el lema 4 obtenemos que $\mathbf{F}(G) = \mathrm{Soc}(G) = N_1 \times N_2$ con N_1 y N_2 normales minimales distintos de G. Además, por el lema 3, ambos son abelianos y, por tanto, también lo es $\mathbf{F}(G)$. En virtud del paso 4, necesariamente $\{p,q,r\}$ está contenido en $\pi(G/N_1)$ o $\pi(G/N_2)$.

Supongamos primeramente que $\{p,q,r\} \subseteq \pi(G/N_2)$ pero, por ejemplo, $p \notin \pi(G/N_1)$. Entonces, por órdenes, $N_1 = P$, y por el paso 1 tenemos que $\{p,q,r\}$ no está contenido en $V(G/N_2)$. Recordemos que, por el primer teorema de isomorfía, podemos ver $G = G/(N_1 \cap N_2)$ como un subgrupo de $G/N_1 \times G/N_2$. Si p es el primo no contenido en $V(G/N_2)$, entonces por el lema 14 tenemos que $G/N_1 \times G/N_2$ tiene un p-subgrupo de Sylow central, y por el mismo lema llegaríamos a la contradicción $p \notin V(G)$. Por tanto, podemos suponer, por ejemplo, que $q \notin V(G/N_2)$. Además, si N_2 fuese un q-grupo, entonces por el lema 16 tendríamos que $N_2 = Q$, lo cual contradice el paso 4. Por tanto, $|N_2|$ es coprimo con q y tenemos la estructura de $\mathbf{F}(G)$ deseada.

Supongamos ahora que $\{p,q,r\}$ está contenido en $\pi(G/N_1)$ y $\pi(G/N_2)$. Nuevamente, el paso 1 nos lleva a que $\{p,q,r\}$ no está contenido en $V(G/N_1)$ ni en $V(G/N_2)$. Distinguimos ahora una serie de casos.

Si $V(G/N_1)$ y $V(G/N_2)$ no contienen al mismo primo, digamos p, entonces razonando como en el segundo párrafo deducimos que G (el cual es isomorfo a un subgrupo de $G/N_1 \times G/N_2$) tiene un p-subgrupo de Sylow central, lo cual es imposible.

Por tanto, podemos suponer que $p \notin V(G/N_1)$ y $q \notin V(G/N_2)$. Claramente no puede darse que N_1 sea un p-grupo y N_2 sea un q-grupo, por el lema 16 y el paso 4. Si $|N_1|$ es coprimo con p y $|N_2|$ es coprimo con q, el lema 16 nos dice que todo elemento de N_1 tiene tamaño de clase divisible por p y todo elemento de N_2 tiene tamaño de clase divisible por q. Usando el lema 11 (3) podemos encontrar un elemento cuyo tamaño de clase en G es divisible por pq, lo cual contradice nuestras hipótesis. Por tanto, por el lema 16, podemos asumir que $N_1 = P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ y $q \notin V(G/N_2)$ con q coprimo con $|N_2|$, lo cual es la estructura de $\mathbf{F}(G)$ que buscábamos.

Paso 8. Contradicción final.

Por el paso 7 tenemos que $\mathbf{F}(G) = P \times N$ con P y N normales minimales abelianos de G, $q \notin V(G/N)$ y q coprimo con $|N|$. Notemos que R no es normal en G por el paso 4. Aplicando la proposición 18 (2) con G y N y la arista $\{q,r\}$, obtenemos que $G/\mathbf{C}_G(N) = (R\,\mathbf{C}_G(N)/\mathbf{C}_G(N)) \cdot (T/\mathbf{C}_G(N))$, donde $T/\mathbf{C}_G(N)$ es el grupo generado por los elementos $x\,\mathbf{C}_G(N)$ de $G/\mathbf{C}_G(N)$ (con $x \in G$) tales que $r \in \pi(|(x\,\mathbf{C}_G(N))^{G/\mathbf{C}_G(N)}|)$. Por el lema 11 (2) tenemos entonces que $r \in \pi(|x^G|)$. Aplicando las hipótesis del teorema llegamos a que $p \notin \pi(|x^G|)$ y, por el lema 11 (5), obtenemos que $x \in \mathbf{C}_G(P)$ ya que P es normal en G. Por tanto, $T/\mathbf{C}_G(N) \leqslant \mathbf{C}_G(P)\,\mathbf{C}_G(N)/\mathbf{C}_G(N)$ y, entonces, $G/\mathbf{C}_G(N) = (R\,\mathbf{C}_G(N)/\mathbf{C}_G(N)) \cdot (\mathbf{C}_G(P)\,\mathbf{C}_G(N)/\mathbf{C}_G(N))$. Así, tenemos que $G = R\,\mathbf{C}_G(P)\,\mathbf{C}_G(N)$. Usando la proposición 18 con G y N y la arista $\{p,q\}$ obtenemos que $P = P \cap \mathbf{C}_G(N) \leqslant \mathbf{Z}(\mathbf{C}_G(N))$, luego todo elemento de $\mathbf{C}_G(N)$ conmuta con P, esto es, $\mathbf{C}_G(N) \leqslant \mathbf{C}_G(P)$ y, como $G = R\,\mathbf{C}_G(P)\,\mathbf{C}_G(N)$, deducimos que $G = R\,\mathbf{C}_G(P)$. En consecuencia, $\mathbf{C}_P(R)$ centraliza a R y es centralizado por $\mathbf{C}_G(P)$, luego $\mathbf{C}_P(R) \leqslant \mathbf{Z}(G) = 1$.

Podemos aplicar la proposición 17 (1) con G y P y la arista $\{q,r\}$, ya que P es complementado en G por el paso 2, con lo que obtenemos que $\mathbf{O}_q(G) = Q \cap \mathbf{C}_G(P)$. Como $G = R\,\mathbf{C}_G(P)$, por órdenes, cualquier q-subgrupo de Sylow Q_0 de $\mathbf{C}_G(P)$ lo será también de G. Por el segundo teorema de Sylow, $Q_0 = Q^u$ para algún $u \in G$, luego $Q^u \leqslant \mathbf{C}_G(P)$ y, por el lema 11 (4), obtenemos que $Q \leqslant \mathbf{C}_G(P^{u^{-1}}) = \mathbf{C}_G(P)$ pues $P \trianglelefteq G$. Por tanto, $\mathbf{O}_q(G) = Q \cap \mathbf{C}_G(P) = Q$, y esta última contradicción con el paso 4 finaliza la prueba. ∎

Observemos que la hipótesis de la resolubilidad del grupo no ha sido necesaria hasta el paso 5, luego los argumentos de los pasos 1 a 4 son válidos para grupos no resolubles también.

5. Prueba del corolario B

Demostración del corolario B. El número de componentes conexas de $\Delta(G)$ es claramente menor o igual que dos, pues en otro caso podríamos encontrar tres vértices, cada uno en una componente conexa distinta, que formarían un conjunto independiente, lo cual contradice el teorema A.

Supongamos ahora, por contradicción, que el diámetro es de longitud al menos 4. Esto significa que existiría un camino de la forma p-q-r-s-t para ciertos primos, de tal forma que no existe otro camino más corto que una p con t. Entonces, $\{p, r, t\}$ sería un conjunto independiente de tamaño 3 y tendríamos una contradicción de nuevo con el teorema A.

Finalmente, supongamos que $\Delta(G)$ es disconexo. Por la primera afirmación del corolario, tenemos que $\Delta(G)$ está formado por dos componentes conexas π_1 y π_2. Supongamos que alguna de ellas no es completa, esto es, que existen p y q en (por ejemplo) π_1 tales que $\{p, q\} \notin E(G)$. Sea $r \in \pi_2$ arbitrario. Entonces, $\{p, q, r\}$ es un conjunto independiente de tamaño 3, lo cual no puede ocurrir. Esto finaliza la demostración. ∎

Referencias

[1] Casolo, Carlo; Dolfi, Silvio; Pacifici, Emanuele, y Sanus, Lucia. «Incomplete vertices in the prime graph on conjugacy class sizes of finite groups». En: *Journal of Algebra* 376 (2013), págs. 46-57. issn: 0021-8693. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.10.012.

[2] Doerk, Klaus y Hawkes, Trevor. *Finite soluble groups*. Vol. 4. De Gruyter Expositions in Mathematics. Berlin: Walter de Gruyter & Co., 1992. https://doi.org/10.1515/9783110870138.

[3] Dolfi, Silvio. «Arithmetical conditions on the length of the conjugacy classes of a finite group». En: *Journal of Algebra* 174.3 (1995), págs. 753-771. issn: 0021-8693. https://doi.org/10.1006/jabr.1995.1151.

[4] Dolfi, Silvio. «On independent sets in the class graph of a finite group». En: *Journal of Algebra* 303.1 (2006), págs. 216-224. issn: 0021-8693. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2005.09.006.

[5] Dolfi, Silvio; Pacifici, Emanuele; Sanus, Lucia, y Sotomayor, Víctor. «The prime graph on class sizes of a finite group has a bipartite complement». En: *Journal of Algebra* 542 (2020), págs. 35-42. issn: 0021-8693. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.09.022.

[6] Isaacs, Irving Martin. *Algebra: A Graduate Course*. Pacific Grove, California: Brooks/Cole Thompson Learning, 1994. isbn: 978-0-534-19002-6.

[7] Itô, Noboru. «On finite groups with given conjugate types. I». En: *Nagoya Mathematical Journal* 6 (1953), págs. 17-28. issn: 0027-7630. url: http://projecteuclid.org/euclid.nmj/1118799473.

[8] Lewis, Mark L. «An overview of graphs associated with character degrees and conjugacy class sizes in finite groups». En: *The Rocky Mountain Journal of Mathematics* 38.1 (2008), págs. 175-211. issn: 0035-7596. https://doi.org/10.1216/RMJ-2008-38-1-175.

[9] Ortiz Sotomayor, Víctor Manuel. «Influencia de los tamaños de clase en grupos finitos». En: *TEMat* 1 (2017), págs. 45-51. issn: 2530-9633. url: https://temat.es/articulo/2017-p45/.