TEMat

Este trabajo fue galardonado con el segundo premio en la edición de 2017 del Premi Poincaré, entregado por la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Estudio del origen del número e y de sus aplicaciones en diversos campos de las matemáticas

Pablo Nicolás Martínez
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)
pnico.martinez@gmail.com

Resumen: En este artículo se analiza el origen del número e a lo largo de la historia mediante el estudio de los escritos originales de autores que, de una forma u otra, intervienen en el origen y contribuyen a la definición de e. Se analizan también algunas de sus aplicaciones en fórmulas relevantes mediante el estudio de los textos originales correspondientes a su primera aparición.

Abstract: In this paper, we analize the origin of number e throughout history. We do so through the study of the original texts of authors who, one way or another, contributed to the origin and definition of e. Furthermore, we also present some of its applications in relevant formulae through the study of the original texts corresponding to its first appearance.

Palabras clave: origen de e, historia de las matemáticas, definición de e.

MSC2010: 01A99, 97A30.

Recibido: 11 de marzo de 2018.
Aceptado: 27 de agosto de 2019.

Agradecimientos: Me gustaría agradecer y destacar la participación e implicación de mi tutora de bachillerato, M.ª Trinidad Cámara Meseguer, quien me ha proporcionado todas las ayudas posibles para poder realizar este proyecto.

Quiero agradecer también la colaboración de D. Víctor Jiménez López, D. José Ginés Espín Buendía, D.ª Carmen Noemí Zoroa Alonso, D. Alfredo Marín Pérez y D. Jaime Colchero Paetz por contestar nuestras preguntas sobre las aplicaciones del número e en sus respectivos campos de trabajo.

Por último, quiero agradecer a Juan Carlos Ferre Ruiz su ayuda corrigiendo nuestras traducciones de los textos del latín.

Referencia: Nicolás Martínez, Pablo. «Estudio del origen del número e y de sus aplicaciones en diversos campos de las matemáticas». En: *TEMat*, 4 (2020), págs. 15-26. ISSN: 2530-9633. URL: https://temat.es/articulo/2020-p15.

Este trabajo se distribuye bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento 4.0 Internacional
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

1. Introducción

Existen determinadas constantes en matemáticas que, por su relevancia o utilidad, reciben un nombre particular que las distingue. Ejemplos son el caso de π, que representa el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, o el número áureo φ. Mientras que las definiciones de constantes elementales como π o φ son relativamente intuitivas, el caso de e es diferente, siendo necesarios conceptos de cálculo infinitesimal. Por tanto, es natural preguntarse cómo surge de manera histórica el número e hasta llegar a la definición conocida actualmente, así como el por qué de su utilidad. Tomando esto como motivación, nos proponemos los siguientes objetivos [16]:

- Encontrar el proceso que se sigue a lo largo de la historia hasta definir e.
- Investigar sus principales aplicaciones en distintas ramas de las matemáticas, así como en otras áreas relacionadas.

Para comenzar a trabajar en la historia, partimos de las siguientes hipótesis en base a conocimientos anteriores. Uno de los primeros autores que podría haber utilizado e puede ser Napier, ya que los logaritmos conocidos como neperianos tienen base e. También pensamos que Euler está posiblemente involucrado en su definición, ya que corrientemente e es conocido como el «número de Euler». Finalmente, como e aparece de forma natural en problemas de derivadas e integrales, consideramos a Leibniz como otro de los autores a investigar, por ser uno de los padres del cálculo infinitesimal. Mientras trabajábamos en estos tres autores, fuimos encontrando otros matemáticos que también habían participado de una forma más o menos directa en la definición de e. En esta búsqueda resultaron de gran ayuda algunos textos sobre historia de la matemática, especialmente autores como Cajori [3] o Ivory [9].

Para elegir las aplicaciones de e a estudiar, hemos preguntado a siete profesores de la Universidad de Murcia por la aplicación más importante de e en sus respectivas áreas de trabajo. Hemos recibido respuesta de dos profesores del área de análisis matemático, dos del Departamento de Estadística e Investigación Operativa y uno del Departamento de Física. Los dos profesores de las áreas de álgebra y geometría a los que preguntamos no contestaron.

En ambas partes, la metodología utilizada ha sido la misma. Una vez seleccionado el autor o aplicación, nos hemos remitido a la publicación original en la que aparece de alguna forma e, hemos seleccionado las partes de estos textos necesarias para comprender la demostración que hace el autor, hemos realizado las traducciones del idioma original (generalmente, latín, inglés y francés) al castellano y, en base a estas traducciones, hemos convertido las demostraciones originales a notación moderna.

2. Historia del número e

2.1. John Napier y la primera definición del logaritmo

El primer autor que hemos estudiado ha sido John Napier, conocido por ser la primera persona en definir el logaritmo.

Para realizar este estudio, nos hemos basado en las definiciones que da en su obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* [15]. Para definir el logaritmo, Napier introduce en esta obra dos tipos de movimientos, que podemos ver en la figura 1.

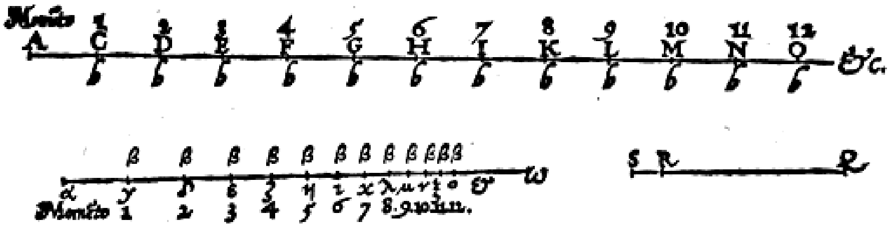


Figura 1: Imagen de los movimientos que introduce Napier [15, pág. 4].

El primero de ellos es un movimiento con velocidad constante, mientras que, en el segundo movimiento, la velocidad es proporcional a la distancia que falta por recorrer. Para el primer movimiento, Napier muestra cómo construir la progresión que define la distancia recorrida en un instante a partir de la distancia recorrida en el instante anterior. Esta progresión se puede expresar por la relación de recurrencia

$$x_{n+1} = d + x_n,$$

donde d es la distancia entre dos términos contiguos y $n \in \mathbb{N}$ (a lo largo de todo el artículo se asumirá que $0 \in \mathbb{N}$). Como $x_0 = 0$, por inducción se demuestra que

$$x_n = n \cdot d. \tag{1}$$

En el segundo movimiento, la progresión indica el espacio que falta por recorrer en un instante en función del que faltaba por recorrer en el instante anterior. La relación de recurrencia en este caso es

$$y_{n+1} = (1-k)\, y_n, \tag{2}$$

donde k es la razón de decrecimiento y $n \in \mathbb{N}$. Napier impone que la distancia original del segmento es la longitud total del segmento, que tiene por extremos los puntos α y ω (ver figura 1). Se tiene entonces la condición $y_0 = [\alpha\omega]$, donde $[\alpha\omega]$ denota la longitud del segmento que une α y ω. Por inducción, es fácil demostrar que

$$y_n = [\alpha\omega]\,(1-k)^n. \tag{3}$$

Para llegar a la definición de logaritmo, además de definir estos dos movimientos, Napier obliga a que ambos tengan la misma velocidad inicial. Como estamos trabajando con progresiones y no con funciones continuas, hemos obtenido esta velocidad inicial como la variación del espacio recorrido entre $n = 1$ y $n = 0$. Obtenemos que, para el primer movimiento, esta velocidad es d y, para el segundo, es $[\alpha\omega] \cdot k$. Sustituyendo en (1) y en (3), obtenemos

$$x_n = [\alpha\omega] \cdot k \cdot n, \qquad y_n = [\alpha\omega]\,(1-k)^n,$$

donde $n \in \mathbb{N}$. Napier define el logaritmo de una cantidad h, que denotaremos de ahora en adelante por $\operatorname{Nap}\log(h)$, como la distancia recorrida en el primer movimiento (es decir, x_n) cuando en el segundo movimiento (respectivamente y_n) resta por recorrer una distancia h. Esta definición puede ser expresada en notación moderna mediante el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} h = y_n, \\ \operatorname{Nap}\log(h) = x_n; \end{cases} \iff \begin{cases} h = [\alpha\omega]\,(1-k)^n, \\ \operatorname{Nap}\log(h) = [\alpha\omega] \cdot k \cdot n. \end{cases}$$

Despejando n en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda, llegamos a la expresión de $\operatorname{Nap}\log(h)$ en función de la definición actual de logaritmo,

$$\operatorname{Nap}\log(h) = [\alpha\omega]\ \log_{(1-k)^{1/k}}\left(\frac{h}{[\alpha\omega]}\right). \tag{4}$$

Un dato interesante es que en la base del logaritmo solamente influye la k escogida. En esta obra, Napier no hace referencia al valor de k que usa para la construcción de sus tablas. Para encontrar este dato hay que avanzar hasta su obra *Mirifici Logarithmorun Canonis Constructio*, donde fija $k = 10^{-7}$ [14, pág. 12]. Esta elección aparentemente extraña hay que entenderla sabiendo que, en sus orígenes, el logaritmo no era una operación, sino una herramienta. El objetivo principal es la construcción de tablas, y el método para hacerlo viene dado por la relación de recurrencia (2), donde para obtener el siguiente término de la sucesión es necesario multiplicar el término actual por la razón de decrecimiento y restarlo. La multiplicación por 10^{-7} (y, en general, por 10^n con $n \in \mathbb{Z}$) es muy sencilla de realizar y reduce los cálculos para la construcción de tablas[1].

[1] La elección en concreto del valor 10^7 se debe a los trabajos de Regiomontano. El motivo por el que utiliza esta cifra es para tener una exactitud en los cálculos que hiciera hasta la séptima cifra, ya que no se conocían todavía las fracciones decimales [11]. Precisamente por los trabajos de Regiomontano, Napier escoge como razón 10^7 [17], aunque en otras tablas calculadas posteriormente en el *Mirifici Logarithmorun Canonis Constructio* usa como razones 10^5 y $5 \cdot 10^4$.

Aplicando este valor a la base del logaritmo que aparece en (4) encontramos un valor dado por

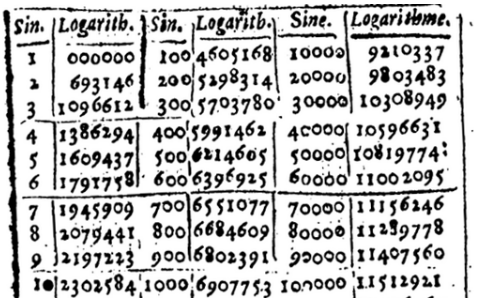
$$\left(1-10^{-7}\right)^{10^7} = \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \simeq \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-1},$$

que está directamente relacionado con e. Es por esto que podemos considerar a Napier como el primero que trabaja con un valor aproximado de esta constante.

2.2. Elaboradores de tablas

Tras la primera definición de los logaritmos que da Napier, son muchos los matemáticos que añaden modificaciones al método de Napier para mejorar algunos inconvenientes que presentan sus tablas. El principal inconveniente que presentan las tablas de Napier es que sus logaritmos son negativos para valores de x superiores a 10^7, cosa que podemos observar de la expresión analítica del logaritmo en la ecuación (4) con $[\alpha\omega] = 10^7$.

La primera tabla que hemos estudiado y que aporta una mejora significativa fue introducida en el anexo de la segunda edición de la traducción al inglés del *Mirifici Logarithmorun Canonis Descriptio* [13], que se atribuye al matemático William Oughtred. Antes de continuar, diremos que en ninguna de las tablas que vamos a citar en este apartado viene expuesto un procedimiento que indique cómo se obtuvieron, así que, para deducir las funciones que dan los valores de dichas tablas, nos hemos basado en comprobaciones numéricas y afirmaciones de otros autores como Cajori [3] o Ivory [9]. Así, en las tablas de Oughtred (figura 2, izquierda) hemos comprobado que los valores se aproximan a $10^6\ln(x)$ (figura 2, derecha).



Sin.	Logarith.	Sin.	Logarith.	Sine.	Logarithme.
1	000000	100	4605168	10000	9210337
2	693146	200	5298314	20000	9903483
3	1096612	300	5703780	30000	10308949
4	1386294	400	5991462	40000	10596631
5	1609437	500	6214605	50000	10819774
6	1791758	600	6396925	60000	11002095
7	1945909	700	6551077	70000	11156246
8	2079441	800	6684609	80000	11289778
9	2197223	900	6802391	90000	11407560
10	2302584	1000	6907753	100000	11512921

x	$10^6\ln(x)$	x	$10^6\ln(x)$
1	0	6	1 791 759
2	693 147	7	1 945 910
3	1 098 612	8	2 079 441
4	1 386 294	9	2 197 224
5	1 609 437	10	2 302 585

Figura 2: Extracto de la tablas atribuidas a W. Oughtred [13, pág. 12] (izquierda) y tabla con el valor de $10^6\ln(x)$ hasta $x = 10$ (derecha). Los valores se han obtenido truncando la primera cifra decimal de cada número.

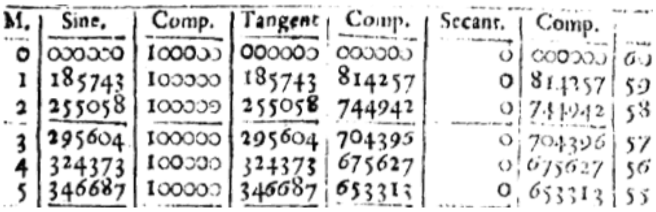
El segundo autor que hemos estudiado ha sido John Speidell, quien elaboró distintas versiones de tablas de logaritmos. Las primeras tablas que elabora y que encontramos en *New Logarithmes* [19] son una modificación de las de Napier para hacer que los logaritmos tomen siempre valores positivos. Tomando como cierta la afirmación de Ivory [9, págs. 714-715], hemos obtenido que los logaritmos de Speidell (que denominaremos $\mathrm{Sp}\log(x)$) cumplen que

$$10^8 = \mathrm{Nap}\log(x) + 100\ \mathrm{Sp}\log(x).$$

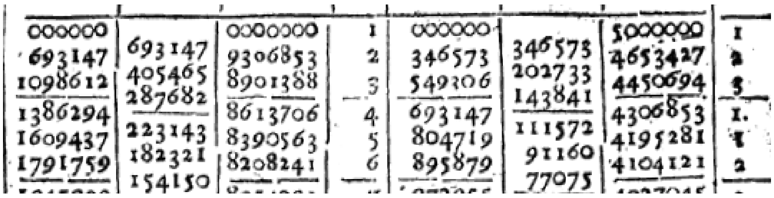
De la expresión del logaritmo de Napier (4) podemos obtener el valor del logaritmo de Speidell como

$$\mathrm{Sp}\log(x) = 10^5\ln\left(\frac{x}{454}\right).$$

A partir de 1622, Speidell incluyó en las nuevas ediciones del *New Logarithmes* [20] otra tabla en la que calcula los logaritmos de los números enteros entre 1 y 1000. Mediante otra comprobación, hemos visto que los logaritmos de esta segunda tabla corresponden con los de $10^6\ln(x)$.



M.	Sine.	Comp.	Tangent	Comp.	Secant.	Comp.	
0	000000	1000000	000000	000000	0	000000	60
1	185743	100000	185743	814257	0	814257	59
2	255058	100000	255058	744942	0	744942	58
3	295604	100000	295604	704395	0	704396	57
4	324373	100000	324373	675627	0	675627	56
5	346687	100000	346687	653313	0	653313	55



0000000		0000000	1	0000000		5000000	1
693147	693147	9306853	2	346573	346573	4653427	2
1098612	405465	8901388	3	549306	202733	4450694	3
	287682				143841		
1386294		8613706	4	693147		4306853	1.
1609437	223143	8390563	5	804719	111572	4195281	[illegible]
1791759	182321	8208241	6	895879	91160	4104121	2
	154150				77075		

Figura 3: La primera figura (arriba) muestra recortes de las primeras tablas que presenta Speidell, mientras que la segunda (abajo) corresponde a las segundas tablas.

2.3. Leibniz y e en la integral de la función hiperbólica

Una de las apariciones más naturales de e es en los problemas relacionados con el cálculo integral y diferencial. Por ello, una figura que podría resultar interesante estudiar en nuestra búsqueda del origen de e es Gottfried Leibniz, padre del cálculo integral junto a Isaac Newton.

En el análisis del siglo XVII destaca el afán de calcular el área bajo las curvas. Este problema se conoce tradicionalmente como el de «cuadrar» la curva. En concreto, el área bajo la hipérbola $f(x) = k/x$ fue estudiada por matemáticos como De Sarasa, Huygens, Newton, Mercator, James Gregory y Leibniz. Desde el trabajo *Solutio problematis a R. P. Marino Mersenno Minimo propositi*, de Alphonse Antoine de Sarasa [18], ya se sabía que había que escribir el área en términos de un logaritmo. Pero, aunque todos estos matemáticos encontraron métodos correctos (principalmente mediante series), la primera vez que se referencia la base de dicho logaritmo es en una serie de cartas [8] entre Huygens y Leibniz sobre un problema que planteó el último en las *Acta Eroditorum* [10]. El problema es, a grandes rasgos, hallar las ecuaciones que rigen el movimiento de un cuerpo en caída libre que sufre una resistencia cuadrática causada por rozamiento con aire. A lo largo de la sección denotaremos por t el tiempo de caída, v la velocidad instantánea del cuerpo y a la velocidad límite de caída. Asumiendo que $t_0 = 0$ y que el cuerpo comienza a caer en reposo, por lo que $v_0 = 0$, Leibniz llega a plantear la integral

$$t = \int_0^v \frac{a}{a^2 - v'^2}\, \mathrm{d}v'. \tag{5}$$

Huygens es el primero que da un resultado, utilizando series, pero se equivoca[2], y es Leibniz el que da los resultados correctos en la contestación, también en forma de series. Estos resultados dados por Leibniz son equivalentes a las formas habituales de hoy en día, que son

$$t = \int_0^v \frac{a}{a^2 - v'^2}\, \mathrm{d}v' = \frac{a}{2} \ln\left(\frac{a+v}{a-v}\right). \tag{6}$$

En otra carta sobre la naturaleza de la función logarítmica y su relación con la función exponencial, Leibniz

[2]En la correspondencia se plantea, además de la expresión (5) para hallar el tiempo t, una expresión semejante para hallar el espacio recorrido s. El error que comete Huygens es cambiar los resultados de las dos integrales planteadas.

hace referencia a la primera integral en (6) para el caso $a = 1$ y escribe la expresión[3]

$$b^{\underset{\cdot}{t}} = \frac{1+v}{1-v},$$

que involucra una constante b. Respecto a este valor Leibniz escribe: «b siendo una gran constante cuyo logaritmo es 1, siendo 0 el logaritmo de 1» [8, pág. 76]. Si hacemos los mismos cálculos pero usando métodos actuales, obtenemos que

$$\mathrm{e}^{\frac{t}{1/2}} = \frac{1+v}{1-v}.$$

Comparando ambos resultados y la afirmación dada por Leibniz, tenemos la creencia de que Leibniz conoce e pero lo denomina b. Otros autores, como Cajori [2, pág. 493], también toman b como la base de los logaritmos naturales o neperianos.

2.4. Jacob Bernoulli y el problema del interés compuesto

Hasta este momento, hemos visto la aparición de logaritmos en cuya base aparece una constante relacionada con e, e incluso la presencia de una constante llamada b de la que tenemos indicios de que sea precisamente e. Aún así, en ningún momento se ha hecho referencia al valor de esta constante. La primera vez que se obtiene algo de información sobre el valor de e es de forma casual mediante acotaciones de su valor. Sorprendentemente, esta acotación no se presenta en ningún tratado de logaritmos, área bajo la hipérbola o similares, sino en el artículo «Quæstiones Nonnullæ de usuris, cum solutione Problematis de Sorte Alearum, propositi in Ephem. Gall. A. 1685» de Jacob Bernoulli [1], en el estudio de un problema de interés compuesto. Dada una cantidad inicial invertida a rédito compuesto anual, el problema consiste en calcular el dinero que se obtendría si se cobrasen los intereses en periodos más cortos y, en última instancia, momentáneamente. Sea supuesto que se invierte un euro con un interés anual del 100 %. Si el interés se cobra anualmente, al final del año se tendrán 2 euros. Si, en cambio, se cobran los intereses cada 6 meses con un interés proporcional del 50 % se obtienen 2,25 euros. El proceso de cobrar los intereses momentáneamente se obtiene mediante un paso al límite, siguiendo la definición de derivada o tasa de valor instantáneo.

Bernoulli obtiene la solución dada por una serie en la que a es el capital inicial y b el rédito anual. Además, calcula una cota inferior y otra superior de esta solución:

$$a + b + \frac{b^2}{2a} < a\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{a^n\, n!} < a + b + \frac{b^2}{2a-b}.$$

Mostramos la forma de obtener ambas cotas.

1. Respecto a la primera, la suma $\sum_{i=0}^{n} \frac{b^i}{a^i\, i!}$ es de términos estrictamente positivos, por lo que la sucesión de sumas parciales $s_n = a\sum_{i=0}^{n} \frac{b^i}{a^i\, i!}$ es estrictamente creciente. Por tanto, $s_2 < \lim_{n\to\infty} s_n$. Se tiene entonces que

$$a + b + \frac{b^2}{2a} = s_2 < \lim_{n\to\infty} s_n = a\sum_{i=0}^{\infty} \frac{b^i}{a^i\, i!}.$$

2. Para la segunda cota, sea notado que $2^{n-1} \leqslant n!$ siempre que $n \geqslant 2$, y la desigualdad es estricta si $n \geqslant 3$. Aplicando esta relación a las sumas parciales y llevándolas al límite[4],

$$a\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{a^n\, n!} < a + b + 2a\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n}{2^n\, a^n} = a + b + \frac{\frac{b^2}{2a}}{1 - \frac{b}{2a}} = a + b + \frac{b^2}{2a-b}.$$

[3]Hemos reproducido la expresión exactamente como la hemos encontrado en el documento consultado [8, pág. 283]. Definitivamente, se puede observar el punto en la expresión original. La exponencial en una base b aparece anteriormente en otra carta [8, pág. 276] y presenta el mismo punto. Sin embargo, el punto no está presente en todas las funciones exponenciales que escribe; por ejemplo, también escribe la ecuación $x^x + x = 30$, en la que no se observa [8, pág. 276]. Esto puede llevar a pensar que la base b es especial y, por tanto, siempre que se usa de base para una función exponencial lleva un punto debajo del argumento, o que dicho punto tiene otro tipo de significado independiente de b. El significado se deja a interpretación del lector.

[4]Para asegurar la convergencia de la serie para la primera igualdad, es necesario tener que $\left|\frac{b}{2a}\right| < 1$. Sin embargo, Bernoulli no remarca esta condición en su artículo [1] y asume directamente la convergencia.

En base a esta expresión, Bernoulli afirma que, si $a = b$, entonces el valor del capital estaría entre 2,5a y 3a, lo que se puede comprobar sustituyendo en las cotas. Como a es un valor positivo, entonces la equivalencia

$$2{,}5a < a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} < 3a \iff 2{,}5 < \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} < 3$$

es cierta. Sabiendo con nuestros conocimientos actuales que $\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$, este resultado prueba que $2{,}5 < \mathrm{e} < 3$. Sin embargo, Bernoulli no conoce la existencia de e ni de una constante parecida, por lo que, como decíamos, parece que acotar su valor ha sido más un golpe de casualidad por el problema en el que trabajaba que algo intencionado.

2.5. Leonhard Euler y el desarrollo en serie de la función exponencial

A pesar de las apariciones ya comentadas, todavía nadie ha definido la constante e. Según Cajori [2, pág. 493], el primer autor que lo hace es Leonhard Euler. Si nos referimos estrictamente al nombre «e», Euler ya lo utiliza en sus primeros artículos, como en «Meditatio in experimenta explosione tormentorum nuper instituta» [4], llegando incluso a dar un valor aproximado. En este caso, la definición que utiliza es la misma que la que dio Leibniz. Pero la primera vez que define e tal y como aparece en la expresión dada por Bernoulli es en su *Introductio in Analysin Infinitorum* [5]. En el séptimo capítulo de esta obra, Euler indaga en el desarrollo de funciones exponenciales como series infinitas. A lo largo de todo el texto, emplea de forma velada la aproximación lineal de funciones derivables en un punto. En la época de Euler, el cálculo infinitesimal moderno (es decir, el desarrollado a partir de la definición de límite) no existía. Por tanto, conceptos como la derivabilidad no estaban claros del todo, y lo expuesto a continuación debe ser entendido como un intento de formalizar la demostración original.

Euler escribe que, si ω es arbitrariamente pequeño, lo que quiere decir que $\omega \to 0$, entonces se tiene que $a^{\omega} = 1 + k\,\omega$, siendo k una constante dependiente de la base a. Con nuestro conocimiento moderno, esta afirmación es equivalente a formular la aproximación lineal de la función a^x en un entorno del punto $x = 0$, por lo que se tiene que

$$a^{\omega} = a^0 + f'(0)(\omega - 0) + R_1(f) = 1 + k\,\omega + R_1(a^x),$$

siendo $f(x) = a^x$ y $R_1(a^x) = o(\omega)$ el resto de orden 1 de la aproximación lineal. Se puede observar que $k = \left(a^x\right)'(0) = \ln a$, resultado que Euler obtiene posteriormente en el libro.

Euler introduce ahora las nuevas variables $z, i \in \mathbb{R}$,[5] relacionadas con ω mediante $z = \omega \cdot i$. A partir de ahora, Euler considera, sin hacer mención explícita de ello, la cantidad z como un número real fijo. Como $\omega \to 0$, concluye entonces que $i \to \infty$. Sustituyendo esto en la primera igualdad llega a que

$$a^{\frac{z}{i}} = 1 + k\,\frac{z}{i} \iff a^z = \left(1 + k\,\frac{z}{i}\right)^{i}. \tag{7}$$

Mediante el binomio de Newton y la aplicación de los actuales límites del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, llega a que toda función exponencial es de la forma

$$a^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n z^n}{n!}.$$

Es capaz de demostrar también que, sabiendo la k asociada a una base a, se puede hallar el desarrollo en serie de cualquier función exponencial con otra base b. En la demostración original iguala las dos funciones exponenciales $a^z = b^y$, despeja z y la sustituye en la serie de a^z:

$$b^y = a^{y\cdot\log_a b} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n y^n (\log_a b)^n}{n!}.$$

[5] Aprovechamos para recordar que, en la época de Euler, el concepto de número complejo tampoco estaba desarrollado completamente. Por tanto, la constante i no representaba ningún número particular y podía ser utilizada como una variable más sin lugar a confusión (la elección de i para representar un número tal que $i \to +\infty$ parece estar motivada por la palabra « *infinitorum*», que es la traducción al latín de «infinito»). De hecho, posteriormente Euler escribe $\sqrt{-1}$ en lugar de i. En este artículo se evitará la confusión entre la constante $\sqrt{-1}$ y la variable i tipográficamente, escribiendo i para denotar $\sqrt{-1}$.

Una vez concluido esto y tras otras demostraciones correspondientes a la función logarítmica, Euler introduce la definición de e. No menciona explícitamente el argumento que le lleva a hacerlo, por lo que presentamos aquí uno posible. Ya que sabiendo la k asociada a una base a podemos hallar el desarrollo en serie de cualquier función exponencial, entonces buscaremos la base con la k más simple, es decir, la base con $k = 1$. Esta elección provoca que dicha base sea

$$a^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \implies a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

A esta base privilegiada la llama e, y da como valor aproximado e = 2,71828182845904523536028... Aplicando esta definición a la ecuación (7) obtenemos que

$$\mathrm{e}^z = \lim_{i\to\infty} \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i. \tag{8}$$

Euler no lo hace, pero de aquí es fácil deducir otra definición de e al sustituir $z = 1$. Esta definición, que es la presentada usualmente en bachillerato, es

$$\mathrm{e} = \lim_{i\to\infty} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i.$$

3. Aplicaciones de e en ramas de la matemática

3.1. Identidad de Euler

La primera aplicación que hemos estudiado es la identidad de Euler, que relaciona las constantes conocidas actualmente como i, π y e mediante

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0.$$

Como esta identidad es una consecuencia directa de la fórmula de Euler, hemos decidido analizar el origen de esta última. La encontramos en la obra de Leonhard Euler *Introductio in Analysin Infinitorum* [5] de 1748, donde se obtiene en el capítulo VIII tras manipular las funciones seno y coseno. Comienza utilizando la fórmula de De Moivre,

$$(\cos x + \mathrm{i} \operatorname{sen} x)^n = \cos(nx) + \mathrm{i} \operatorname{sen}(nx), \qquad n \in \mathbb{N},$$

que se puede demostrar por inducción. A partir de esta relación es evidente obtener que

$$\cos(nx) = \frac{(\cos x + \mathrm{i} \operatorname{sen} x)^n + (\cos x - \mathrm{i} \operatorname{sen} x)^n}{2}, \tag{9}$$

$$\operatorname{sen}(nx) = \frac{(\cos x + \mathrm{i} \operatorname{sen} x)^n - (\cos x - \mathrm{i} \operatorname{sen} x)^n}{2\mathrm{i}}. \tag{10}$$

Euler toma de nuevo $nx = v$ como una cantidad real fija y hace tender x a 0. Esto fuerza que $n \to \infty$. A continuación, aproxima las funciones seno y coseno por sus respectivas aproximaciones lineales, obteniendo $\cos x \simeq 1$ y $\operatorname{sen} x \simeq x = \frac{v}{n}$. Estas expresiones dan lugar por sustitución en las ecuaciones (9) y (10) a

$$\cos v = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{v\,\mathrm{i}}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{v\,\mathrm{i}}{n}\right)^n\right], \qquad \operatorname{sen} v = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\left(1 + \frac{v\,\mathrm{i}}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{v\mathrm{i}}{n}\right)^n\right].$$

Como ha empleado que $n \to \infty$, por la ecuación (8) concluye las conocidas como identidades de Euler,

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}.$$

Euler emplea estas identidades para demostrar la fórmula de Euler. Se obtiene que

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \operatorname{sen} x.$$

La identidad de Euler se obtiene para el caso $x = \pi$:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0.$$

3.2. Serie de Fourier

La serie de Fourier permite representar muchas funciones periódicas como combinación lineal de funciones exponenciales complejas.

Hemos encontrado la primera versión de la serie de Fourier en el artículo «Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides» [7] presentado a la Societé Philomatique de Paris, en el que indaga sobre la propagación del calor. Tomando la temperatura T como una función escalar dependiente de los parámetros espaciales x, y, z y del tiempo t, es decir, $T(x, y, z, t)$, la ecuación de Fourier afirma que

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \tag{11}$$

donde a es una constante que, en principio, depende de las variables x, y, z, t.

Las condiciones del problema se restringen considerando un caso particular al que aplica esta ecuación. Supone que el medio de transmisión es homogéneo, es decir, la constante a es independiente de las variables x, y, z, t. Considera el problema en una placa situada en el plano xy de longitud 2 en el eje y e indefinidamente larga en el eje x, por lo que $x \in \mathbb{R}$, $y \in [-1, 1]$ y z es constante. Por último, se considera que el sistema está en estado estacionario, lo que quiere decir que T es independiente de t. Todo esto hace que la ecuación (11) pase a ser escrita como

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0,$$

que es conocida como ecuación de Laplace. Mediante el método de separación de variables, expresando la temperatura como $T(x, y) = M(x)\,N(y)$, hemos obtenido varias soluciones al problema, dadas por las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \lambda M = 0, \qquad \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \lambda N = 0.$$

Dichas soluciones con $\lambda \geqslant 0$ vienen dadas por

$$M(x) = c\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + d\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}, \qquad N(y) = C\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + D\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}x\right).$$

Como la ecuación se satisface para cualquier elección de λ, se puede escoger una solución general como superposición de soluciones para λ_i, obteniendo la solución más general

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(b_i\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_i}x} + a_i\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_i}x}\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_i}x\right) + \left(B_i\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_i}x} + A_i\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_i}x}\right)\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_i}x\right).$$

Ahora impone simetría de la función respecto a la variable y, por lo que los términos senoidales deben desaparecer. Así, $A_i = B_i = 0$. Además, la temperatura debe ser una función acotada para toda la placa, por lo que $b_i = 0$. La solución general tras eliminar estas condiciones es

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_i}\,x}\cos\left(\sqrt{\lambda_i}\,y\right),$$

siendo los valores λ_i con $i \in \mathbb{N}$ constantes de valores indeterminados.

Aplicando la condición de frontera $T(x, \pm 1) = 0$, que es equivalente a afirmar que la temperatura en el borde de la placa es la misma que en el exterior, obtiene los valores de las constantes

$$\sqrt{\lambda_i} = \frac{2i + 1}{2}\,\pi.$$

Con esto ya queda totalmente determinado el perfil de temperaturas estacionario de la placa. El objetivo es estudiar ahora el perfil para diferentes valores de x. El que estudia, en particular, es para $x = 0$, obteniendo la función de temperatura

$$\varphi(y) = T(0, y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\,\cos\left(\frac{2i + 1}{2}\,\pi y\right),$$

que es lo que se conoce actualmente como serie de Fourier. Aplicando ahora la ortonormalidad[6] de las funciones $\left\{\cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi\, y\right)\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ en el intervalo $[-1,1]$ en el que está definida la función φ, se obtiene la expresión de los coeficientes

$$a_i = \int_{-1}^{1} \varphi(y)\, \cos\left(\frac{2i+1}{2}\,\pi y\right) \mathrm{d}y.$$

La serie de Fourier completa aparece en su *Théorie analytique de la chaleur* [6, pág. 257], de 1822. No hemos encontrado un primer autor que reformule la serie de Fourier en función de la función exponencial, pero usando las identidades de Euler es sencillo hallar que

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{2\pi n}{T}\mathrm{i}x} \cdot \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi n}{T}\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x.$$

3.3. Distribución normal

La última aplicación estudiada ha sido la función de densidad de la distribución normal, dada su importancia debida al teorema central del límite.

La primera vez que la hemos encontrado ha sido en *The Doctrine of Chances*, de Abraham de Moivre [12, págs. 243-254]. Se presenta como una forma de aproximar la distribución binomial para un gran número de experimentos n y sin que la expresión resultante dependa de dicho número de experimentos. Divide el estudio en dos partes, primero para una distribución binomial[7] $X \sim \mathrm{Bin}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ y después una distribución con probabilidad arbitraria $X \sim \mathrm{Bin}\left(n, \frac{a}{a+b}\right)$[8]. En ambos casos, el proceso que sigue es el mismo.

De Moivre trabaja con probabilidades mediante casos favorables y casos desfavorables y aplica lo que conocemos hoy como regla de Laplace. Por tanto, trabajaremos con una función de casos favorables de nuestra variable aleatoria, que denotaremos como $\mathrm{C.\ Fav.}\,[X=x]$, para indicar el número de casos en los que la variable aleatoria X toma el valor x. Con esta notación, y sabiendo que el número de casos totales es 2^n, la función de probabilidad viene dada en términos de la regla de Laplace por

$$\Pr[X=x] = \frac{\mathrm{C.\ Fav.}\,[X=x]}{2^n}.$$

Primero, De Moivre aproxima el valor de la probabilidad más alta de la distribución, que corresponde al término central $x = n/2$, obteniendo que

$$\frac{\mathrm{C.\ Fav.}\,[X=n/2]}{2^n} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2} \simeq \frac{2A(n-1)^n}{n^n\sqrt{n-1}}.$$

Para valores de n muy grandes obtiene que $\sqrt{n-1} \simeq \sqrt{n}$ y también emplea la aproximación de e como

$$\frac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \simeq \mathrm{e}^{-1}.$$

[6] Aprovechamos para recordar que, sobre el espacio vectorial de funciones $\mathcal{C}^0[a,b]$ siendo $a<b$, la forma lineal

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

es un producto escalar entre funciones. Lo que estamos afirmando, entonces, respecto a la ortonormalidad de las funciones coseno es que

$$\left\langle \cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right), \cos\left(\frac{2j+1}{2}\pi y\right)\right\rangle = \int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi y\right)\cos\left(\frac{2j+1}{2}\pi y\right)\mathrm{d}y = \delta_{i,j}.$$

[7] A lo largo del texto se denotará por $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ a una distribución binomial de n ensayos con probabilidad de éxito p.

[8] De Moivre no trabaja con la probabilidad p, sino con el número de casos favorables a y desfavorables b. Probar que $p = \frac{a}{a+b}$ es obvio a partir de la regla de Laplace.

Con todo esto, la aproximación final es

$$\frac{2A(n-1)^n}{n^n\sqrt{n-1}} \simeq \frac{2B}{\sqrt{n}}.$$

De Moivre indica que Stirling halla posteriormente el valor de B como $B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

A continuación, calcula el cociente entre un término cualquiera del binomio y el término central. Lo aproxima indirectamente mediante logaritmos, obteniendo para n grande que

$$\ln\left(\frac{\text{C. Fav. }[X = x]}{\text{C. Fav. }[X = n/2]}\right) \simeq -\frac{2\ell^2}{n},$$

donde ℓ es la distancia que nos alejamos de la media de $X \sim \operatorname{Bin}\left(n, \frac{1}{2}\right)$, es decir, $\ell = |x - \frac{n}{2}|$. Así, la probabilidad de un evento cualquiera viene dada por

$$\begin{aligned}
\Pr[X = x] &= \frac{\text{C. Fav. }[X = x]}{2^n} \\
&= \frac{\text{C. Fav. }[X = n/2]}{2^n} \cdot \frac{\text{C. Fav. }[X = x]}{\text{C. Fav. }[X = n/2]} \\
&\simeq \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\, \mathrm{e}^{-\frac{2\ell^2}{n}}.
\end{aligned}$$

Repitiendo el cálculo para una distribución binomial de probabilidad arbitraria $X \sim \operatorname{Bin}\left(n, \frac{a}{a+b}\right)$, obtiene aproximaciones de los cocientes anteriores como

$$\frac{\text{C. Fav. }[X = np]}{(a+b)^n} \simeq \frac{a+b}{\sqrt{2\pi abn}}, \qquad \ln\left(\frac{\text{C. Fav. }[X = x]}{\text{C. Fav. }[X = np]}\right) \simeq -\frac{(a+b)^2}{2abn}\ell^2.$$

Siguiendo la misma deducción que en el caso con probabilidad $p = 1/2$, la función de probabilidad para la distribución binomial arbitraria viene dada por

$$\Pr[X = x] = \frac{a+b}{\sqrt{2\pi abn}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(a+b)^2}{2abn}\ell^2},$$

donde ahora tenemos que $\ell = x - n\frac{a}{a+b}$. En este caso, recordando que la media en una distribución binomial viene dada por $\mu = np = n\,\frac{a}{a+b}$ y la varianza por $\sigma = \sqrt{npq} = \frac{\sqrt{abn}}{a+b}$, la función de probabilidad viene dada por

$$\Pr[X = x] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

que es precisamente la función de probabilidad de la distribución normal.

4. Conclusiones

Tanto los motivos que llevan a la definición de e como sus aplicaciones son muy variadas. En el origen hemos encontrado aproximaciones por diversas áreas: construcción de tablas de logaritmos, problemas de cálculo de áreas bajo la hipérbola, desarrollos en serie de funciones exponenciales e incluso problemas de economía. También hemos visto su rango de aplicaciones en análisis y estadística, estando presente en teoremas clave de ambas ramas.

Las aplicaciones que hemos expuesto no son más que un pequeño ejemplo de las muchas que se pueden estudiar. Este campo queda abierto a más autores que deseen profundizar más en las aplicaciones de e. Por otro lado, también se puede profundizar en el origen buscando y analizando más autores que hayan hecho aportes a la definición de e. Actualmente estamos trabajando en esta tarea, revisando autores presentes en el proyecto y estudiando otros nuevos.

Referencias

[1] Bernoulli, Jakob. «Quæstiones Nonnullæ de usuris, cum solutione Problematis de Sorte Alearum, propositi in Ephem. Gall. A. 1685». En: *Acta Eroditorum* 9 (1690), págs. 219-223. URL: https://hdl.handle.net/2027/ucm.5324324906?urlappend=%3Bseq=249.

[2] Cajori, Florian. *A History of mathematical notations.* Reimpresión de la edición de 1929. Vol. II. Chicago: The Open Court Company, 1952. URL: https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.88254/.

[3] Cajori, Florian. *A History of Mathematics.* 5.ª ed. Rhode Island: American Mathematical Society, 1991. ISBN: 978-0-8218-2102-2.

[4] Euler, Leonhard. «Meditatio in experimenta explosione tormentorum nuper instituta». En: *Euler Archive - All Works.* 853. Obra póstuma publicada en 1862. 1728. URL: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/853/.

[5] Euler, Leonhard. *Introductio in Analysin Infinitorum.* Reimpresión del año 2000. Sevilla: Real Sociedad Matemática Española, 1748.

[6] Fourier, Jean-Baptiste Joseph. *Théorie analytique de la chaleur.* París: Firmin Didot, Père et Fils, 1822. URL: https://archive.org/details/thorieanalytiq00four/.

[7] Fourier, Jean-Baptiste Joseph. «Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides». En: *Oeuvres de Fourier.* Ed. por Darboux, Jean Gaston. Vol. 2. París: Gauthier-Villars et Fils, 1890, págs. 213-221. URL: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k33707/.

[8] Gerhardt, Carl Immanuel. *Leibnizens Matematische Schriften.* Vol. 2. Berlín: Verlag von A. Asher & Comp., 1849. URL: https://archive.org/details/leibnizensmathe01leibgoog/.

[9] Ivory, James. «An account of a table of logarithms. Published by John Speidell, an eminent English Mathematician, in the year 1619, and afterwards in the year 1628, under the title of New Logarithms, extracted from and out of those of Lord Napier». En: *Scriptores Logarithmici. A collection of several curious tracts on the nature and construction of logarithms.* Ed. por Hutton, Charles. Vol. VI. Londres: R. Wilks, 1807. URL: https://books.google.com/books?id=65YiAQAAMAAJ&printsec=frontcover.

[10] Leibniz, Gottfried Wilhelm. «Schediasma de resistentia Medii, & Motu projectorum gravium in medio resistente». En: *Acta Eroditorum* (1689), págs. 38-47. URL: https://archive.org/details/bub_gb_YPRaAAAAQAAJ/.

[11] Méndez, Hubert. «Capítulo VII: Funciones trigonométricas». En: *Tópicos de matemática elemental.* San José: Editorial EUNED, 2000. ISBN: 978-9977-64-641-1.

[12] Moivre, Abraham de. *The Doctrine of Chances. A method of calculating the probabilities of events in play.* 3.ª ed. Londres: Printed for A. Millar, in the Strand, 1756. URL: https://archive.org/details/doctrineofchance00moiv/.

[13] Napier, John. *A Description of the Admirable Table of Logarithms.* Londres, 1618.

[14] Napier, John. *The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms.* Trad. por RaeMacDonald, William. Edimburgo y Londres: William Blackwood and sons, 1889. URL: https://archive.org/details/cu31924085321093.

[15] Napier, John. *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio.* Trad. por Bruce, Ian. 2012. URL: http://www.17centurymaths.com/contents/napiercontents.html.

[16] Nicolás Martínez, Pablo. *Estudio del origen del número e y de sus aplicaciones en diversos campos de las matemáticas.* Trabajo de Investigación de Bachillerato. 2017. URL: https://fme.upc.edu/ca/premi-poincare/edicions-anteriors/premi-poincare-2017/treballs-guanyadors-2017/kronecker.pdf.

[17] Requena Fraile, Ángel. *Cuarto centenario del Mirifici Logarithmorun Canonis Descriptio.* 2014. URL: http://www.divulgamat.net/index.php?option=com_content&view=article&id=16133.

[18] Sarasa, Alphonse Antoine de. *Solutio problematis a R. P. Marino Mersenno Minimo propositi.* Amberes: Apud Ioannem et Iacobum Meursios, 1649. URL: https://archive.org/details/bub_gb_TG-i3Dzr7QoC/.

[19] Speidell, John. *New Logarithmes.* Early English Books Online. Reproducción del original por ProQuest. Londres, 1619. ISBN: 978-1-171-27615-9.

[20] Speidell, John. *New Logarithmes.* 1622.