

TEMat

q -medidas de Carleson en espacios de Hardy H^p y Bergman A_α^p

✉ Tanausú Aguilar
Universidad de Sevilla
taguilar@us.es

✉ Sergi Baena
Universitat de Barcelona
sergibaena@ub.edu

✉ Carlos Cruz
Universitat de Barcelona
ccruz@ub.edu

✉ Jordi Lendínez
Universitat Autònoma de Barcelona
jordi.lendinez@kantarmedia.com

✉ Alejandro Molero
Universitat Autònoma de Barcelona
amolero@mat.uab.cat

✉ Marco Praderio
Universitat Autònoma de Barcelona
PraderioM@Gmail.com

Resumen: La caracterización de las q -medidas de Carleson para espacios de funciones holomorfas es un problema clásico en el análisis matemático. Presentamos un análisis de la caracterización clásica de este tipo de medidas para el espacio de Hardy H^p y el espacio de Bergman A_α^p .

Abstract: The characterization of q -Carleson measures for holomorphic function spaces is a classical problem in mathematical analysis. We give a survey of the classical characterization of this type of measures for the Hardy H^p and Bergman A_α^p spaces.

Palabras clave: q -medidas de Carleson, espacios de Hardy, espacios de Bergman, operador maximal, espacios de Hilbert con núcleo reproductor.

MSC2010: 30J99, 31A10.

Recibido: 26 de marzo de 2019.

Aceptado: 27 de marzo de 2020.

Agradecimientos: Queremos agradecer al Prof. J. A. Peláez por su inestimable ayuda en el análisis de este problema y en la depuración de la presentación de nuestro trabajo. También agradecemos a los organizadores de la última edición del *Workshop on Complex Analysis and Operator Theory*, así como a la Spanish Network on Complex Analysis and Operator Theory.

Referencia: AGUILAR, Tanausú; BAENA, Sergi; CRUZ, Carlos; LENDÍNEZ, Jordi; MOLERO, Alejandro y PRADERIO, Marco. « q -medidas de Carleson en espacios de Hardy H^p y Bergman A_α^p ». En: *TEMat*, 4 (2020), págs. 67-82. ISSN: 2530-9633. URL: <https://temat.es/articulo/2020-p67>.

1. Introducción

La caracterización de las q -medidas de Carleson para espacios de funciones holomorfas es un problema clásico en el análisis matemático. Estas fueron introducidas por L. Carleson en la década de 1960 [3, 4] para caracterizar las sucesiones de interpolación en el álgebra de Banach H^∞ , formada por las funciones holomorfas acotadas en el disco unidad abierto $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, y dar una solución al problema de la corona.

Definición 1. Sea μ una medida de Borel positiva y \mathcal{F} un espacio cuasinormado de funciones analíticas en \mathbb{D} . Diremos que μ es una q -medida de Carleson para \mathcal{F} si el operador

$$\text{Id} : \mathcal{F} \rightarrow L^q(\mu)$$

es acotado. ◀

La importancia de este tipo de medidas es ampliamente conocida. Existen múltiples aplicaciones en análisis armónico o en ecuaciones diferenciales, por ejemplo en la solución de la ecuación $\bar{\partial}$ dada por Jones [12]. Como observa Jones [11], existe un destacable uso de este tipo de medidas en la caracterización de funciones de oscilación media acotada (BMO por sus siglas en inglés). Fefferman y Stein [8] demuestran que $\phi \in \text{BMO}(\mathbb{R})$ si y solo si su extensión armónica a \mathbb{R}_+^2 satisface que $y \nabla \phi \, dx \, dy$ es una medida de Carleson. Esto implica que el dual de H^1 se identifica con BMO. Sin embargo, hay que notar que este resultado se puede obtener sin el uso de este tipo de medidas (ver el libro de Pavlović [14, cap. 6]).

Presentamos un análisis de la caracterización clásica de este tipo de medidas, dada por Carleson, para el espacio de Hardy H^p y el espacio de Bergman con peso A_α^p en el disco unidad con $p \leq q$. Para el caso $q < p$ son necesarias otras técnicas que exceden la pretensión de este texto. Además, analizamos algunas propiedades del operador maximal de Hörmander [10] para obtener el resultado. La importancia del esquema de demostración que desarrollamos en este artículo radica en que no requiere conocimientos avanzados. El resultado que mostramos se puede obtener a través del teorema de interpolación de Marcinkiewicz (ver el artículo de Bernard [1, Teorema 3.8]), pero ello implica un conocimiento más avanzado de teoría de la interpolación. Nótese que el esquema para el espacio de Hardy se puede adaptar al espacio de Bergman (ver también el artículo de Peláez y Rättyä [15, Theorem 4.19]). Sin embargo, optamos por otra vía también sencilla.

El artículo se divide en cuatro secciones. En la primera repasamos algunas definiciones básicas de los espacios de Hilbert con núcleo reproductor y definimos los espacios de Hardy y Bergman clásicos. En la segunda sección, definimos y analizamos las cajas de Carleson y el operador maximal de Hörmander. Finalizamos con una sección para la caracterización en cada espacio.

A lo largo del artículo utilizaremos la siguiente notación. Denotaremos por $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ a un espacio de Hilbert de funciones holomorfas con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y por \mathbb{T} a la frontera del disco unidad \mathbb{D} . El conjunto de funciones holomorfas en \mathbb{D} estará denotado por $\mathcal{O}(\mathbb{D})$. Además, si $T : X \rightarrow Y$ es un operador lineal y continuo entre los espacios de Banach X e Y , denotaremos su norma por $\|T\|_{(X,Y)}$. Por otro lado, dados $A, B > 0$, si existe $c > 0$ tal que $A \leq cB$, escribiremos $A \lesssim B$. Si $A \lesssim B$ y $B \lesssim A$, escribiremos $A \asymp B$.

Finalmente, sugerimos al lector interesado en profundizar en el teorema de interpolación ver el artículo de Bernard [1]; al interesado en los espacios de Bergman, leer los libros de Duren y Schuster [7] y Hedenmalm, Korenblum y Zhu [9], y al interesado en los espacios de Hardy, los libros de Duren [6], Koosis [13] y Pavlović [14]. Para profundizar en medidas de Carleson y aplicaciones de estas, se recomienda ver los artículos de Carleson [3, 4], Fefferman y Stein [8], Jones [11, 12] y Peláez y Rättyä [15]. Para el operador maximal de Hörmander se recomienda leer su artículo original [10], y para conceptos básicos de análisis complejo aconsejamos los libros de Bruna y Cufí [2] y Rudin [17]. Cabe destacar que los artículos de Fefferman y Stein [8] y Hörmander [10] están enfocados a varias variables complejas, por lo que recomendamos al lector que consulte los libros de Rudin [16] y Scheidemann [18] previamente a su lectura.

2. Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Consideremos H un espacio de Hilbert, $H \subset \mathcal{O}(\mathbb{D})$, tal que para todo punto $z \in \mathbb{D}$ el operador evaluación $L_z : H \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $L_z(f) = f(z)$ está acotado. El teorema de representación de Riesz [17] asegura la existencia de una única función K_z tal que $\langle f, K_z \rangle = L_z(f) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Dicha función se denomina *núcleo reproductor de H* .

Dada $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal de H , su núcleo reproductor será

$$K_z(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(\xi) \overline{e_n(z)}, \quad \xi, z \in \mathbb{D}.$$

Nos centraremos en la caracterización de las q -medidas de Carleson para los espacios de Hardy H^p y los espacios de Bergman A_α^p .

Dadas la función $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ y constantes $r \in (0, 1)$ y $p \in (0, \infty)$, definimos la función

$$M_p(r, f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}.$$

Definición 2. Sea $0 < p < \infty$. Definimos el **espacio de Hardy H^p** como el espacio de funciones $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ tales que

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0 < r < 1} M_p(r, f) = \lim_{r \rightarrow 1^-} M_p(r, f) < \infty. \quad \blacktriangleleft$$

Nótese que la última igualdad es debida al teorema de convexidad de Hardy (véase el libro de Conway [5, cap. 6]). Por otro lado, sea $dA(re^{it}) = \frac{r}{\pi} dr dt$ y consideremos un peso w (es decir, $w \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ con $w \geq 0$).

Definición 3. Sea $0 < p < \infty$. Definimos el **espacio de Bergman con peso w , A_w^p** , como el espacio de funciones $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ tales que

$$\|f\|_{A_w^p} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p w(z) dA(z) \right)^{1/p} < \infty. \quad \blacktriangleleft$$

En particular, nos centraremos en los pesos

$$w(z) = w_\alpha(z) = (\alpha + 1)(1 - |z|^2)^\alpha, \quad \alpha > -1,$$

por lo que de ahora en adelante denotaremos $A_w^p = A_\alpha^p$ para estos pesos.

Notemos ahora que tanto el espacio de Hardy H^2 como el espacio de Bergman A_α^2 tienen estructura de espacio de Hilbert con los productos escalares respectivos,

$$\langle f, g \rangle_{H^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta \quad \text{y} \quad \langle f, g \rangle_{A_\alpha^2} = \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{g(z)} w_\alpha(z) dA(z).$$

Estos espacios admiten una base ortonormal dada por los monomios normalizados. En el caso del espacio de Hardy H^2 tenemos que $e_n(z) = z^n$ y la expresión de su núcleo reproductor queda como

$$K_z(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \overline{z}^n = \frac{1}{1 - \xi \overline{z}},$$

el cual normalizando queda

$$k_z(\xi) = \frac{K_z(\xi)}{\|K_z\|} = \frac{(1 - |z|^2)^{1/2}}{1 - \xi \overline{z}},$$

donde $\|K_z\|^2 = (1 - |z|^2)^{-1}$. En el caso del espacio de Bergman A_α^2 , los elementos de la base de monomios normalizados son

$$e_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{2 \int_0^1 \rho^{2n+1} w_\alpha(\rho) d\rho}},$$

los cuales nos permiten calcular el núcleo reproductor de A_α^2 como

$$K_z(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n \bar{z}^n}{2(\alpha + 1) \int_0^1 \rho^{2n+1} (1 - \rho^2)^\alpha d\rho} = \frac{1}{(1 - \xi \bar{z})^{2+\alpha}}.$$

Finalmente, normalizando el núcleo reproductor obtenemos que

$$k_z(\xi) = \frac{(1 - |z|^2)^{(2+\alpha)/2}}{(1 - \xi \bar{z})^{2+\alpha}}.$$

3. Cajas de Carleson y operador maximal de Hörmander

En esta sección introduciremos la noción de caja de Carleson asociada a un arco de \mathbb{T} o a un punto del disco unidad \mathbb{D} . Posteriormente, hablaremos sobre el operador maximal de Hörmander, el cual nos será útil en la sección 4.

Definición 4. Sea $I \subset \mathbb{T}$ un intervalo. La **caja de Carleson** asociada al intervalo I es el conjunto

$$S(I) = \{re^{it} : 1 - r \leq |I|, e^{it} \in I\},$$

donde $|I|$ denota la medida de Lebesgue normalizada del intervalo I . De forma similar, se puede definir la caja de Carleson para cualquier punto $a = |a|e^{i\theta} \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ como

$$S(a) = \left\{ re^{it} : 1 - r \leq 1 - |a|, |\arg(\bar{a}z)| = |t - \theta| \leq \frac{1 - |a|}{2} \right\}.$$

Además, si definimos el arco $I_a \subset \mathbb{T}$ como

$$I_a = \left\{ e^{it} : |t - \theta| \leq \frac{1 - |a|}{2} \right\},$$

tenemos que $|I_a| = 1 - |a|$ y el arco asociado a la caja de Carleson $S(a)$ es I_a (ver figura 1). Vemos entonces que existe una biyección entre los conjuntos I_a y $S(a)$, $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. En particular, $S(a) = S(I_a)$. ◀

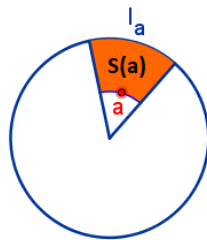


Figura 1: Caja de Carleson.

Una propiedad interesante de las cajas de Carleson es el siguiente resultado técnico, el cual nos permite obtener una condición necesaria para describir las q -medidas de Carleson en los espacios mencionados.

Lema 5. Sean $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ y $z \in S(a)$. Entonces,

$$\frac{1 - |a|^2}{2} \leq |1 - \bar{a}z| \leq (1 - |a|^2) \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Demostración. Nótese que $(1 + |a|)/2 \leq 1$, por lo que la primera desigualdad se obtiene de

$$|1 - \bar{a}z| \geq 1 - |az| \geq 1 - |a| \geq (1 - |a|) \left(\frac{1 + |a|}{2} \right) = \frac{1 - |a|^2}{2}.$$

Veamos la segunda desigualdad. Sea $\theta = \arg(\bar{a}z)$. Tenemos que

$$|1 - \bar{a}z|^2 = (1 - |\bar{a}z|)^2 + 4|a||z|(\sin(\theta/2))^2 \leq (1 - |az|)^2 + |\theta|^2,$$

donde estamos usando que $|\sin(t)| \leq |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Finalmente, como $z \in S(a)$,

$$(1 - |az|)^2 + |\theta|^2 \leq (1 - |az|)^2 + \frac{(1 - |a|)^2}{4} \leq (1 - |a|^2)^2 + \frac{(1 - |a|)^2}{4} \leq \frac{5}{4}(1 - |a|^2)^2. \quad \blacksquare$$

La siguiente clase de medidas quedarán caracterizadas cuando $\alpha = q/p$ como las q -medidas de Carleson para H^p .

Definición 6. Sea $\alpha > 0$. Si μ es una medida de Borel positiva, definimos

$$\|\mu\|_\alpha = \sup_{a \in \mathbb{D}} \frac{\mu(S(a))}{(1 - |a|^2)^\alpha}. \quad \blacktriangleleft$$

Proposición 7. Sean $0 < p, q < \infty$. Si μ es una q -medida de Carleson para H^p , existe una constante $c = c(p, q) > 0$ tal que

$$\|\mu\|_{q/p} \leq c \|\text{Id}\|_{(H^p, L^q(\mu))}^q < \infty.$$

Demostración. Por hipótesis, tenemos que $\text{Id} : H^p \rightarrow L^q(\mu)$ es acotado. Tomamos $a \in \mathbb{D}$ y consideramos la familia de funciones $f_a(z) = k_a(z)^{2/p}$, donde k_a consiste en el núcleo reproductor normalizado

$$k_a(z) = \frac{(1 - |a|^2)^{1/2}}{1 - \bar{a}z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Entonces, como $\|k_a\|_{H^2} = 1$,

$$(1) \quad \|\text{Id}\|_{(H^p, L^q(\mu))}^q = \|k_a\|_{H^2}^{2q/p} \|\text{Id}\|_{(H^p, L^q(\mu))}^q = \|f_a\|_{H^p}^q \|\text{Id}\|_{(H^p, L^q(\mu))}^q \geq \|\text{Id}(f_a)\|_{L^q(\mu)}^q = \|f_a\|_{L^q(\mu)}^q.$$

Ahora bien, $f_a \in H^p$ y

$$(2) \quad \begin{aligned} \|f_a\|_{L^q(\mu)}^q &= \int_{\mathbb{D}} |f_a(z)|^q d\mu(z) \geq \int_{S(a)} |f_a(z)|^q d\mu(z) = \int_{S(a)} |k_a(z)|^{2q/p} d\mu(z) \\ &= \int_{S(a)} \left| \frac{(1 - |a|^2)^{1/2}}{1 - \bar{a}z} \right|^{2q/p} d\mu(z) \geq \left(\frac{2}{\sqrt{5}(1 - |a|^2)^{1/2}} \right)^{2q/p} \mu(S(a)) = (4/5)^{q/p} \frac{\mu(S(a))}{(1 - |a|^2)^{q/p}}, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que $|1 - \bar{a}z| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}(1 - |a|^2)$ para $z \in S(a)$ (ver lema 5). Como esto es cierto para toda $a \in \mathbb{D}$, de (1) y (2), y tomando $c = (4/5)^{-q/p}$, deducimos que

$$c \|\text{Id}\|_{(H^p, L^q(\mu))}^q \geq \sup_{a \in \mathbb{D}} \left(\frac{\mu(S(a))}{(1 - |a|^2)^{q/p}} \right) = \|\mu\|_{q/p}. \quad \blacksquare$$

Más adelante veremos que, si $q \geq p$, entonces la inclusión $H^p \subset L^q(\mu)$ es acotada y existe $C > 0$ tal que $\|\mu\|_{q/p} \geq C \|\text{Id}\|_{(H^p, L^q(\mu))}^q$. Por lo tanto, en este caso, $\|\mu\|_{q/p} \asymp \|\text{Id}\|_{(H^p, L^q(\mu))}^q$ (véase el teorema 13). Para eso, necesitaremos el siguiente lema de recubrimiento.

Lema 8 (Lema de recubrimiento 1). *Sea $A \subset \mathbb{D}$, $A \neq \emptyset$. Supongamos que no existe una sucesión infinita de puntos $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tales que los intervalos asociados $(I_{z_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sean disjuntos dos a dos. Entonces, existe una sucesión finita de puntos $z_1, \dots, z_m \in A$ tales que los arcos I_1, \dots, I_m son disjuntos y*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^m \{z \in \mathbb{D} : I_z \subset 5I_{z_n}\},$$

donde $5I_{z_n} = \{e^{it} : |t - \theta_n| \leq \frac{5(1-|z_n|)}{2}\}$.

Demostración. Para la prueba vamos a construir una sucesión de puntos $z_1, \dots, z_m \in A$ que va a satisfacer la hipótesis que queremos.

Sean $A_1 = A$ y $\rho_1 = \inf\{|z| : z \in A_1\}$. Si $0 \in A_1$, elegimos $z_1 = 0$; en caso contrario, elegimos $z_1 \in A_1$ tal que $|z_1| \leq (\rho_1 + 1)/2$, lo cual es posible ya que, si $|z| > (\rho_1 + 1)/2$ para todo $z \in A_1$, entonces tendríamos que

$$\frac{\rho_1 + 1}{2} \leq \inf\{|z| : z \in A_1\} = \rho_1 < 1,$$

y llegaríamos a una contradicción. Sea ahora $A_2 = \{z \in A_1 : I_z \cap I_{z_1} = \emptyset\}$. Si $A_2 = \emptyset$, escogemos $m = 1$ y ya tenemos la sucesión buscada. Si $A_2 \neq \emptyset$, definimos $\rho_2 = \inf\{|z| : z \in A_2\}$ y elegimos $z_2 \in A_2$ tal que $|z_2| \leq (\rho_2 + 1)/2$.

De esta manera, se puede crear una sucesión de puntos z_1, z_2, z_3, \dots tales que $z_n \in A_n$ y $|z_n| \leq (\rho_n + 1)/2$, donde $A_n = \{z \in A_{n-1} : I_z \cap I_{z_{n-1}} = \emptyset\} \neq \emptyset$ y $\rho_n = \inf\{|z| : z \in A_n\}$ para $n \geq 2$. Por hipótesis, el proceso de escoger las z_n debe parar (es decir, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $A_n = \emptyset$, por lo que ya tendríamos la sucesión buscada), ya que no existe ninguna colección infinita de puntos $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tales que los intervalos asociados $(I_{z_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sean disjuntos dos a dos.

Por lo tanto, existe un entero $m \geq 1$ tal que $A_n \neq \emptyset$ para todo $1 \leq n \leq m$ pero $A_{m+1} = \emptyset$. Entonces, dado $z \in A$, existe algún $n_0 \in \{1, \dots, m\}$ tal que $I_z \cap I_{z_{n_0}} \neq \emptyset$. Fijemos el subíndice n_0 (si hubiera más de uno, escogemos n_0 como el mínimo entre estos subíndices). Obsérvese que, si $n_0 > 1$, entonces $I_z \cap I_{z_j} = \emptyset$ para todo $j \in \{1, \dots, n_0 - 1\}$. Por tanto,

$$|z| \geq \rho_{n_0} = \inf\{|z| : z \in A, I_z \cap I_{z_j} = \emptyset, 1 \leq j \leq n_0 - 1\}.$$

Así pues, como $2|z_{n_0}| \leq \rho_{n_0} + 1$,

$$|I_z| = 1 - |z| \leq 1 - \rho_{n_0} \leq 1 + 1 - 2|z_{n_0}| = 2(1 - |z_{n_0}|) = 2|I_{z_{n_0}}|.$$

Concluimos que $I_z \cap I_{z_{n_0}} \neq \emptyset$ y $|I_z| \leq 2|I_{z_{n_0}}|$. Por lo tanto, $I_z \subset 5I_{z_{n_0}}$.

Si $n_0 = 1$, hacemos el mismo argumento pero ahora con ρ_1 y z_1 en lugar de ρ_{n_0} y z_{n_0} . ■

Para acabar esta sección, vamos a introducir el operador maximal de Hörmander y daremos algunos resultados interesantes sobre este operador.

Definición 9. Sean $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ y $z \in \mathbb{D}$. El **operador maximal de Hörmander** se define como

$$\tilde{\mathcal{M}}(\varphi)(z) = \sup_{I \supset I_z} \frac{1}{|I|} \int_I |\varphi(e^{it})| dt. \quad \blacktriangleleft$$

El siguiente resultado nos da una manera equivalente de escribir el operador de Hörmander.

Lema 10. Si $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, definimos

$$\mathcal{M}_r(\varphi)(e^{i\theta}) = \sup_{I \ni e^{i\theta}, |I| \geq |I_z|} \frac{1}{|I|} \int_I |\varphi(e^{it})| dt.$$

Entonces, $\mathcal{M}_r(\varphi)(e^{i\theta}) \asymp \tilde{\mathcal{M}}(\varphi)(z)$ para todo $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$.

Demostración. Observamos que para todo arco $I \supset I_z$ tenemos que $|I| \geq |I_z|$. Además, $e^{i\theta} \in I_z \subset I$, de lo que se obtiene la primera desigualdad

$$\tilde{\mathcal{M}}(\varphi)(z) \leq \mathcal{M}_r(\varphi)(e^{i\theta}).$$

Para ver la segunda desigualdad, sea I un intervalo tal que $e^{i\theta} \in I$ y $|I| \geq |I_z|$. Entonces, $e^{i\theta} \in I_z \cap I \neq \emptyset$. Así pues, existe un arco $\tilde{I} \supset I$ tal que $|\tilde{I}| = 2|I|$ y $I_z \subset \tilde{I}$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{|I|} \int_I |\varphi(e^{it})| dt \leq 2 \frac{1}{2|I|} \int_I |\varphi(e^{it})| dt = 2 \frac{1}{|\tilde{I}|} \int_{\tilde{I}} |\varphi(e^{it})| dt \leq 2\tilde{\mathcal{M}}(\varphi)(z),$$

y la desigualdad que queremos ver se sigue tomando supremo sobre los arcos I tales que $e^{i\theta} \in I$ y $|I| \geq |I_z|$. ■

La ventaja de esta equivalencia es que podemos probar una desigualdad puntual para este operador cuando actúa sobre espacios de Hardy.

Lema 11. Sea $p > 0$. Existe una constante $C = C(p)$ tal que

$$|f(z)|^p \leq C\tilde{\mathcal{M}}(|f|^p)(z),$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ y para toda $f \in H^p$.

Demostración. En virtud del lema 10, basta probar la desigualdad

$$|f(z)|^p \leq C'\mathcal{M}_r(|f|^p)(e^{i\theta}), \quad z \in \mathbb{D}, f \in H^p,$$

donde $C' = C'(p)$. Dada $f \in H^p$, observemos que, al ser f holomorfa, puede probarse que $|f|^p$ es subarmónica en el disco unidad. Por otro lado, recordemos que, si denotamos por

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}, \quad t \in [-\pi, \pi],$$

el núcleo de Poisson con $r \in (0, 1)$ y tomamos $g \in L^1(\mathbb{T})$, la función

$$u_g(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)g(e^{it}) dt, \quad \theta \in [-\pi, \pi],$$

es una función armónica en \mathbb{D} cuyo límite radial en \mathbb{T} existe y coincide con $g(z)$ para casi todo $z \in \mathbb{T}$ [17, Teorema 11.16]. Como $f \in H^p$, puede probarse que $|f|^p$ restringida a \mathbb{T} es una función de $L^1(\mathbb{T})$. Así,

$$u_{|f|^p}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)|f(e^{it})|^p dt$$

es una función armónica que coincide con $|f|^p$ para casi todo punto en \mathbb{T} . Pero, como $|f|^p$ es subarmónica, concluimos por definición que

$$|f(re^{i\theta})|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)|f(e^{it})|^p dt.$$

Supongamos que $r \leq 1/2$. Se sigue que $P_r(t) \leq 3$ para todo $t \in [-\pi, \pi]$. De esta manera, sea $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$. Entonces,

$$|f(z)|^p \leq 3 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^p dt \leq 3 \sup_{e^{i\theta} \in I, |I| \geq |I_z|} \frac{1}{|I|} \int_I |f(e^{it})|^p dt = 3\mathcal{M}_r(|f|^p)(e^{i\theta}).$$

Por otro lado, si tomamos $1 > r > 1/2$, observamos que no se puede acotar el núcleo de Poisson uniformemente en t y en r , debido a que, para $t = 0$, tenemos que $P_r(0) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow 1^-$. En este caso procedemos de la siguiente manera. Para todo $n = 1, 2, 3, \dots$, definimos $t_n = 2^{n-1}\pi(1-r)$.

Notemos que $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente en la que $t_{n+1} = 2t_n$ y $t_1 = \pi(1-r)$. Así, al tener que $1-r < 1/2$, existe un único natural N tal que $t_N < \pi/2$ y $t_{N+1} \geq \pi/2$. De esta forma (ver figura 2), definimos

$$J_n = [-t_n, t_n], \quad n = 1, 2, \dots, N+1,$$

y

$$G_n = \begin{cases} J_1 & \text{si } n = 1, \\ J_n \setminus J_{n-1} & \text{si } n = 2, 3, \dots, N, \\ [-\pi, \pi] \setminus J_{N+1} & \text{si } n = N+1, \end{cases}$$

y vamos a encontrar una cota conveniente para cada G_n . Nótese que, para cada $n = 1, 2, \dots, N+1$,

$$P_r(t) \leq \frac{1}{4^{n-2}(1-r)}, \quad t \in G_n.$$

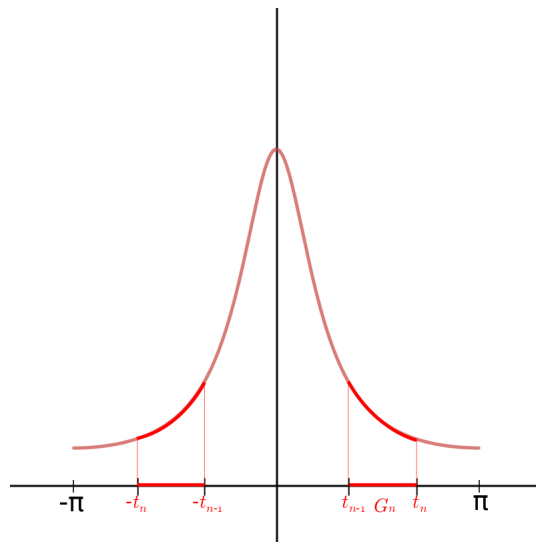


Figura 2: Conjunto G_n y núcleo de Poisson.

En efecto, fijado r , el núcleo de Poisson es una función par en t y decreciente para $t \in [0, \pi]$. Así,

$$\begin{aligned} P_r(t) &\leq P_r(0), & t \in G_1, \text{ y} \\ P_r(t) &\leq P_r(t_{n-1}), & t \in G_n \quad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

Además, como $\cos t \leq 1 - 2t^2/\pi^2$, se sigue que

$$P_r(t_{n-1}) = \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 2r(1-\cos t_{n-1})} \leq \frac{1-r^2}{\frac{4rt_{n-1}^2}{\pi^2}} \leq \frac{1-r^2}{\frac{2t_{n-1}^2}{\pi^2}} = \frac{8(1+r)}{4^n(1-r)} \leq \frac{1}{4^{n-2}(1-r)}.$$

Obtenemos que

$$\begin{aligned} |f(re^{i\theta})|^p &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) |f(e^{it})|^p dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-\theta) |f(e^{it})|^p dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) |f(e^{i(t+\theta)})|^p dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N+1} \int_{G_n} P_r(t) |f(e^{i(t+\theta)})|^p dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{4^{n-2}(1-r)} \int_{G_n} |f(e^{i(t+\theta)})|^p dt \leq 8 \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{2^n} \frac{1}{|J_n|} \int_{J_n} |f(e^{i(t+\theta)})|^p dt \\ &\leq 8 \left(\sup_{e^{i\theta} \in I, |I| \geq |I_z|} \frac{1}{|I|} \int_I |f(e^{it})|^p dt \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right) = 16\mathcal{M}_r(|f|^p)(e^{i\theta}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Para el operador de Hörmander se tiene la siguiente desigualdad débil.

Lema 12 (Desigualdad débil). Sean $q \geq p > 0$ y sea μ una medida de Borel positiva que satisface que $\|\mu\|_{p/q} < \infty$. Entonces, existe una constante $c = c(p, q) > 0$ tal que, para cada función $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$,

$$\mu(\{z \in \mathbb{D} : \tilde{M}(\varphi)(z) > \lambda\}) \leq c \frac{\|\mu\|_{q/p}}{\lambda^{q/p}} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{T})}^{q/p}, \quad \lambda > 0.$$

Demostración. Tomamos $\lambda > 0$ y definimos $E_\lambda = \{z \in \mathbb{D} : \tilde{M}(\varphi)(z) > \lambda\}$. Si $E_\lambda = \emptyset$, el resultado es trivial. Supongamos, pues, que $E_\lambda \neq \emptyset$. Para cualquier $\varepsilon > 0$, definimos los conjuntos

$$A_\lambda^\varepsilon = \left\{ z \in \mathbb{D} : \int_{I_z} |\varphi(e^{it})| dt > \lambda(|I_z| + \varepsilon) \right\} \quad \text{y} \quad B_\lambda^\varepsilon = \{z \in \mathbb{D} : I_z \subset I_w, \text{ para algún } w \in A_\lambda^\varepsilon\}.$$

Nótese que los conjuntos A_λ^ε y B_λ^ε crecen si ε decrece. Además, tenemos que

$$E_\lambda \subseteq \bigcup_{\varepsilon > 0} B_\lambda^\varepsilon,$$

ya que para $z \in E_\lambda$, por la definición de supremo, existen $\varepsilon > 0$ y $w \in \mathbb{D}$ tales que $w \in A_\lambda^\varepsilon$ y $I_z \subset I_w$; en consecuencia, $z \in B_\lambda^\varepsilon$. Por lo tanto,

$$\mu(E_\lambda) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mu(B_\lambda^\varepsilon).$$

Ahora observemos que, para cada $\varepsilon > 0$, no hay infinitos puntos $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en A_λ^ε tales que los intervalos $(I_{z_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sean disjuntos. En caso contrario, si $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A_\lambda^\varepsilon$, entonces

$$\lambda(|I_{z_n}| + \varepsilon) < \int_{I_{z_n}} |\varphi(e^{it})| dt, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y obtenemos que

$$(3) \quad \lambda \sum_{n=1}^{\infty} (|I_{z_n}| + \varepsilon) < \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_{z_n}} |\varphi(e^{it})| dt = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{z_n}} |\varphi(e^{it})| dt \leq \int_{\mathbb{T}} |\varphi(e^{it})| dt = \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{T})} < +\infty,$$

lo cual no es posible. Como $E_\lambda \neq \emptyset$, tenemos que $A_\lambda^\varepsilon \neq \emptyset$ para ε suficientemente pequeño. Así pues, el lema de recubrimiento 1 (lema 8) nos asegura que existen puntos $z_1, \dots, z_m \in A_\lambda^\varepsilon$ tales que

$$A_\lambda^\varepsilon \subset \bigcup_{n=1}^m \{z \in \mathbb{D} : I_z \subset 5I_{z_n}\}.$$

De aquí se sigue que

$$B_\lambda^\varepsilon \subset \bigcup_{n=1}^m \{z \in \mathbb{D} : I_z \subset 5I_{z_n}\},$$

ya que si $z \in B_\lambda^\varepsilon$, entonces $I_z \subset I_w$ para algún $w \in A_\lambda^\varepsilon$, y $I_w \subset 5I_{z_n}$ para algún $n \in \{1, \dots, m\}$. Además, dado que $I_{z_1} \subset I_{z_2}$ implica que $S(I_{z_1}) \subset S(I_{z_2})$ para $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, y tenemos que $q \geq p$ y la medida de Lebesgue es doblante, deducimos que

$$\begin{aligned} \mu(B_\lambda^\varepsilon) &\leq \sum_{n=1}^m \mu(\{z \in \mathbb{D} : I_z \subset 5I_{z_n}\}) \leq \sum_{n=1}^m \mu(S(5I_{z_n})) \leq c \|\mu\|_{q/p} \sum_{n=1}^m |5I_{z_n}|^{q/p} \\ &\leq c \|\mu\|_{q/p} \left(\sum_{n=1}^m |I_{z_n}| \right)^{q/p} \leq c \|\mu\|_{q/p} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{T})}^{q/p} \lambda^{-q/p}, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado (3). Finalmente, haciendo tender ε a 0, obtenemos el resultado. ■

4. El espacio de Hardy H^p

En esta sección probaremos la caracterización de las q -medidas de Carleson de H^p con $p \leq q$. El caso $p > q$ no se estudia en este artículo, pero su análisis se puede encontrar en distintos libros de las referencias.

Teorema 13. Sean $0 < p \leq q < \infty$ y μ una medida de Borel en \mathbb{D} . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Para cada $\alpha > \frac{1}{p}$, el operador

$$[\tilde{\mathcal{M}}((\cdot)^{1/\alpha})]^\alpha : L^p(\mathbb{T}) \rightarrow L^q(\mu)$$

está acotado;

(ii) μ es una q -medida de Carleson para H^p ;

(iii) $\|\mu\|_{q/p} = \sup_{I \subset \mathbb{T}} \frac{\mu(S(I))}{|I|^{q/p}} < \infty$.

Además,

$$\|\text{Id}\|_{(H^p, L^q(\mu))}^q \asymp \left\| [\tilde{\mathcal{M}}((\cdot)^{1/\alpha})]^\alpha \right\|_{(L^p(\mathbb{T}), L^q(\mu))}^q \asymp \|\mu\|_{q/p}.$$

Demostración. Veamos que (iii) \Rightarrow (i). Para cada $\lambda > 0$ y $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$ definimos la función

$$\varphi_{1/\alpha, \lambda}(e^{i\theta}) = \begin{cases} |\varphi(e^{i\theta})|^{1/\alpha} & \text{si } |\varphi(e^{i\theta})|^{1/\alpha} > \lambda/2, \\ 0 & \text{si } |\varphi(e^{i\theta})|^{1/\alpha} \leq \lambda/2, \end{cases}$$

y se satisface la inclusión

$$\{z \in \mathbb{D} : \tilde{\mathcal{M}}(\varphi^{1/\alpha})(z) > \lambda\} \subset \left\{z \in \mathbb{D} : \tilde{\mathcal{M}}(\varphi_{1/\alpha, \lambda})(z) > \frac{\lambda}{2}\right\}$$

ya que $\varphi^{1/\alpha} = \varphi^{1/\alpha} \chi_{\{|\varphi(e^{i\theta})|^{1/\alpha} > \lambda/2\}} + \varphi^{1/\alpha} \chi_{\{|\varphi(e^{i\theta})|^{1/\alpha} \leq \lambda/2\}}$. Ahora bien, por el teorema de Fubini y la anterior inclusión de conjuntos,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} (\tilde{\mathcal{M}}(\varphi^{1/\alpha})(z))^{\alpha q} d\mu(z) &= \int_{\mathbb{D}} \left(\alpha q \int_0^{(\tilde{\mathcal{M}}(\varphi^{1/\alpha})(z))} \lambda^{\alpha q - 1} d\lambda \right) d\mu(z) \\ (4) \quad &= \alpha q \int_0^\infty \lambda^{\alpha q - 1} \mu(\{z \in \mathbb{D} : \tilde{\mathcal{M}}(\varphi^{1/\alpha})(z) > \lambda\}) d\lambda \\ &\leq \alpha q \int_0^\infty \lambda^{\alpha q - 1} \mu\left(\left\{z \in \mathbb{D} : \tilde{\mathcal{M}}(\varphi_{1/\alpha, \lambda})(z) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) d\lambda. \end{aligned}$$

Además, de la desigualdad débil disponible en el lema 12 se sigue que

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \lambda^{\alpha q - 1} \mu\left(\left\{z \in \mathbb{D} : \tilde{\mathcal{M}}(\varphi_{1/\alpha, \lambda})(z) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) d\lambda \\ (5) \quad &\leq C \|\mu\|_{q/p} \int_0^\infty \lambda^{q(\alpha - 1/p) - 1} \|\varphi_{1/\alpha, \lambda}\|_{L^1(\mathbb{T})}^{q/p} d\lambda \\ &= C \|\mu\|_{q/p} \int_0^\infty \lambda^{q(\alpha - 1/p) - 1} \left(\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^{1/\alpha} \chi_{\{|\varphi(e^{i\theta})|^{1/\alpha} > \lambda/2\}} d\theta \right)^{q/p} d\lambda. \end{aligned}$$

Finalmente, empleando la desigualdad de Minkowski (cuando $q > p$) y el teorema de Fubini (cuando $p = q$) se tiene que

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \int_0^\infty \lambda^{q(\alpha-1/p)-1} \left(\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^{1/\alpha} \chi_{\{|\varphi(e^{i\theta})|^{1/\alpha} > \lambda/2\}} d\theta \right)^{q/p} d\lambda \\
 & \leq \left(\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^{1/\alpha} \left(\int_0^\infty \lambda^{q(\alpha-1/p)-1} \chi_{\{|\varphi(e^{i\theta})|^{1/\alpha} > \lambda/2\}} d\lambda \right)^{p/q} d\theta \right)^{q/p} \\
 & = \left(\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^{1/\alpha} \left(\int_0^{2|\varphi(e^{i\theta})|^{1/\alpha}} \lambda^{q(\alpha-1/p)-1} d\lambda \right)^{p/q} d\theta \right)^{q/p} \\
 & \asymp \left(\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{q/p} = \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{T})}^q.
 \end{aligned}$$

Así pues, de (4), (5) y (6) se sigue que

$$\int_{\mathbb{D}} (\tilde{\mathcal{M}}(\varphi^{1/\alpha})(z))^{\alpha q} d\mu(z) \lesssim \|\mu\|_{q/p} \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{T})}^q,$$

lo que prueba que el operador

$$[\tilde{\mathcal{M}}((\cdot)^{1/\alpha})]^\alpha : L^p(\mathbb{T}) \rightarrow L^q(\mu)$$

está acotado y, además,

$$\left\| [\tilde{\mathcal{M}}((\cdot)^{1/\alpha})]^\alpha \right\|_{(L^p(\mathbb{T}), L^q(\mu))}^q \lesssim \|\mu\|_{q/p}.$$

Ahora, veamos que (i) \Rightarrow (ii). Sea $f \in H^p$. Como $\alpha > 1/p$, tenemos que $H^p \subset H^{1/\alpha}$. Además, tenemos por el lema 11 que

$$|f(z)| \lesssim [\tilde{\mathcal{M}}(|f|^{1/\alpha})(z)]^\alpha.$$

De esta forma,

$$\|\text{Id}(f)\|_{L^q(\mu)} = \|f\|_{L^q(\mu)} \lesssim \left\| [\tilde{\mathcal{M}}(|f|^{1/\alpha})]^\alpha \right\|_{L^q(\mu)} \leq \left\| [\tilde{\mathcal{M}}((\cdot)^{1/\alpha})]^\alpha \right\|_{(L^p(\mathbb{T}), L^q(\mu))} \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Así pues, como $\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \lesssim \|f\|_{H^p}$, el operador identidad es acotado de H^p a $L^q(\mu)$. Además,

$$\|\text{Id}\|_{H^p \rightarrow L^q(\mu)} \lesssim \left\| [\tilde{\mathcal{M}}((\cdot)^{1/\alpha})]^\alpha \right\|_{(L^p(\mathbb{T}), L^q(\mu))}.$$

Por último, el caso (iii) \Rightarrow (iii) corresponde a la proposición 7. ■

5. El espacio de Bergman A_α^p

En esta sección vamos a ver que podemos caracterizar las q -medidas de Carleson para los espacios de Bergman A_α^p de forma geométrica vía las cajas de Carleson sobre intervalos o vía discos pseudohiperbólicos. Para ello necesitaremos un lema de recubrimiento y otro de armonicidad.

Definición 14 (Distancia pseudohiperbólica). Definimos la distancia pseudohiperbólica entre los puntos $z, \omega \in \mathbb{D}$ como

$$\rho(z, \omega) = \left| \frac{z - \omega}{1 - \bar{z}\omega} \right|.$$

En particular, definimos el disco pseudohiperbólico de centro z y radio r como

$$\Delta(z, r) = \{\omega \in \mathbb{D} : \rho(z, \omega) < r\}.$$

Una propiedad importante de esta distancia es la desigualdad triangular fuerte.

Proposición 15 (Desigualdad triangular fuerte). *Sean $z, \omega \in \mathbb{D}$. Entonces, tenemos que*

$$\rho(z, \omega) \leq \frac{\rho(z, \alpha) + \rho(\alpha, \omega)}{1 + \rho(z, \alpha)\rho(\alpha, \omega)}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{D}$.

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{D}$ y sea

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

el automorfismo del disco que verifica que

$$|\varphi_\alpha(z)| = \rho(\alpha, z) \quad \text{y} \quad \varphi_\alpha(z) = \varphi_\alpha^{-1}(z).$$

Observemos que, entonces, para cualesquiera $z, \omega \in \mathbb{D}$,

$$(7) \quad \varphi_\alpha(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad \rho(z, \omega) = \rho(\varphi_\alpha(z), \varphi_\alpha(\omega)).$$

Así pues, nos es suficiente ver que la desigualdad triangular anterior se satisface para $z, \omega \in \mathbb{D}$ y $\alpha = 0$, ya que entonces, si $\alpha \neq 0$,

$$\rho(z, \omega) = \rho(\varphi_\alpha(z), \varphi_\alpha(\omega)) \leq \frac{\rho(\varphi_\alpha(z), 0) + \rho(0, \varphi_\alpha(\omega))}{1 + \rho(\varphi_\alpha(z), 0)\rho(0, \varphi_\alpha(\omega))} = \frac{\rho(z, \alpha) + \rho(\alpha, \omega)}{1 + \rho(z, \alpha)\rho(\alpha, \omega)}.$$

Así pues, consideremos $|z| = a$, $|\omega| = b$ y sea $\theta = \arg(\bar{z}\omega)$. Entonces, la desigualdad triangular fuerte para estos valores es equivalente a

$$\frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta)}{1 + a^2b^2 - 2ab \cos(\theta)} \leq \frac{(a + b)^2}{(1 + ab)^2}.$$

Reescribiendo la parte izquierda de la desigualdad anterior, tenemos que

$$\frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta)}{1 + a^2b^2 - 2ab \cos(\theta)} = 1 - \frac{(1 - a^2)(1 - b^2)}{1 + a^2b^2 - 2ab \cos(\theta)} \leq 1 - \frac{(1 - a^2)(1 - b^2)}{1 + a^2b^2 + 2ab} = \frac{(a + b)^2}{(1 + ab)^2},$$

de lo que se sigue la desigualdad esperada. ■

Observemos que de la desigualdad triangular fuerte se sigue que, para todo $z, \omega, \alpha \in \mathbb{D}$,

$$\rho(z, \omega) \leq \rho(z, \alpha) + \rho(\alpha, \omega),$$

por lo que tenemos que ρ es una distancia. El siguiente lema será necesario para la prueba de la caracterización y se trata de un lema de recubrimiento del disco unidad por discos pseudohiperbólicos.

Lema 16 (Lema de recubrimiento 2). *Dado $r \in (0, 1)$, existe una secuencia de puntos $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ tales que $\mathbb{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta(\alpha_n, r)$. Además, para todo $s \in (0, 1)$ tenemos que cada punto $z \in \mathbb{D}$ pertenece a lo sumo a $N = N(s, r)$ discos $\Delta(\alpha_n, s)$.*

Demostración. Sea $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de discos pseudohiperbólicos de radio $r/3$ tales que $\mathbb{D} = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Cogemos $D_1 = B_1$, $D_2 = B_{j_2}$, donde j_2 es el primer número natural tal que $D_1 \cap B_{j_2} = \emptyset$, y vamos eligiendo los discos $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de forma recursiva. Sea $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ el centro pseudohiperbólico de $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Queremos ver que $\mathbb{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta(\alpha_n, r)$. Para probar esa igualdad, vamos a considerar que existe un punto $\alpha \in \mathbb{D} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta(\alpha_n, r)$ y llegaremos a una contradicción. Si existe este punto, entonces tenemos que

- (a) $\Delta(\alpha, 2r/3) \cap \Delta(\alpha_n, r/3) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y
- (b) existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \in B_{j_0}$; por lo tanto, $B_{j_0} \subset \Delta(\alpha, 2r/3)$.

En particular, tenemos que $B_{j_0} \notin (D_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pero de (a) y (b) se sigue que $B_{j_0} \cap D_n = \emptyset$ para todo n , lo cual nos da una contradicción y, por lo tanto, $\mathbb{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta(\alpha_n, r)$.

Ahora vamos a ver la segunda parte. Sean $s \in (0, 1)$ y $z \in \mathbb{D}$. Definimos el conjunto

$$E(z) = \{\alpha_k \in \mathbb{D} : \varphi_z(\alpha_k) \in \Delta(0, s) = D(0, s)\},$$

donde

$$(8) \quad \varphi_z(\omega) = \frac{z - \omega}{1 - \bar{z}\omega}$$

es el automorfismo del disco que verifica que

$$|\varphi_z(\alpha_k)| < s \iff \rho(\alpha_k, z) < s.$$

Sean $\alpha_k, \alpha_j \in E(z)$ y denotemos $\omega_k = \varphi_z(\alpha_k)$ y $\omega_j = \varphi_z(\alpha_j)$. Observemos que, entonces,

$$\rho(\omega_k, \omega_j) = \rho(\alpha_k, \alpha_j) \geq \frac{2r}{3}$$

y, como $|\omega_k| \leq s$, tenemos que

$$\rho(\omega_k, \omega_j) = \frac{|\omega_k - \omega_j|}{|1 - \bar{\omega}_k \omega_j|} \leq \frac{|\omega_k - \omega_j|}{1 - s^2},$$

de donde concluimos que $|\omega_k - \omega_j| \geq 2r(1 - s^2)/3$ y que los discos

$$D_k = D\left(\omega_k, \frac{r(1 - s^2)}{3}\right) = D\left(\varphi_z(\alpha_k), \frac{r(1 - s^2)}{3}\right)$$

son disjuntos. Así pues, para cada $\alpha_k \in E(z)$ existe un disco D_k tal que si cogemos otro centro pseudohiperbólico $\alpha_j \in E(z)$, tenemos que $D_k \cap D_j = \emptyset$. Ahora bien, sea $\zeta \in D_k$. Tenemos que

$$|\zeta| \leq |\omega_k| + |\zeta - \omega_k| < s + \frac{r(1 - s^2)}{3} \leq 1.$$

Usando esta cota obtenemos que

$$\#(E(z)) \left[\pi \frac{r^2(1 - s^2)^2}{9} \right] = \sum_{\alpha_k \in E(z)} |D_k| \leq |D(0, 1)| \leq \pi,$$

por lo que

$$\#(E(z)) \leq \frac{9}{r^2(1 - s^2)^2},$$

donde vemos que, efectivamente, la cota de $\#(E(z))$ depende únicamente de r y s y, por consiguiente, $\#(E(z)) \leq N(s, r)$. ■

Para la caracterización necesitaremos también el siguiente lema. Recordemos que, si f es una función holomorfa en \mathbb{D} , entonces, para $0 < p < \infty$, tenemos que $|f|^p$ es subarmónica en \mathbb{D} , luego para todo $0 < s < 1$ tenemos que

$$|f(0)|^p \leq \frac{1}{s^2} \int_{D(0,s)} |f(\zeta)|^p dA(\zeta).$$

Esta desigualdad puede reformularse en términos de los discos hiperbólicos como sigue.

Lema 17. Sean $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$, $0 < s < 1$. Entonces, existe una constante $c(s, \alpha)$ de manera que

$$|f(a)|^p \leq \frac{c(s, \alpha)}{(1 - |a|^2)^{2+\alpha}} \int_{\Delta(a,s)} |f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|^2)^\alpha dA(\zeta), \quad a \in \mathbb{D}.$$

Demostración. Sea $a \in \mathbb{D}$. Definimos $\varphi_a \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ como en (8). Por la subarmonicidad de $|f|^p$, tenemos que

$$\begin{aligned} |f(a)|^p &= |f \circ \varphi_a(0)|^p \leq \frac{1}{s^2} \int_{\Delta(0,s)} |f \circ \varphi_a(\zeta)|^p dA(\zeta) = \frac{c(s)}{s^2} \int_{\Delta(a,s)} |f(\zeta)|^p |\varphi_a'(\zeta)|^2 dA(\zeta) \\ &= \frac{c(s)}{s^2} \int_{\Delta(a,s)} |f(\zeta)|^p \frac{(1-|a|^2)^2}{|1-\bar{a}\zeta|^4} dA(\zeta), \end{aligned}$$

donde hemos hecho el cambio de variable $\zeta = \varphi_a(\xi) = \varphi_a^{-1}(\xi)$. Como $\xi \in \Delta(a, s)$, se tiene que $1 - |a|^2 \asymp |1 - \bar{a}\zeta|$, por lo que se sigue la desigualdad

$$|f(a)|^p \leq \frac{c(s)}{(1-|a|^2)^2} \int_{\Delta(a,s)} |f(\zeta)|^p dA(\zeta).$$

Finalmente, nótese que también tenemos que $1 - |a|^2 \asymp 1 - |\zeta|^2$, lo que implica que

$$|f(a)|^p \leq \frac{c(s, \alpha)}{(1-|a|^2)^2} \int_{\Delta(a,s)} |f(\zeta)|^p \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-|a|^2)^\alpha} dA(\zeta). \quad \blacksquare$$

Pasemos a demostrar la caracterización de las q -medidas de Carleson en los espacios A_α^p . El resto de casos se pueden encontrar en los libros que aparecen en las referencias.

Teorema 18. Sean $0 < p \leq q < \infty$, $\alpha > -1$ y μ una medida de Borel positiva en \mathbb{D} . Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

- (i) μ es una q -medida de Carleson para A_α^p .
- (ii) Para todo $r \in (0, 1)$ tenemos que

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} \frac{\mu(\Delta(a, r))}{(1-|a|^2)^{(2+\alpha)q/p}} < \infty.$$

- (iii) Existe $r \in (0, 1)$ tal que

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} \frac{\mu(\Delta(a, r))}{(1-|a|^2)^{(2+\alpha)q/p}} < \infty.$$

- (iv) Si $S(a)$ es la caja de Carleson asociada a $a \in \mathbb{D}$, entonces

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} \frac{\mu(S(a))}{(1-|a|^2)^{(2+\alpha)q/p}} < \infty.$$

Observación 19. La condición (iv) se puede reformular como sigue:

$$\sup_{I \subset \mathbb{T}} \frac{\mu(S(I))}{|I|^{(2+\alpha)q/p}} < \infty. \quad \blacktriangleleft$$

Demostración. Empezamos por demostrar que (i) \Rightarrow (ii). Nótese que el esquema es análogo al realizado en la prueba de la implicación (ii) \Rightarrow (iii) del teorema 13, pero ahora tomando el núcleo reproductor normalizado de A_α^2

$$k_a(z) = \frac{(1-|a|^2)^{(2+\alpha)/2}}{(1-\bar{a}z)^{2+\alpha}}, \quad a, z \in \mathbb{D},$$

el cual tiene norma 1 en A_α^2 y no tiene ceros. Podemos ver que la función $f_a(z) = (k_a(z))^{2/p}$ es holomorfa en el disco unidad y que también tiene norma A_α^p igual a 1, así que podemos aplicar nuestra hipótesis de que μ es una q -medida de Carleson y que, dado $r \in (0, 1)$, entonces $\Delta(a, r) \subset \mathbb{D}$, para así obtener que

$$\begin{aligned} 1 &= \|f_a\|_{A_\alpha^p} \gtrsim \|f_a\|_{L^q} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f_a(z)|^q d\mu(z) \right)^{1/q} = \left(\int_{\mathbb{D}} |k_a(z)|^{2q/p} d\mu(z) \right)^{1/q} \\ &\gtrsim \left(\int_{\Delta(a,r)} |k_a(z)|^{2q/p} d\mu(z) \right)^{1/q} \gtrsim \frac{1}{(1-|a|^2)^{(2+\alpha)/p}} \left(\int_{\Delta(a,r)} d\mu(z) \right)^{1/q} \asymp \frac{\mu(\Delta(a, r))^{1/q}}{(1-|a|^2)^{(2+\alpha)/p}}. \end{aligned}$$

Esto nos da la cota

$$\frac{\mu(\Delta(a, r))}{(1 - |a|^2)^{(2+\alpha)q/p}} < C,$$

donde C no depende de a . Tomando el supremo sobre $a \in \mathbb{D}$, obtenemos para $r \in (0, 1)$ que

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} \frac{\mu(\Delta(a, r))}{(1 - |a|^2)^{(2+\alpha)q/p}} < \infty.$$

Para ver que (i) \Rightarrow (iv) podemos usar exactamente el mismo proceso que para ver que (i) \Rightarrow (ii) cambiando $\Delta(a, r)$ por la caja de Carleson $S(a)$, y llegamos a la desigualdad

$$\frac{\mu(S(a))}{(1 - |a|^2)^{(2+\alpha)q/p}} < C;$$

como la constante no depende de a , podemos poner supremos sobre $a \in \mathbb{D}$, obteniendo así el resultado deseado.

La condición (ii) \Rightarrow (iii) es trivial. Veamos que (iii) \Rightarrow (i), es decir, queremos ver que la condición

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} \frac{\mu(\Delta(a, r))}{(1 - |a|^2)^{(2+\alpha)q/p}} < \infty$$

para algún $0 < r < 1$ implica que μ es una q -medida de Carleson para A_α^p . Sea $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión generada en el lema 16 para r . Entonces,

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^q d\mu(z) = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta(\alpha_n, r)} |f(z)|^q d\mu(z) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta(\alpha_n, r)} |f(z)|^q d\mu(z) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f(\tilde{z}_n)|^q \mu(\Delta(\alpha_n, r)),$$

donde $\tilde{z}_k \in \overline{\Delta(\alpha_k, r)}$ y

$$|f(\tilde{z}_n)| = \max_{z \in \Delta(\alpha_n, r)} |f(z)|.$$

Nótese que este máximo está bien definido ya que ningún disco cerrado toca la frontera del disco unidad. Esto se debe a que, si algún punto se encuentra en la frontera, entonces $\rho(\alpha_n, z) = 1$, lo cual es imposible porque suponemos que $r < 1$. Tomemos $s \in (0, 1)$ tal que $s < (1 - r)/2$ y, usando el lema 17, obtenemos que, para $\alpha > -1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (|f(\tilde{z}_n)|^p \mu(\Delta(\alpha_n, r))^{p/q})^{q/p} &\lesssim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mu(\Delta(\alpha_n, r))^{p/q}}{(1 - |\tilde{z}_n|^2)^{\alpha+2}} \int_{\Delta(\tilde{z}_n, s)} |f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|^2)^\alpha dA(\zeta) \right)^{q/p} \\ &\lesssim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1 - |\alpha_n|^2)^{\alpha+2}}{(1 - |\tilde{z}_n|^2)^{\alpha+2}} \int_{\Delta(\tilde{z}_n, \frac{1+r}{2})} |f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|^2)^\alpha dA(\zeta) \right)^{q/p} \\ &\lesssim \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta(\alpha_n, \frac{1+r}{2})} |f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|^2)^\alpha dA(\zeta) \right)^{q/p} \\ &\simeq \left(\int_{\mathbb{D}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\Delta(\alpha_n, \frac{1+r}{2})}(\zeta) \right) |f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|^2)^\alpha dA(\zeta) \right)^{q/p} \lesssim N(r, s)^{q/p} \|f\|_{A_\alpha^p}^q. \end{aligned}$$

Para acabar, veamos que (iv) \Rightarrow (iii). Sea $a \in \mathbb{D}$ tal que $|a| > 1/3$. Escogemos $r < (1 - |a|)/4$. Entonces, tenemos que

$$\Delta(a, r) \subset D\left(a, \frac{1}{2}(1 - |a|)\right) \subset S(a^*), \quad a^* = \frac{3|a| - 1}{2} e^{i \arg(a)}.$$

Finalmente, por hipótesis,

$$\mu(\Delta(a, r)) \leq \mu(S(a^*)) \leq C(1 - |a^*|^2)^{(2+\alpha)q/p} \leq C\left(\frac{9}{2}\right)^{(2+\alpha)q/p} (1 - |a|^2)^{(2+\alpha)q/p}. \quad \blacksquare$$

Referencias

- [1] BERNARD, Calista. «Interpolation Theorems and Applications». En: *Chicago, IL: University of Chicago Mathematics REU* (2013).
- [2] BRUNA, Joaquim y CUFÍ, Julià. *Complex analysis*. EMS Textbooks in Mathematics. Translated from the Catalan by Ignacio Monreal. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2013. <https://doi.org/10.4171/111>.
- [3] CARLESON, Lennart. «An interpolation problem for bounded analytic functions». En: *American Journal of Mathematics* 80 (1958), págs. 921-930. issn: 0002-9327. <https://doi.org/10.2307/2372840>.
- [4] CARLESON, Lennart. «Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem». En: *Annals of Mathematics. Second Series* 76 (1962), págs. 547-559. issn: 0003-486X. <https://doi.org/10.2307/1970375>.
- [5] CONWAY, John B. *Functions of one complex variable*. Second. Graduate Texts in Mathematics 11. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978. isbn: 978-0-387-90328-6.
- [6] DUREN, Peter. *Theory of H^p spaces*. Pure and Applied Mathematics 38. Academic Press, New York-London, 1970.
- [7] DUREN, Peter y SCHUSTER, Alexander. *Bergman spaces*. Mathematical Surveys and Monographs 100. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. <https://doi.org/10.1090/surv/100>.
- [8] FEFFERMAN, Charles y STEIN, Elias M. « H^p spaces of several variables». En: *Acta Mathematica* 129.3-4 (1972), págs. 137-193. issn: 0001-5962. <https://doi.org/10.1007/BF02392215>.
- [9] HEDENMALM, Håkan; KORENBLUM, Boris, y ZHU, Kehe. *Theory of Bergman spaces*. Graduate Texts in Mathematics 199. Springer-Verlag, New York, 2000. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0497-8>.
- [10] HÖRMANDER, Lars. « L^p estimates for (pluri-) subharmonic functions». En: *Mathematica Scandinavica* 20 (1967), págs. 65-78. issn: 0025-5521. <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10821>.
- [11] JONES, Peter W. «Carleson measures and the Fefferman-Stein decomposition of $BMO(\mathbb{R})$ ». En: *Annals of Mathematics. Second Series* 111.1 (1980), págs. 197-208. issn: 0003-486X. <https://doi.org/10.2307/1971197>.
- [12] JONES, Peter W. « L^∞ estimates for the $\bar{\partial}$ problem in a half-plane». En: *Acta Mathematica* 150.1-2 (1983), págs. 137-152. issn: 0001-5962. <https://doi.org/10.1007/BF02392970>.
- [13] KOOSIS, Paul. *Introduction to H_p spaces*. Second. Cambridge Tracts in Mathematics 115. With two appendices by V. P. Havin [Viktor Petrovich Khavin]. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. isbn: 978-0-521-45521-3.
- [14] PAVLOVIĆ, Miroslav. *Function classes on the unit disc*. De Gruyter Studies in Mathematics 52. An introduction. De Gruyter, Berlin, 2014. isbn: 978-3-11-028123-1; 978-3-11-028190-3.
- [15] PELÁEZ, José Ángel y RÄTTYÄ, Jouni. «Weighted Bergman spaces induced by rapidly increasing weights». En: *Memoirs of the American Mathematical Society* 227.1066 (2014), págs. vi+124. issn: 0065-9266.
- [16] RUDIN, Walter. *Function theory in the unit ball of C^n* . Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science] 241. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980. isbn: 978-0-387-90514-3.
- [17] RUDIN, Walter. *Real and complex analysis*. Third. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. isbn: 978-0-07-054234-1.
- [18] SCHEIDEMANN, Volker. *Introduction to complex analysis in several variables*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. <https://doi.org/10.1007/3-7643-7491-8>.