

TEMat

Análisis de señales complejas: correlaciones de largo alcance y propiedades multifractales

✉ Alberto Martín Aguilar
Universidad de Málaga
alberto_martin93@hotmail.com

Resumen: Muchos sistemas dinámicos no lineales, naturales y artificiales, exhiben como salida observable series temporales complejas que reflejan las propiedades de la dinámica subyacente, que normalmente no se conoce explícitamente. Por lo tanto, el análisis adecuado de estas señales es fundamental para la caracterización de los sistemas que las originan.

En general, las series suelen ser no estacionarias, exhiben correlaciones de largo alcance, y también presentan propiedades fractales o multifractales. En este trabajo, presentamos herramientas recientes para el estudio de este tipo de señales y las aplicamos para caracterizar señales complejas naturales (señales de variaciones de temperatura en el océano) y artificiales (índices bursátiles de distintas compañías españolas e internacionales).

Abstract: Many non-linear dynamical systems, both natural and artificial, exhibit complex time series as observable output. These series reflect the properties of the underlying dynamics, which are not usually explicitly known. Therefore, an adequate analysis of these signals is fundamental for the characterization of the systems that originate them.

In general, the series are usually non-stationary, present long-range correlations, and also satisfy fractal or multifractal properties. In this work, we present recent tools for the study of this type of signals and we apply them to characterize both natural complex signals (time series of pressure variations in the ocean) and artificial signals (stock indices of different Spanish and international companies).

Palabras clave: señal, fractales, DFA, multifractal.

MSC2010: 62M10, 28A80.

Recibido: 21 de febrero de 2019.

Aceptado: 28 de noviembre de 2019.

Agradecimientos: Quisiera agradecer a mi familia y amigos su apoyo durante todos estos años de estudio y su dedicación a la hora de aconsejarme y motivarme.

Igualmente, quisiera agradecer a los profesores que me han guiado durante todos estos años, y a Pedro J. Carpena Sánchez y Manuel Gómez Extremera, de la Universidad de Málaga, en particular, por su ayuda con este trabajo.

Referencia: MARTÍN AGUILAR, Alberto. «Análisis de señales complejas: correlaciones de largo alcance y propiedades multifractales». En: *TEMat*, 4 (2020), págs. 83-99. ISSN: 2530-9633. URL: <https://temat.es/articulo/2020-p83>.

1. Introducción

En este trabajo se pretende estudiar la dinámica subyacente de algunas de las series temporales presentes en los mercados financieros, así como otras series temporales en la naturaleza. Esto es debido a la habitual presencia en la naturaleza de series temporales que pueden parecer aleatorias, pero que, sin embargo, esconden una dinámica compleja (por ejemplo, los sistemas fisiológicos, como el cardíaco, o el cerebral; el clima; los mercados financieros; etc.), que se refleja en la presencia de correlaciones de largo alcance o propiedades fractales [1, 19-22].

Muchos sistemas dinámicos producen como salida series no estacionarias y, por lo tanto, son difíciles de analizar con métodos tradicionales. Como conocemos, la función de autocorrelación es únicamente aplicable a series estacionarias, dando como resultado un correlograma, el cual refleja las correlaciones de largo alcance en la serie, en el caso de haberlas. Sin embargo, la función de autocorrelación no puede ser aplicada a series no estacionarias, ya que el resultado nos produce un correlograma plano, que no aporta ningún tipo de información. Además, la función de autocorrelación es muy sensible al tamaño de las series estacionarias. Por lo tanto, es necesario recurrir a otros métodos que puedan ser utilizados en todo tipo de series.

En este trabajo, se presenta el método de análisis de fluctuaciones sin tendencia (DFA, del inglés), que estudia cómo se comportan las fluctuaciones de la señal (el momento de orden 2) en función de la escala de observación de esta, originariamente introducido por Peng *et al.* [21]. Si las fluctuaciones escalan en ley de potencias, el DFA proporciona como resultado un exponente, el cual determinará la existencia o no de correlaciones de largo alcance en la serie temporal. Igualmente, este método es generalizado mediante el DFA multifractal (MF-DFA), el cual utiliza otros momentos de las fluctuaciones para estudiar más en profundidad la serie a analizar. De esta forma, cuantificamos las correlaciones de una serie y obtenemos propiedades fractales en esta, en el caso de estar presentes. Se puede encontrar más información en el trabajo de Martín Aguilar [18], donde se han estudiado otros aspectos como la influencia de la longitud de la serie o el estudio de la función de autocorrelación en las series de módulo y signo

2. Fractales

El concepto de conjunto fractal, dado a conocer por B. Mandelbrot, fue creado para dar cabida en la estructura formal de la geometría a diversos objetos, denominados entonces *monstruos geométricos*, cuyo comportamiento se apartaba radicalmente del mostrado por los conjuntos que estaban en la base conceptual de esta disciplina. Pese a sus inicios en el ámbito estricto de las matemáticas, los fractales han traspasado ampliamente las fronteras de lo abstracto para servir de modelos en múltiples campos de la ciencia [4, 15, 22].

Las propiedades que presentan frente a cambios de escala fueron utilizadas, por ejemplo, por Gutenberg y Richter para establecer su ley de distribución de intensidades de terremotos, y por Richardson para establecer que los perfiles costeros poseían propiedades similares a algunas de las curvas de von Koch. La hidrología, la geografía, la geofísica, la ecología y la economía han sido campos pioneros en el desarrollo de modelos basados en los fractales. Los éxitos en estos campos y, a veces quizás, la imposibilidad de encontrar otro ámbito más adecuado han conducido, por un lado, a una considerable ampliación de los campos de aplicación y, por otro, a incrementar enormemente la base teórica en la que se apoyan.

Un primer ejemplo de un conjunto fractal (véase el libro de Feder [11]) se encuentra en el intento de medir la longitud de la costa de Noruega. Para responder a esta pregunta, tenemos que tener en cuenta que en la costa nos encontramos con salientes de ríos, islas, valles, etc. Esto escapa de la geometría usual y se tienen que emplear técnicas diferentes para establecer la longitud de esta.

Un primer intento para medir la costa de Noruega podría ser medir el número de pasos de longitud δ que se dan, $N(\delta)$, y ver la distancia total desde un extremo de la costa al otro, $L = N(\delta) \times \delta$. Este proceso podría ser repetido numerosas veces con diferente longitud δ .

Sin embargo, este proceso tiene numerosos problemas teniendo en cuenta a las islas o a los salientes y entrantes de los ríos. Por ello, otro segundo método sería dividir la costa en cuadrados, con lado de longitud δ . La longitud de la costa de Noruega es bien conocida, es por ello que el resultado no debería

depender del método empleado. Mediante este segundo proceso, parecido al anterior, si disminuimos δ , se podría esperar un incremento proporcional al número de cuadrados necesarios para cubrir toda la costa, para así tender el resultado a la longitud real. Sin embargo, este no es el caso, ya que al disminuir la longitud δ , la distancia aumenta según una línea recta, escribiendo en escala logarítmica ambos ejes.

Si se realiza una regresión lineal en este ejemplo, vemos que la recta se puede aproximar mediante

$$L(\delta) = a\delta^{1-D},$$

con $D > 1$, al cual llamaremos **dimensión fractal**. Como este, hay numerosos ejemplos estudiados, como la costa de Inglaterra por Mandelbrot, la costa de Australia, etc. Fórmulas del tipo

$$y = ax^b$$

son las denominadas **leyes de potencias**. Para una introducción más formal del concepto de fractal, sería necesario introducir también conceptos como la dimensión de Hausdorff. Sin embargo, este aspecto se aleja del contenido de este trabajo, y se puede consultar en el libro de Feder [11].

Definición 1. Se dice que un objeto geométrico es **fractal** si su forma no varía independientemente de la escala mediante la cual se observe. ◀

La anterior definición es general y se aplica a todos los ámbitos donde se utilicen los fractales. Sin embargo, en la estadística en concreto, no se comprueba de dicha forma, ya que las series temporales no pueden llegar a ser iguales a diferente escala. Por ello, una serie temporal fractal se considera autosimilar cuando el «aumento» de una parte es equivalente al total, comparando propiedades estadísticas y no geométricas.

El concepto de proceso autosimilar fue introducido por Kolmogorov en 1941. Sin embargo, la definición era tan teórica que no fue tomada en cuenta hasta 1969, cuando Mandelbrot la introdujo en la estadística. Así, decimos que un cuerpo geométrico es autosimilar si observamos la misma estructura geométrica independientemente de la distancia a la cual miramos el cuerpo.

Definición 2. Decimos que un cuerpo geométrico es **autosimilar** si se puede escribir como unión de copias redimensionadas de sí mismo, siendo el redimensionamiento uniforme en todas las direcciones del cuerpo. ◀

Sin embargo, los sistemas presentes en la naturaleza son más complejos y requieren de una teoría más extensa de fractales. Esto se debe a que posiblemente no haya un único exponente en el conjunto, y este presente diversos fractales entrelazados, con diferentes dimensiones fractales. Esto nos deriva en la necesidad de introducir el concepto de *conjunto multifractal*, a diferencia de los que tienen un único exponente, que se denominarán *conjuntos monofractales*.

2.1. Multifractales

El objetivo de introducir el concepto de multifractal es el incluir en el esquema a conjuntos aún más complejos, que presentan leyes de escalado múltiples. Pueden encontrarse aplicaciones físicas de estos objetos en campos como la física de altas energías, la meteorología, las ciencias medioambientales y otros muchos en los que actualmente se trabaja activamente con ellos.

Este concepto fue inicialmente introducido por Mandelbrot dentro del contexto del estudio de la turbulencia y fue desarrollado y extendido por él mismo a muchos otros campos. No será desarrollada toda la teoría presentada en su momento, ya que difiere del tema de estudio del modelo que presentaremos en la siguiente sección. Se puede consultar el desarrollo completo en la tesis de Faleiro [10] y el libro de Feder [11].

La idea principal del concepto multifractal es la posibilidad de encontrar diferentes escalados en un mismo conjunto. Es decir, supongamos que tenemos un conjunto con dimensión fractal D , y lo podemos dividir en diferentes subconjuntos fractales

$$S = \bigcup_{\alpha} S_{\alpha},$$

donde cada uno de los S_α tendrá dimensión fractal $f(\alpha) \leq D$. Con esto, en el capítulo 6 del libro de Feder [11] se presenta que la medida μ_α en una celda de tamaño λ sigue una ley de potencias anteriormente descrita, es decir, $\mu_\alpha = \delta^\alpha$, y, por tanto, la medida M del conjunto S satisface la siguiente igualdad:

$$M_d(q, \delta) = \int \rho(\alpha) d\alpha \delta^{-f(\alpha)} \delta^{\alpha q} \delta^d = \int \rho(\alpha) d\alpha \delta^{q\alpha - f(\alpha) + d},$$

donde $\rho(\alpha) d\alpha$ es el número de conjuntos entre S_α y $S_{\alpha+d\alpha}$. De aquí se obtiene que, asintóticamente, la integral es finita si se cumple que d es igual a $\tau(q)$, donde

$$\tau(q) = f(\alpha(q)) - q\alpha(q),$$

siendo $\alpha(q)$ la solución de

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \{q\alpha - f(\alpha)\} \right|_{\alpha=\alpha(q)} = 0.$$

Finalmente, haciendo uso de la transformada de Legendre, se define como espectro multifractal a la representación de las siguientes unidades en los correspondientes ejes:

$$\beta(q) = \frac{d}{dq} \tau(q),$$

$$f(\alpha(q)) = q\beta(q) - \tau(q),$$

donde $f(\beta(q))$ representa la dimensión fractal para cada uno de los momentos q . Esta gráfica nos permitirá identificar la presencia de multifractalidad. Así, si el análisis resulta en un espectro multifractal de una gran amplitud, esto nos revela que existe multifractalidad en la serie, al haber más exponentes de escalado distinto. En el caso de obtener un espectro de poca amplitud, la serie sería considerada monofractal.

Concretamente, estas fórmulas anteriores serán utilizadas en el modelo considerado en este trabajo para calcular el espectro multifractal de las series temporales analizadas. De esta forma, se estudiará la dinámica de estas y la complejidad presente. La interpretación de los parámetros anteriores se puede consultar en el libro de Feder [11, capítulo 6].

3. Series temporales

Para describir el mecanismo que genera una determinada serie, tenemos que suponer que existe una variable aleatoria subyacente para cada instante de tiempo. Es decir, la existencia de un proceso estocástico.

Definición 3. Un **proceso estocástico** es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$, ordenadas según el subíndice t que, en general, se suele identificar con el tiempo. ◀

Con esto, ya se puede establecer el concepto de serie temporal.

Definición 4. Una **serie temporal** es una realización de un proceso estocástico $\{X_t : t \in T\}$. ◀

Para cada una de las variables aleatorias del proceso estocástico, podemos definir una función de probabilidad con una función de densidad asociada. Por tanto, cada variable aleatoria tiene una media, una varianza y covarianza para estudiar la dependencia (o independencia) de las observaciones entre sí. Sin embargo, se suele utilizar en mayor medida la denominada función de correlación, definida como

$$\rho_{ij} = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{Var}(X_i) \text{Var}(X_j)}}.$$

Una de las propiedades deseadas es la regularidad en el tiempo.

Definición 5. Se dice que un proceso estocástico $\{X_t : t \in T\}$ es **fuertemente estacionario** si la función de distribución multivariante de $\{X_i, X_{i+1}, X_{i+2}, \dots, X_{i+k-1}\}$ es idéntica a la función de distribución de $\{X_j, X_{j+1}, X_{j+2}, \dots, X_{j+k-1}\}$, para todo i, j y para todo $k > 0$. ◀

Sin embargo, este concepto es muy restrictivo si se trabaja con series reales, ya que esto es difícil de obtener. En lugar de pedir la estacionariedad fuerte, se establece el concepto de estacionariedad débil.

Definición 6. Se dice que un proceso estocástico $\{X_t : t \in T\}$ es **débilmente estacionario** si satisface las siguientes condiciones:

- $E(X_t) = \mu$, para todo $t \in T$;
- $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$, para todo $t \in T$;
- $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$, para todo $t \in T$.

A partir de ahora, se dirá que el proceso es estacionario refiriéndose a un proceso con estacionariedad débil.

Un caso particular de la función de correlación es la función de autocorrelación, la cual estudia la dependencia o independencia de una señal consigo misma tras haberla desplazado k posiciones. Nótese que esta únicamente tiene sentido para procesos estocásticos estacionarios, siendo este el principal motivo del desarrollo de este trabajo. Se define la función de autocorrelación como

$$\rho(k) = \frac{\text{Cov}(X_i, X_{i+k})}{\sqrt{\text{Var}(X_i) \text{Var}(X_{i+k})}}.$$

Una vez introducido el concepto de estacionariedad, podemos definir el concepto de ruido blanco.

Definición 7. Decimos que un proceso estocástico es un **ruido blanco** si cumple la siguientes condiciones:

- Es estacionario.
- Es incorrelado (tiene correlación 0 entre sus observaciones).
- Tiene media cero.

Definición 8. Decimos que un proceso estocástico es un ruido blanco **estricto** si cumplen las siguientes condiciones:

- Las observaciones tienen la misma distribución.
- Las observaciones son independientes.
- Tiene media cero.

El concepto de estacionariedad definido anteriormente puede ser aplicado igualmente a los incrementos de un proceso.

Definición 9. Decimos que $\{X_t : t \in T\}$ tiene incrementos estacionarios si, para cualquier $k \geq 1$ y para cualesquiera k puntos t_1, \dots, t_k , la distribución de

$$(X_{t_1+c} - X_{t_1+c-1}, \dots, X_{t_k+c} - X_{t_k+c-1})$$

no depende de $c \in \mathbb{R}$.

4. Series temporales con propiedades fractales

Introduciremos los conceptos de ruido fraccionario gaussiano y movimiento fraccionario browniano. Los procesos estocásticos de este tipo poseen las propiedades fractales presentadas en la primera sección, y se supondrá que este tipo de procesos son capaces de modelar series temporales que presenten esta estructura fractal.

Definición 10. Sea $\{X_t : t \in T\}$ un proceso estocástico estacionario. Se dice que X_t es un proceso estacionario con larga memoria, o dependencia de largo alcance, o un proceso estacionario de correlaciones de largo alcance, si existen un número $\alpha \in (0, 1)$ y una constante $c_p > 0$ tales que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho(k)}{c_p k^{-\alpha}} = 1.$$

En el caso de procesos estocásticos, la autosimilitud no se define como vimos en la primera sección, ya que este era un concepto determinista. Las series temporales llevan implícita una aleatoriedad, lo que hace que nos fijemos en la distribución del proceso.

Definición 11. Sea $\{X_t : t \in T\}$ un proceso estocástico. Decimos que $\{X_t : t \in T\}$ es autosimilar con parámetro de autosimilitud $H > 0$ si, para cada número $c > 0$, el proceso reescalado con escala temporal ct , $c^{-H}X_{ct}$, tiene la misma distribución que el proceso X_t . ◀

Esto quiere decir que, para cualesquiera momentos en el tiempo t_1, \dots, t_k y cualquier constante $c > 0$, tenemos que la distribución de $c^{-H}(X_{ct_1}, X_{ct_2}, \dots, X_{ct_k})$ es la misma que la distribución de $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$. Con estos conceptos [2, 16], la correlación de proceso estocástico autosimilar es de la forma siguiente, dependiente del exponente H :

$$(1) \quad \rho(k) = \frac{1}{2} [(k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H}].$$

Para estudiar el comportamiento asintótico de $\rho(k)$, utilizamos el desarrollo de Taylor, obteniendo que

$$(2) \quad \rho(k) \simeq H(2H-1)k^{2H-2} = \frac{H(2H-1)}{k^{2-2H}}.$$

Por lo tanto, al ser una ley de potencias, no posee una escala característica, poseyendo así las propiedades fractales. Definimos el exponente de la autocorrelación γ a partir del exponente de caída como

$$\gamma = 2 - 2H,$$

con $\gamma \in (0, 2)$. Para el caso en que $1/2 < H < 1$, tenemos que la correlación se va a cero y

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k) = \infty,$$

y, por tanto, el proceso tiene correlaciones de largo alcance. Para el caso en que $H = 1/2$, tenemos que las correlaciones son cero y, por tanto, las observaciones X_i son incorreladas. Para el caso en que $0 < H < 1/2$, la suma de las correlaciones es convergente y, además,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k) = 0.$$

Como podemos imaginar, la aleatoriedad está presente en todos los fenómenos que ocurren en la naturaleza. Por lo tanto, sería deseable disponer de las herramientas necesarias para replicar esta aleatoriedad. Una de las técnicas más usadas para reproducir el movimiento (aleatorio) que produce una determinada partícula es el movimiento browniano.

Definición 12. Diremos que un proceso estocástico $\{X_t : t \in T\}$ es un proceso de Wiener o un **movimiento browniano** si cumple las siguientes propiedades:

- $X_0 = 0$.
- X tiene trayectorias continuas (el conjunto de puntos donde X es discontinuo tiene probabilidad cero).
- X tiene incrementos independientes y estacionarios con media 0.
- Para cada $t > 0$, la variable aleatoria X_t sigue una distribución $N(0, t)$. ◀

Supongamos ahora que tenemos un proceso Y_t que es autosimilar con incrementos $X_i = Y_i - Y_{i-1}$ estacionarios. Supongamos que los incrementos tienen media 0 y que cada X_i es una variable aleatoria normal. Por lo tanto, su distribución está totalmente definida por la media y las covarianzas. Se puede demostrar que, para cada $H \in (0, 1)$, existirá un único proceso gaussiano X_t , siendo estos los incrementos estacionarios de un proceso autosimilar Y_t .

Definición 13. Decimos que un proceso estocástico $\{X_t : t \in T\}$ es un ruido fraccionario gaussiano si es un proceso gaussiano y está definido como los incrementos de un proceso autosimilar Y_t . Se denomina movimiento browniano fraccionario al proceso Y_t , y se denota por $B_H(t)$. ◀

Si consideramos el caso $H = 1/2$, tenemos que, por la fórmula (1), las variables son normales e independientes. Es decir, para $H = 1/2$, el proceso es un movimiento browniano. Igualmente, se puede demostrar que, para el caso $H = 1/2$, el proceso es autosimilar. Para los casos $H > 1/2$, podemos observar en la ecuación (2) que las correlaciones son de largo alcance, ya que el exponente del denominador es menor que 1. Para los casos donde $H < 1/2$, tenemos que las correlaciones son de corto alcance, ya que la correlación decae mediante una ley de potencias con exponente mayor que 1.

5. Técnicas de análisis de fluctuaciones

A continuación, se introducirá el método de *análisis de fluctuaciones sin tendencia* (DFA, por sus siglas en inglés), el cual será el modelo central de estudio de las series temporales planteadas. Este estudiará las variaciones existentes en una serie temporal a distintas escalas, logrando un resultado mucho más suavizado y parecido a una ley de potencias que el logrado mediante la función de autocorrelación.

Igualmente, hablaremos del concepto de multifractal, que será utilizado para el estudio de las diferentes dinámicas que pueden estar presentes en una señal. Para ello, se utilizará la teoría presentada anteriormente y se aplicará al caso de las series temporales. De la misma forma, se describirá el algoritmo utilizado. Por último se hablará de un método de generación de series temporales a partir de su espectro de potencias.

5.1. Análisis de fluctuaciones sin tendencia (DFA)

El siguiente método que vamos a presentar es el denominado *detrended fluctuation analysis* (DFA), introducido por Peng *et al.* [21] para el estudio de las correlaciones de largo alcance en las secuencias de las cadenas de ADN. El método DFA es una modificación del FA (*fluctuation analysis*), ya que, en ese caso, se elimina la tendencia de la serie en cada ventana en el tiempo. Por lo tanto, es capaz de eliminar los efectos de la no estacionariedad y es menos sensible al tamaño finito de la serie [3, 6, 16].

Al igual que el FA, en el caso de que la serie escale (es decir, sea invariante frente a cambios de escala) y tenga las propiedades fractales, el método DFA también da como resultado un exponente que refleja las propiedades de escalado (es decir, autosimilitud) y las correlaciones de largo alcance de la serie analizada, en el caso de que la serie posea el escalado correspondiente. Por lo tanto, el DFA es una técnica de análisis de fluctuaciones (variaciones) que permite calcular de forma directa el exponente de la señal temporal a estudiar.

El algoritmo de aplicación de este método es el siguiente:

Paso 1: Supongamos que queremos analizar la serie X_t , con $t = 1, \dots, N$. En primer lugar, calculamos la media de las observaciones,

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t.$$

Paso 2: Una vez tenemos la media de la serie completa, calculamos la serie acumulada (o integrada), pero substrayendo la media en cada una de las observaciones:

$$Y_i = \sum_{j=1}^i (X_j - \bar{X}), \quad i = 1, \dots, N.$$

Paso 3: A continuación, se divide la serie integrada en ventanas (subconjuntos ordenados de puntos consecutivos de la serie) de tamaño k . Para cada una de las ventanas, se calcula una regresión lineal con los puntos que están en dicha ventana, lo cual representa la tendencia lineal en la ventana correspondiente:

$$\bar{Y}_c^j(k) = Y_j - y_j(k),$$

donde $y_j(k)$ es el ajuste lineal de los datos para la ventana ℓ . De esta forma, estamos quitándole la tendencia lineal en cada una de las ventanas. Con ese ajuste, eliminamos la tendencia y el ruido que pueda contener la serie a analizar. Tras el ajuste lineal, las variaciones de los residuos serán estudiados posteriormente.

Paso 4: Para cada una de las ventanas de tamaño k , se calcula la raíz cuadrática media de la señal integrada, una vez eliminada la tendencia:

$$F_\ell^2(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \overline{Y_\ell^j(k)}^2.$$

Paso 5: Una vez que se ha realizado el paso 4 para toda la serie, se calcula la media de todos los $F_\ell(k)$ para un determinado tamaño de ventana k :

$$F(k) = \sqrt{\frac{1}{N/k} \sum_{\ell=1}^{N/k} F_\ell^2(k)}.$$

Paso 6: $F(k)$ describe como se comportan las fluctuaciones (momento de orden 2) alrededor de la tendencia local en función de la escala. Si la señal tiene autosimilitud, se obtendrá la relación

$$(3) \quad F(k) \approx ak^\alpha,$$

cuyo exponente α podrá ser calculado llevando a cabo un ajuste lineal de los datos en escala logarítmica,

$$\log(F(k)) \approx c + \alpha \log(k).$$

Para una serie con correlaciones (tanto de largo como de corto alcance), se debe cumplir que la fluctuación escale como una ley de potencias en función del tamaño de ventana (3). En el caso del DFA, la serie temporal presenta anticorrelaciones si $\alpha < 0,5$; es ruidosa o no correlacionada si $\alpha = 0,5$, y presenta correlaciones de largo alcance si $\alpha \in (0,5, 2)$. En particular, para el caso $\alpha = 1,5$, la serie corresponde al movimiento browniano presentado anteriormente.

Este nuevo método de cálculo tiene una relación con la conocida función de autocorrelación. Tal y como señalan Höll y Kantz [16], la relación entre la función de autocorrelación y el exponente DFA viene dada por la siguiente identidad:

$$F^2(s) = \langle x^2 \rangle \left(W(s) + \sum_{r=1}^{s-1} C(r)L_r(s) \right).$$

5.2. DFA multifractal

Como ya comentamos anteriormente, los conjuntos fractales son aquellos conjuntos formados por otros subconjuntos, a su vez igualmente fractales entrelazados, pero con diferente dimensión fractal. En ese caso, se necesita realizar un análisis multifractal de la serie temporal para tener una descripción completa de esta, obteniendo un espectro multifractal que nos revelará la existencia de monofractalidad o multifractalidad en la serie. El análisis que se realizará estará basado en el formalismo presentado en la sección 2, que fue utilizado inicialmente por Kantelhardt *et al.* [17] en el estudio de series complejas. El método es una simple generalización del DFA, cambiando los momentos de las fluctuaciones de la serie. El algoritmo es el siguiente:

Paso 1: Supongamos que queremos analizar la serie X_t , con $t = 1, \dots, N$. En primer lugar, calculamos la media de las observaciones,

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t.$$

Paso 2: Una vez tenemos la media de la serie completa, calculamos la serie acumulada (o integrada), pero substrayendo la media en cada una de las observaciones

$$Y_i = \sum_{j=1}^i (X_j - \bar{X}), \quad i = 1, \dots, N.$$

Paso 3: A continuación, se divide la serie integrada en ventanas de tamaño k . Para cada una de las ventanas, se calcula una regresión lineal con los puntos que están en dicha ventana, lo cual representa la tendencia lineal en la ventana correspondiente:

$$\bar{Y}_\ell^j(k) = Y_j - y_j(k),$$

donde $y_j(k)$ es el ajuste lineal de los datos que están en la ventana ℓ . De esta forma, se quita la tendencia lineal en cada una de las ventanas. Con ese ajuste, nos eliminamos la tendencia y el ruido que pueda contener la serie a analizar.

Paso 4: Para cada una de las ventanas de tamaño k , se calcula la raíz cuadrática media de la señal integrada, una vez eliminada la tendencia:

$$F_\ell(k) = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \bar{Y}_\ell^j(k)^2}.$$

Paso 5: Una vez que se ha realizado el paso 4 anterior para toda la serie, se realiza la media de todos los $F_\ell(k)$ para un determinado tamaño de ventana k y para cada orden q :

$$F_q(k) = \left\{ \frac{1}{N/k} \sum_{\ell=1}^{N/k} [F_\ell^2(k)]^{q/2} \right\}^{1/q},$$

donde, para $q = 2$, tenemos como resultado el exponente resultante de aplicar el método DFA. Una vez realizado este paso, estamos interesados en conocer el comportamiento de $F_q(k)$ con respecto a q . Es por ello que este proceso tiene que ser repetido para cada orden q .

Paso 6: Existirá un escalado y la serie temporal tendrá autosimilitud si encontramos la siguiente relación:

$$F_q(k) \approx ak^{h(q)},$$

donde $h(q)$ se obtiene, para cada q , mediante un ajuste lineal de los datos en escala logarítmica,

$$\log(F_q(k)) \approx c + h(q) \log(k).$$

En general, el exponente $h(q)$ dependerá de q . Para series monofractales, $h(q)$ será independiente de q , ya que el escalado de las fluctuaciones será igual para todos los tamaños de ventana y, por tanto, dará el mismo exponente en todos los órdenes.

Una vez realizado el algoritmo completo, los resultados se suelen presentar de la misma manera que la utilizada en la sección 2. Para ello, para cada $h(q)$ obtenido, calculamos la función

$$(4) \quad \tau(q) = qh(q) - 1.$$

Utilizando, por tanto, el procedimiento presentado en la sección 2, tenemos que el espectro multifractal vendrá dado por

$$\alpha = h(q) + qh'(q), \quad f(\alpha) = q[\alpha - h(q)] + 1,$$

donde $f(\alpha)$ denota la dimensión del subconjunto de la serie caracterizada por α , la cual está relacionada con τ de la ecuación (4) mediante $\alpha = \tau'(q)$.

6. Generación de series temporales con propiedades fractales

Con los métodos anteriores se pueden analizar las diferentes series temporales presentes en la naturaleza. Sin embargo, es necesario comprobar los resultados que se obtienen con series que tienen una dinámica conocida [2]. Dicha comprobación se realiza generando una serie temporal con el mismo exponente DFA, replicando así la dinámica de la serie temporal a analizar y, de esta forma, comparando los espectros multifractales de ambas series aislándolas de todos los efectos exteriores a estas.

Definición 14. Sea $x(t)$ una señal. La transformada de Fourier y la transformada inversa se definen, respectivamente, por las expresiones

$$y(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\xi t} dt, \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\xi)e^{i\xi t} d\xi. \quad \blacktriangleleft$$

Definición 15. Se define la **densidad espectral** (o espectro de potencias) de una señal como la función que representa la distribución de la potencia de la señal en el dominio de frecuencias de esta, calculada mediante la transformada de Fourier de la serie. Se suele denotar por $S(\xi) = |\mathcal{F}(x)|^2$, donde $\mathcal{F}(x)$ es la transformada de Fourier de la señal $x(t)$. \blacktriangleleft

Con esas herramientas, a partir de una señal podemos calcular su espectro de potencias, y viceversa. La idea del siguiente algoritmo es la creación de una señal cuyo espectro de potencias, calculado mediante la transformada de Fourier, sea plano. Con eso, se modificará el espectro de potencias para que adopte la forma que necesitamos para comparar la señal. Una vez realizado este último paso, se calculará la transformada inversa del espectro de potencias modificado para obtener la señal resultante con el espectro multifractal buscado. Para ello, utilizamos el teorema de Wiener-Khinchin:

Teorema 16 (teorema de Wiener-Khinchin). *Si un proceso estocástico es estacionario, su densidad espectral de potencias se puede expresar como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación*

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Demostración. La demostración se obtiene mediante una serie de igualdades. Supongamos en primer lugar que el proceso tiene media 0 y que su covarianza es de la forma $\text{Cov}(x(n), x(m)) = \gamma(n - m)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \mathbb{E} [|\mathcal{F}_T(\omega)|^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \mathbb{E} \left[\left(\int_{-T}^T x(\zeta)e^{-i\omega\zeta} d\zeta \right) \left(\int_{-T}^T x(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \right)^* \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \mathbb{E} \left[\int_{-T}^T \int_{-T}^T x(\zeta)x(\tau)e^{-i\omega(\zeta-\tau)} d\tau d\zeta \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \mathbb{E}[x(\zeta)x(\tau)]e^{-i\omega(\zeta-\tau)} d\tau d\zeta \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T R(\zeta - \tau)e^{-i\omega(\zeta-\tau)} d\tau d\zeta = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-M}^M R(\zeta - \tau)e^{-i\omega(\zeta-\tau)} d\tau d\zeta \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M R(\zeta - \tau)e^{-i\omega(\zeta-\tau)} d\tau d\zeta = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \right) d\zeta \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \right) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Existen numerosos algoritmos para la generación de series. Uno de ellos es el siguiente:

Paso 1: Creamos un vector con la misma longitud que la serie y con valor 1 en todos sus puntos.

Paso 2: Multiplicamos el vector por

$$\text{Re}(\vartheta(f)) = f^{-(2\alpha-1)/2} \cos(2\pi u), \quad \text{Im}(\vartheta(f)) = f^{-(2\alpha-1)/2} \text{sen}(2\pi u),$$

donde α es el exponente obtenido del análisis DFA de la serie, u son números aleatorios que siguen una distribución $U(0, 1)$ y $\text{Re}(\vartheta(i))$ y $\text{Im}(\vartheta(i))$ son la parte real e imaginaria de la transformada de Fourier, respectivamente.

Paso 3: Calculamos la transformada inversa para obtener la serie resultante,

$$x(i) = \mathcal{F}^{-1}[\vartheta(i)].$$

6.1. Generación de series temporales con *crossover*

Mediante los métodos anteriores, generamos una señal que escala de una única forma. Sin embargo, los sistemas dinámicos reales producen series que escalan de diferente manera, generando *crossovers* (tamaño de ventana en el cual se produce un cambio de pendiente en el escalado de la serie) en el espectro de exponentes en algunas ocasiones. Por lo tanto, es necesario un nuevo algoritmo para modelar dichas series [5].

En el caso de querer generar una serie con dos exponentes de escalado, uno de ellos para escalas menores que el *crossover* y otro para las escalas de mayores que este, hacemos una diferenciación en la definición del espectro de potencias. Así, si el *crossover* se presenta en t_c , entonces multiplicamos el espectro por

$$Q(f) = \begin{cases} f^{-(2\alpha_\ell-1)/2} & \text{si } f \leq f_c, \\ f^{(\alpha_s-\alpha_\ell)} f^{-(2\alpha_s-1)/2} & \text{si } f > f_c, \end{cases}$$

donde $f_c = t_c^{-1}$ es el inverso del *crossover* y representa el cambio de tendencia en el espectro de potencias, y α_s y α_ℓ denotan los exponentes a corta y larga escala de la serie, respectivamente. De esta forma, conseguimos crear un espectro de potencias que es continuo.

7. Resultados

En esta sección, se describirán los resultados de las diferentes series reales que hemos seleccionado para su análisis. En primer lugar, se han elegido series financieras debido a la disponibilidad de estas de forma libre. Sin embargo, como veremos más adelante, estas series no son muy largas, debido a la digitalización relativamente reciente, que hace que no haya tantos datos disponibles como nos gustaría.

Por ello, se ha elegido también la serie de las diferencias de presiones entre las Azores e Islandia, ya que dicha señal tiene un número mayor de datos, aparte de suponer una aplicación directa de estos métodos en el ámbito de la física [12, 13].

7.1. Series financieras

En esta sección se explicarán los diferentes resultados obtenidos para las compañías analizadas. Se hacen tres distinciones en las series analizadas: empresas en el mercado español, empresas de EE. UU. e índices bursátiles. Los datos han sido obtenidos en línea [8, 9].

Se espera una dinámica más compleja en este último mercado, ya que es el tomado como referencia por todos los inversores al ser la Bolsa de Nueva York (Wall Street) el mercado con mayor número de transacciones, seguido de Londres y Tokyo. Al seleccionar las empresas para analizar, se han tenido en cuenta los siguientes criterios:

- Disponibilidad de los datos: al obtener las series temporales, numerosas de ellas presentaban numerosos huecos de cotización en algunos días, lo cual podía inducir a errores en los análisis.
- Diferentes sectores: se han estudiado empresas de energía, financieras, consumo y tecnológicas.

Igualmente, también se han examinado los retornos absolutos de la serie y la volatilidad de estos.

Definición 17. Se define el **retorno** (o incremento) de una serie temporal mediante la diferencia de las observaciones. Igualmente, se define la **volatilidad** de una serie temporal como el logaritmo del valor absoluto de las variaciones. Así,

$$r_t = X_t - X_{t-1} \quad \text{y} \quad \text{Vol}_t = \log \left(\left| \frac{X_t}{X_{t-1}} \right| \right).$$

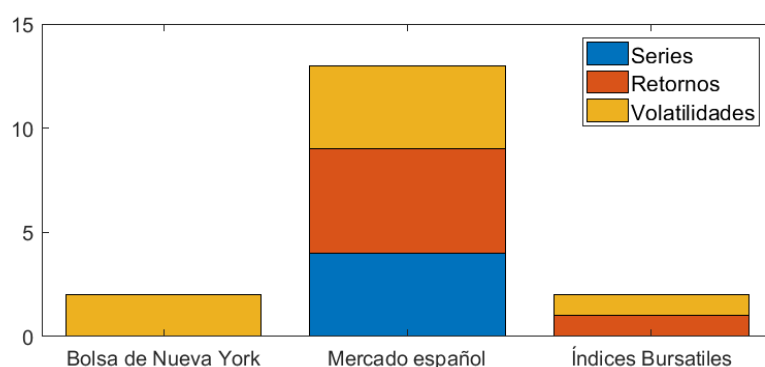


Figura 1: Número de series que no escalan correctamente en cada uno de los activos financieros analizados.

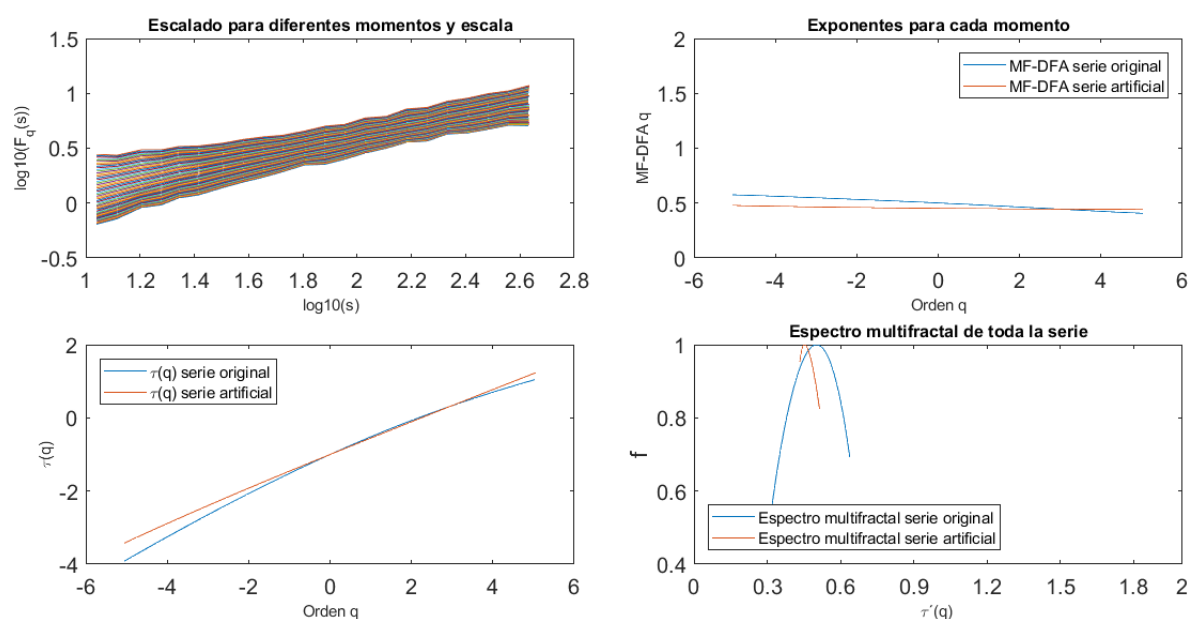


Figura 2: Análisis multifractal de la serie de volatilidades de Repsol.

El estudio de los retornos y la volatilidad es muy importante en el ámbito financiero, al determinar estos la viabilidad de una inversión en numerosas ocasiones. Las series seleccionadas son las siguientes:

- Empresas cotizadas en el mercado español: Acciona, BBVA, Banco Santander, Endesa, Iberdrola, Melia Hotels International, Red Eléctrica Española, Telefónica, Repsol, Viscofan.
- Empresas cotizadas en EE. UU.: Apple, The Boing Company, Citigroup, Ebay, Starbucks Corporation.
- Índices bursátiles: IBEX 35, S&P 500, Dow Jones Industrial Average, Nasdaq Composite.

No se presentarán todos los resultados que se obtengan de estas, ya que muchas de ellas suelen tener un comportamiento parecido a otras. Como resumen general, concluimos que se produce un escalado generalizado en las series analizadas. Es notable el caso de las cotizaciones bursátiles, ya que se produce un escalado correcto (se obtiene un buen ajuste en la regresión lineal anteriormente expuesta) en el 80 % de los casos. Igualmente, vemos cómo las volatilidades tienen un comportamiento peor, ya que el 40 % de estas no escalan correctamente. La figura 1 nos muestra los resultados por mercado.

Como podemos apreciar en la figura 1, el mercado español presenta numerosas series que no escalan correctamente, siendo el número muy parecido en los tres tipos de series. Esto puede ser debido a la técnica de *análisis técnico* que se produce en los EE. UU., el mayor volumen de negocio y la cualificación de los inversores.

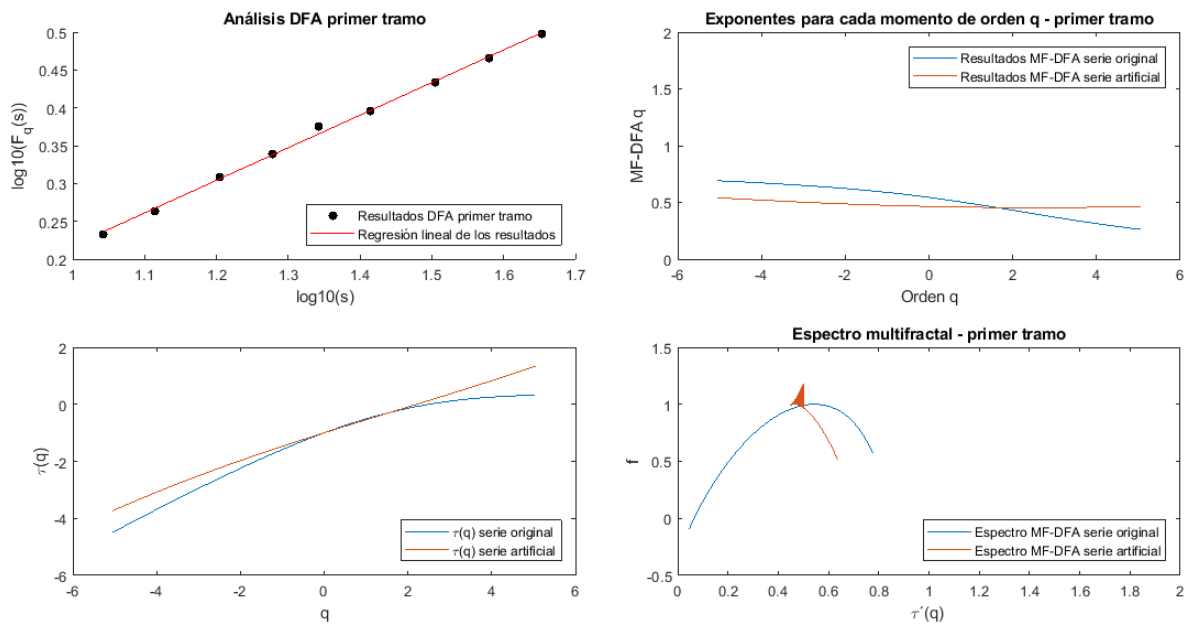


Figura 3: Análisis multifractal del primer tramo de la serie de volatilidades de Repsol.

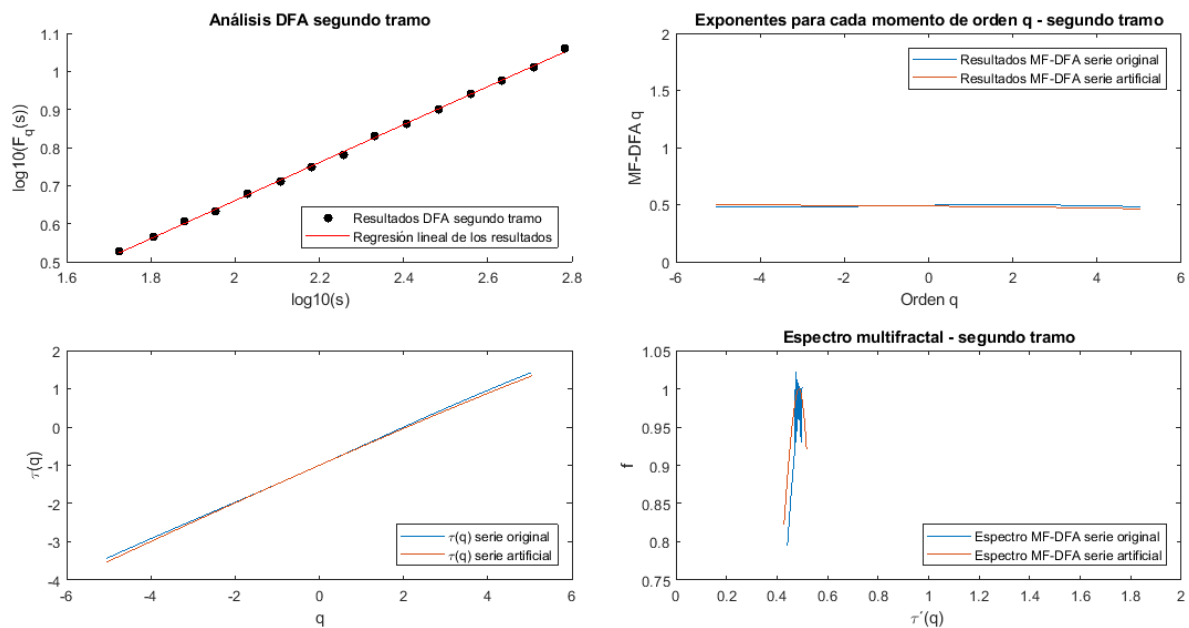


Figura 4: Análisis multifractal del segundo tramo de la serie de volatilidades de Repsol.

Concluimos que alrededor del 40 % de las series que tienen propiedades de escalado presentan propiedades monofractales. Asimismo, un 55 % de estas tienen características multifractales, debido a su amplio espectro multifractal. En el análisis de cada una de las series temporales, se ha realizado un análisis multifractal, que nos revela la posible existencia de algún *crossover* y la multifractalidad de la serie en cada uno de los tramos determinados por los posibles *crossover*. Así, nos podemos encontrar con la existencia de un *crossover* en la serie temporal de las volatilidades de Repsol, como observamos en la figura 2, donde nos encontramos con un cambio de pendiente alrededor del punto 2 en el gráfico izquierdo superior.

Esto implica una dinámica muy compleja, ya que, en el corto plazo (en el primer tramo de la serie dado por la figura 3), la serie temporal es multifractal, mientras que, en el largo plazo (segundo tramo dado por la figura 4), la serie es monofractal.

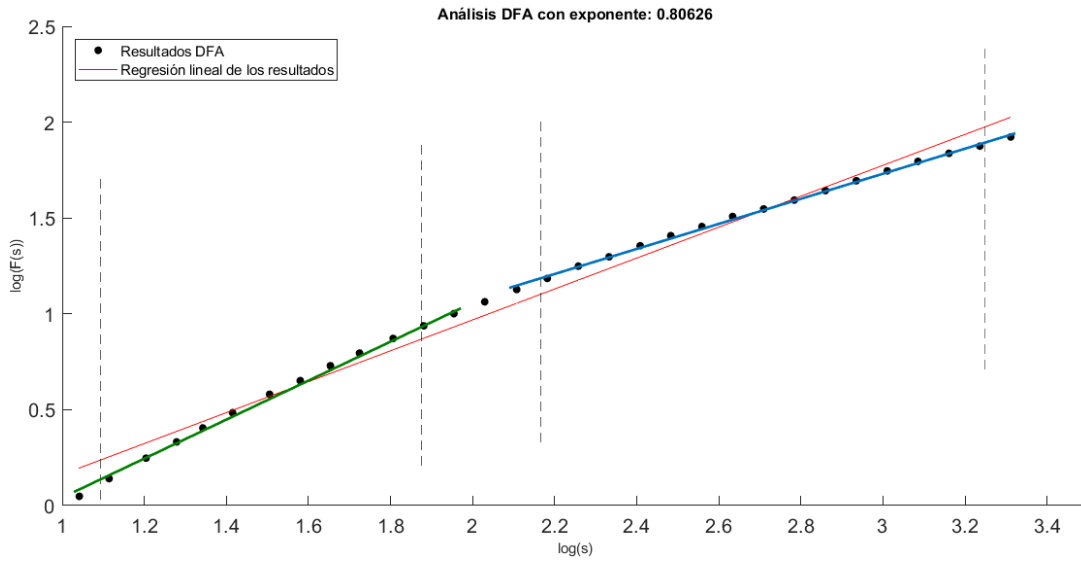


Figura 5: Método DFA aplicado a la serie.

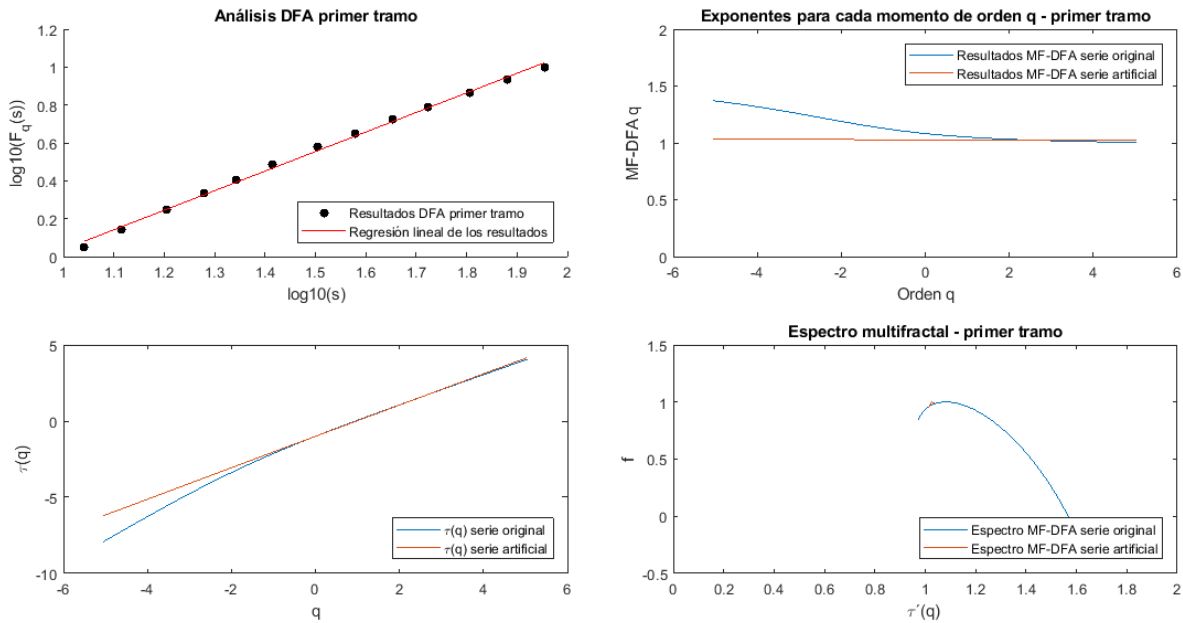


Figura 6: Análisis multifractal del primer tramo de la serie.

7.2. Variaciones de presión en el Océano Atlántico Norte

Procedemos ahora a describir los resultados de la serie temporal de las oscilaciones del atlántico norte, (NAO, North Atlantic Oscillations, en inglés), siendo estos datos obtenidos de [7]. Este es un fenómeno climático que recoge las fluctuaciones de la diferencia de presión atmosférica entre Islandia y las Azores. La NAO se descubre en los 1920s por Gilbert Walker. Siendo similar al fenómeno de El Niño en el océano Pacífico, la NAO es una de las más importantes conductoras de las fluctuaciones climáticas en el Noratlántico y climas húmedos vecinos [12, 13].

Calculamos en primer lugar el DFA de la serie y vemos su posible escalado en la figura 5. Podemos observar un pequeño cambio de tendencia alrededor de la escala $2 = \log(100)$ (en escala logarítmica). En este caso, obtenemos un exponente DFA de 1,0408 por debajo de las escalas de tamaño 100, y un exponente DFA de 0,6627 para escalas con un tamaño mayor que 100.

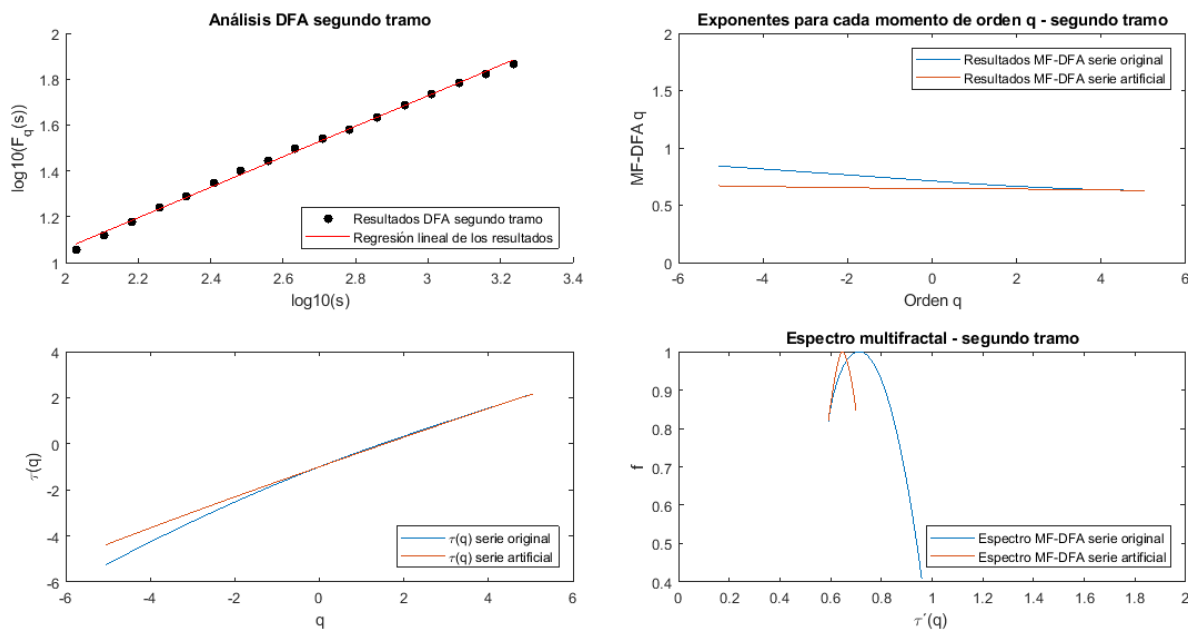


Figura 7: Análisis multifractal del segundo tramo de la serie.

De esta forma, la serie escala correctamente con un *crossover*. Procedemos ahora a realizar el cálculo del multifractal. Para ello, se emplearía el método multifractal ya presentado, y se pintaría $F_q(s)$ vs q en escala logarítmica, obteniendo un cambio de tendencia en la señal alrededor del punto 2.

Por este motivo, realizaremos un análisis multifractal de cada parte de la serie. Concretamente, tomaremos los tamaños de ventana de 1 a 2 y, por otro lado, de 2 a 3,3, y calcularemos su espectro multifractal. Esto será realizado para el estudio por separado de ambas dinámicas presentes en la serie, y estudiar la mono- multifractalidad de cada una de ellas. En el primer tramo, obtenemos los resultados dados en la figura 6.

Observamos cómo la serie sigue teniendo un espectro multifractal más amplio que la serie de control (serie artificial generada) en ese primer tramo, teniendo esta un rango de 0,59 en comparación con la serie de control, la cual posee un rango de 0,05. Por lo tanto, concluimos que la serie es multifractal en el corto plazo (para ventanas de tamaño menor que 100).

Se puede observar en la figura 7 el mismo resultado en el segundo tramo de la serie. Vemos cómo la serie de control tiene un espectro más estrecho que la segunda parte de la serie. Cada una tiene un rango de 0,16 y 0,36, respectivamente, indicándonos de nuevo la multifractalidad para ventanas con un tamaño mayor que 100.

8. Conclusiones

Las principales aportaciones y conclusiones de este trabajo son las siguientes:

1. En este trabajo se ha introducido el método DFA, que mejora otros métodos previos empleados en el análisis de diferentes series temporales complejas, con el fin de estudiar su dinámica y las propiedades fractales presentes en ellas. El DFA es aplicable tanto a series estacionarias como no estacionarias y se ha relacionado el resultado que nos produce el DFA con la función de autocorrelación para series estacionarias. Igualmente, se ha introducido el DFA multifractal, útil para analizar series más complejas, el cual analiza las propiedades de escala de los diferentes momentos de las fluctuaciones de las series.
2. Se han presentado los algoritmos necesarios para generar series de control utilizando la transformada de Fourier, así como el espectro de potencias. Con estos algoritmos, somos capaces de generar series con una dinámica monofractal concreta. Estas series sintéticas se usan para modelar las series reales, y son utilizadas posteriormente como referencia para comparar con los resultados de las señales reales analizadas.

3. Los métodos DFA y DFA multifractal han sido empleados para analizar numerosas cotizaciones bursátiles de los mercados financieros, así como los retornos y las volatilidades de estas. Estas señales son conocidas por su complejidad y sus características fractales. Se concluye que alrededor de un 70 % poseen propiedades fractales, y aproximadamente un 40 % son multifractales. Eso nos revela una dinámica compleja presente en la mayoría de las series temporales. Igualmente, observamos series con propiedades fractales distintas a pequeñas y grandes escalas temporales, con una transición entre ambas (*crossover*) en una escala intermedia, lo que sugiere la existencia de dos mecanismos distintos que controlan la dinámica a corto y largo plazo.
4. Finalmente, se ha analizado el índice NAO, el cual mide las variaciones de presión en diferentes puntos del Atlántico Norte. Los resultados revelan una dinámica muy compleja, presentando un cambio de tendencia en cada estación del año y propiedades multifractales en cada una de ellas.

Referencias

- [1] ALLEGRI, Paolo; BARBI, Maria; GRIGOLINI, Paolo, y WEST, Bruce J. «Dynamical model for DNA sequences». En: *Physical Review E* 52.5 (1995), págs. 5281-5296. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.52.5281>.
- [2] BERAN, Jan. *Statistics for long-memory processes*. Vol. 61. Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman y Hall, New York, 1994. ISBN: 978-0-412-04901-9.
- [3] BRYCE, Robert M. y SPRAGUE, Kevin B. «Revisiting detrended fluctuation analysis». En: *Scientific Reports* 2 (2012). <https://doi.org/10.1038/srep00315>.
- [4] BUNDE, Armin y HAVLIN, Shlomo, eds. *Fractals in science*. Berlín: Springer-Verlag, 1994. ISBN: 978-3-540-56221-4.
- [5] CARPENA, Pedro; CORONADO, Ana; CARRETERO-CAMPOS, Concepción; BERNAOLA-GALVÁN, Pedro, y IVANOV, Plamen. «First Passage time properties of correlated time series with scale-invariant behaviour with crossovers in the scaling». En: *Time Series Analysis and Forecasting*. Ed. por Rojas, Ignacio y Pomares, Héctor. Springer, 2016, págs. 89-102. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-28725-6>.
- [6] CORONADO, Ana V. y CARPENA, Pedro. «Size Effects on Correlation Measures». En: *Journal of Biological Physics* 31.1 (2005), págs. 121-133. ISSN: 1573-0689. <https://doi.org/10.1007/s10867-005-3126-8>.
- [7] *Datos de la serie NAO*. URL: <http://www.cpc.ncep.noaa.gov>.
- [8] *Datos de las series financieras de España*. URL: <https://www.infobolsa.es>.
- [9] *Datos de las series financieras internacionales*. URL: <http://www.investing.com>.
- [10] FALEIRO, Eduardo. *Estructura Multifractal y Aplicaciones de las fluctuaciones en cascadas atmosféricas producidas por rayos cósmicos*. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid, 1998. ISBN: 978-84-669-1571-7. URL: <https://eprints.ucm.es/3123/>.
- [11] FEDER, Jens. *Fractals*. Physics of Solids and Liquids. With a foreword by Benoit B. Mandelbrot. Plenum Press, New York, 1988. <https://doi.org/10.1007/978-1-4899-2124-6>.
- [12] FERNÁNDEZ, Isabel; HERNÁNDEZ, Carmen N., y PACHECO, José M. «Is the North Atlantic Oscillation just a pink noise?» En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 323 (2003), págs. 705-714. ISSN: 0378-4371. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(03\)00056-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(03)00056-6).
- [13] FERNÁNDEZ, Isabel; PACHECO, José M., y QUINTANA, María P. «Pinkness of the North Atlantic Oscillation signal revisited». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 389.24 (2010), págs. 5801-5807. ISSN: 0378-4371. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2010.08.003>.
- [14] HALSEY, Thomas C.; JENSEN, Mogens H.; KADANOFF, Leo P.; PROCACCIA, Itamar, y SHRAIMAN, Boris I. «Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets». En: *Physical Review A* 33.2 (1986), págs. 1141-1151. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.33.1141>.
- [15] HASTINGS, Harold M. y SUGIHARA, George. *Fractals: A User's Guide for the Natural Sciences*. Oxford: Oxford University Press, 1993. ISBN: 978-0-19-854597-2.

-
- [16] HÖLL, Marc y KANTZ, Holger. «The relationship between the detrended fluctuation analysis and the autocorrelation function of a signal». En: *The European Physical Journal B* 88.12 (2015), pág. 327. ISSN: 1434-6036. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2015-60721-1>.
- [17] KANTELHARDT, Jan W.; ZSCHIEGNER, Stephan A.; KOSCIELNY-BUNDE, Eva; HAVLIN, Shlomo; BUNDE, Armin, y STANLEY, H. Eugene. «Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 316.1 (2002), págs. 87-114. ISSN: 0378-4371. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01383-3](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01383-3).
- [18] MARTÍN AGUILAR, Alberto. *Análisis de señales complejas: correlaciones de largo alcance y propiedades multifractales*. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Málaga, 2018.
- [19] MOURA, Francisco A. B. F. de y LYRA, Marcelo L. «Delocalization in the 1D Anderson Model with Long-Range Correlated Disorder». En: *Physical Review Letters* 81.17 (1998), págs. 3735-3738. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.3735>.
- [20] PENG, Chung-Kang; BULDYREV, Sergey V.; GOLDBERGER, Ary; HALVIN, Shlomo; SCIORTINO, F.; SIMONS, M., y STANLEY, H. Eugene. «Long-range correlations in nucleotide sequences». En: *Nature* 356 (1992), págs. 168-170. <https://doi.org/10.1038/356168a0>.
- [21] PENG, Chung-Kang; BULDYREV, Sergey V.; HAVLIN, Shlomo; SIMONS, Michael; STANLEY, H. Eugene, y GOLDBERGER, Ary L. «Mosaic organization of DNA nucleotides». En: *Physical Review E* 49.2 (1994), págs. 1685-1689. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.49.1685>.
- [22] SEURONT, Laurent. *Fractals and Multifractals in Ecology and Aquatic Science*. Boca Raton, Florida: CRC Press, 2010. <https://doi.org/10.1201/9781420004243>.