

TEMat

Teoría de nudos y homología de Khovanov

✉ David Torregrosa Belén
Universidad de Alicante
david.torregrosa@ua.es

Resumen: Una de las preguntas que nos planteamos en teoría de nudos es determinar si dos nudos son equivalentes. Para intentar responder a esta cuestión es útil considerar invariantes de nudos. La primera parte de este artículo consiste en una introducción a la teoría de nudos y al polinomio de Jones, un invariante que supuso un importante avance en la forma de estudiar esta teoría y construyó puentes con otras ramas de las matemáticas y la física. La segunda parte está dedicada a la homología de Khovanov. Se trata de un refinamiento del polinomio de Jones que da lugar a un invariante homológico.

Abstract: One of the questions asked in knot theory is whether or not two knots are equivalent. Knot invariants are a useful tool in order to give a possible answer to this question. This paper starts with an introduction to knot theory and the Jones polynomial, an invariant that entailed a great advance in the study of this theory and built connections with other branches of mathematics and physics. The second part of the paper is devoted to Khovanov homology. This is an homological invariant, obtained by means of the Jones polynomial but which enlarges the information given by it.

Palabras clave: teoría de nudos, equivalencia de nudos y enlaces, invariantes de nudos, polinomio de Jones, homología de Khovanov.

MSC2010: 57K10, 57K14, 57K18.

Recibido: 29 de octubre de 2019.

Aceptado: 8 de diciembre de 2020.

Agradecimientos: Quiero agradecer a Clementa Alonso González por supervisar este trabajo, así como por animarme a solicitar la «Beca de Colaboración» del Ministerio de Educación y Formación Profesional, en el marco de la cuál realicé este trabajo.

Referencia: TORREGROSA BELÉN, David. «Teoría de nudos y homología de Khovanov». En: *TEMat*, 5 (2021), págs. 1-16. ISSN: 2530-9633. URL: <https://temat.es/articulo/2021-p1>.

© ⓘ Este trabajo se distribuye bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento 4.0 Internacional <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

1. Introducción

La teoría de nudos es un área de la topología de baja dimensión dedicada al estudio de nudos y su clasificación. Comencemos viendo qué va a ser para nosotros un nudo.

Toma una cuerda con dos extremos, entrelázala entre sí y, una vez hayas concluido, une los extremos. El resultado es un nudo. Considera ahora que tenemos dos nudos. Clasificar nudos hace referencia a responder preguntas del tipo: ¿podemos tomar el primer nudo y transformarlo en el segundo sin cortar la cuerda? Si la respuesta a esta pregunta es afirmativa, es posible cambiar poco a poco y continuamente la forma del primer nudo y obtener el segundo, y diremos que ambos nudos son **equivalentes**. Estas ideas se formalizarán en la sección 2. Además, se introducirá el concepto de **invariante de nudo**, que nos ayuda a determinar, en algunos casos, cuándo dos nudos no son equivalentes. Entre estos invariantes destaca el polinomio de Jones, al que le dedicamos la sección 3. El polinomio de Jones puede refinarse para obtener un invariante más potente, la homología de Khovanov. Esta se presenta en la sección 4, en la cual comenzamos introduciendo las nociones básicas de la teoría de homología. Por último, en la sección 5 se presenta una comparativa entre el polinomio de Jones y la homología de Khovanov.

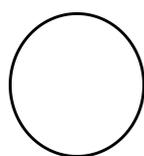
2. Nudos e invariantes de nudos

Comenzamos esta sección formalizando matemáticamente las definiciones de nudo y equivalencia de nudos. Matemáticamente, un nudo es la imagen de un embebimiento de la circunferencia en \mathbb{R}^3 . Equivalentemente, tenemos la siguiente definición:

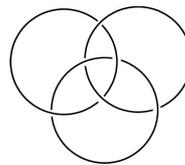
Definición 1. Un nudo $K \subset \mathbb{R}^3$ es un subconjunto de puntos homeomorfo a una circunferencia. ◀

Otro objeto de estudio en la teoría de nudos son los enlaces. Los **enlaces** generalizan los nudos al poder considerar más de una componente conexa. Así, un enlace es la unión disjunta de un número finito de nudos. En particular, un nudo es un enlace.

En el libro de Burde, Zieschang y Heusener [4] se puede encontrar una definición de la equivalencia de nudos y enlaces en virtud de embebimientos. Sin embargo, habitualmente se trabaja con nudos y enlaces de una manera combinatoria haciendo uso de diagramas de nudos. Los diagramas son proyecciones, con algunas restricciones (sin puntos triples ni puntos de tangencias), de nudos o enlaces sobre el plano, en las que en los puntos dobles hemos realizado un borrado del trozo de cuerda que queda debajo al proyectar; estos puntos se denominan cruces del diagrama. Al trozo de cuerda que pasa por debajo del cruce lo denominamos **paso inferior**; el que queda por arriba es el **paso superior**.



(a) Nudo trivial.



(b) Anillos de Borromeo.

Figura 1: Ejemplos de diagramas de nudos y enlaces.

Dado un enlace¹, siempre es posible obtener un diagrama del mismo. La posibilidad de trabajar por medio de diagramas vino dada por el matemático alemán Reidemeister, quién demostró que la relación de equivalencia para enlaces puede ser expresada por medio de ciertos movimientos realizados sobre sus diagramas. A estos movimientos los denominamos movimientos de Reidemeister y se pueden visualizar en la figura 2.

¹En este artículo trabajaremos únicamente con nudos y enlaces dóciles, que son aquellos que se pueden ver como polígonos enroscados en \mathbb{R}^3 .

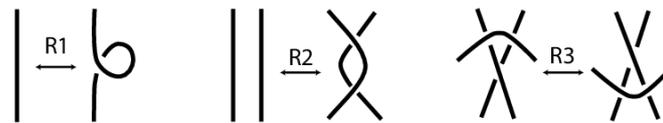


Figura 2: Movimientos de Reidemeister.

Definición 2. Diremos que dos diagramas son equivalentes si se pueden obtener el uno del otro realizando un número finito de movimientos de Reidemeister R_1 , R_2 y R_3 . ◀

El siguiente teorema relaciona equivalencia de nudos y enlaces con equivalencia de diagramas.

Teorema 3 (Reidemeister). Sean D y D' diagramas de dos enlaces L y L' , respectivamente. Entonces, L y L' son equivalentes si y solo si D y D' son equivalentes como diagramas.

En particular, de este teorema deducimos que, dado un enlace, todos sus diagramas son equivalentes. Dados dos enlaces que son equivalentes, decimos que son el mismo enlace. Por tanto, a partir de ahora cuando hablamos de nudo o enlace nos referimos a su clase de equivalencia.

Ahora que ya estamos familiarizados con el concepto de equivalencia de nudo nos podemos hacer la siguiente pregunta: ¿existe algún algoritmo que nos permita conectar dos diagramas por medio de movimientos de Reidemeister? La respuesta es, en general, negativa. Este hecho complica el determinar si dos nudos son equivalentes. En su lugar, hacemos uso de invariantes de nudos y enlaces que nos ayudarán a determinar si dos nudos o enlaces **no** son equivalentes.

Definición 4. Dado un nudo (enlace) L , diremos que un valor o propiedad $i(L)$ es un invariante de nudos (enlaces) si se verifica que para cualquier nudo (enlace) L' equivalente a L tenemos que $i(L) = i(L')$. ◀

En virtud del teorema 3, se cumplirá que si una propiedad de un diagrama se conserva al realizar movimientos de Reidemeister, entonces será un invariante de nudos y enlaces. De esta manera somos capaces de calcular invariantes de nudos y enlaces a partir de diagramas.

Encontramos ejemplos de invariantes de muy distintos tipos: el número mínimo de cruces que puede tener un diagrama de un nudo, considerando todos los posibles diagramas del nudo (**crossing number**); si los arcos del diagrama pueden ser coloreados por tres colores siguiendo unas ciertas normas (**tricoloreabilidad**); algebraicos, como el grupo fundamental del complementario de un nudo; invariantes polinómicos...

En 1984, el matemático neozelandés Vaughan Jones descubrió un nuevo invariante que supuso una revolución en la teoría de nudos. El trabajo de Jones [7] sobre ciertas álgebras de von Neumann, estudiadas en análisis funcional, le llevó a descubrir este nuevo invariante polinómico que recibe el nombre de **polinomio de Jones**.

El polinomio de Jones tiene una relevancia doble. Por una parte, dentro de la teoría de nudos, por su sencillez conceptual y puesto que permite distinguir gran cantidad de nudos de su imagen especular: el nudo dado por la imagen del nudo inicial en un espejo. En la figura 3 podemos encontrar un ejemplo de nudo y su imagen especular. Por otro lado, generó un vínculo entre la teoría de nudos y la geometría y la física cuántica. Todo esto llevó a Jones a ser galardonado con la Medalla Fields en 1990. Más información acerca del descubrimiento del polinomio de Jones se puede encontrar en el artículo de *La Gaceta de la RSME* [1].

3. El polinomio de Jones

El polinomio de Jones es un invariante de nudos y enlaces **orientados**.

Definición 5. Un nudo o enlace orientado es aquel en el que hemos asignado un sentido de recorrido a cada una de sus componentes conexas. Este sentido queda representado en el diagrama por medio de

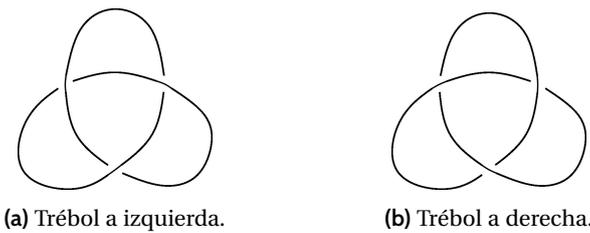


Figura 3: Diagramas del nudo trébol (izquierda) y su imagen especular (derecha). Estos diagramas no son equivalentes.

flechas. Dos enlaces orientados serán equivalentes si son equivalentes entre sí de acuerdo a la definición de equivalencia de enlaces no orientados y, además, se conserva la orientación de sus componentes conexas.

Poco después del descubrimiento por parte de Jones de este invariante, se encontró una forma axiomática de definir el polinomio de Jones a partir de diagramas de nudos. Para introducirla necesitamos familiarizarnos primero con una nueva notación. Consideremos un diagrama de un enlace orientado L , y fijémonos en un cruce de dicho diagrama. Vamos a asignar un signo a dicho cruce de la siguiente manera. Nos acercamos al punto de cruce por el paso inferior siguiendo la orientación fijada. Ahora, miramos la orientación del paso superior. Si va de izquierda a derecha, asignamos al cruce el signo «+»; si por el contrario va de derecha a izquierda, le asignaremos el signo «-». A partir de esto, fijado un cruce de un enlace orientado L , si dicho cruce tiene signo «-», convenimos $L = L_-$ y haciendo los correspondientes cambios en el cruce, de acuerdo a lo que se muestra en la figura 4, construimos los enlaces L_+ y L_0 . Por el contrario, si el cruce tiene signo «+», convenimos $L = L_+$ y construimos los enlaces L_- y L_0 .



Figura 4: Dado un diagrama de un enlace L y fijado un cruce del mismo, empleamos esta notación para designar a los diagramas obtenidos al hacer la correspondiente modificación sobre dicho cruce.

Ahora ya podemos dar la siguiente definición desde la perspectiva de la teoría de nudos del polinomio de Jones.

Definición 6. El polinomio de Jones² de un nudo o enlace orientado L es el polinomio de Laurent en la variable q , $V_L(q)$, que satisface las siguientes reglas:

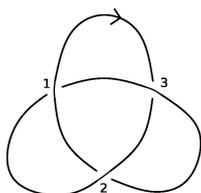
- (JP1) $V_{\emptyset}(q) = 1$, donde $V_{\emptyset}(q)$ es el polinomio del nudo vacío.
- (JP2) El polinomio de Jones del nudo trivial será $V_0(q) = q + q^{-1}$.
- (JP3) $q^2V_{L_-}(q) - q^{-2}V_{L_+}(q) = (q - q^{-1})V_{L_0}(q)$.

Esta versión del polinomio de Jones aquí introducida se conoce formalmente como **polinomio de Jones aumentado**.

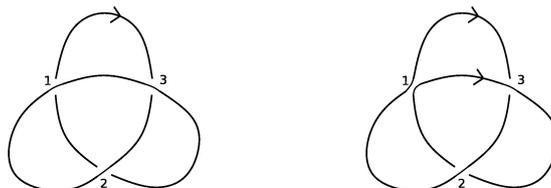
En la siguiente sección veremos que el polinomio de Jones es un invariante de enlaces orientados.

Ejemplo 7. Vamos a calcular el polinomio de Jones del trébol a izquierda. Denotamos al polinomio como $V_T(q)$. Para ello consideramos el siguiente diagrama del nudo orientado, con la orientación indicada por la flecha, y con los cruces numerados como vemos en la siguiente imagen.

²Por motivos prácticos, la definición del polinomio de Jones que usaremos se corresponde a la usada por Asaeda y Khovanov [2] y es diferente a la de la mayoría de libros de texto.



Nos fijamos en el cruce que hemos numerado con el número 1. De acuerdo a la figura 4, a este nudo le corresponde la notación de L_- . Los nudos que denominábamos L_+ y L_0 , en este orden, son los siguientes.

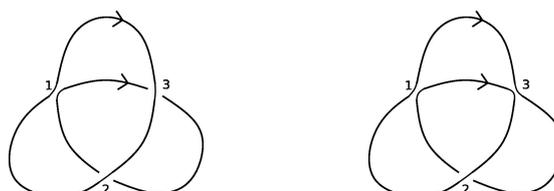


El axioma (JP3) nos da la relación

$$(1) \quad q^2 V_T(q) - q^{-2} V_{L_+}(q) = (q - q^{-1}) V_{L_0}(q)$$

para los polinomios de Jones de los nudos considerados. Si conocemos los polinomios de V_{L_+} y V_{L_0} podremos obtener el polinomio de Jones del trebol a izquierda. Pasemos a calcularlos.

Si realizamos un movimiento R_2 al diagrama del nudo L_+ y posteriormente un R_1 al único cruce restante, el cruce 2, obtendremos un diagrama del nudo trivial. Al ser L_+ equivalente al nudo trivial y el polinomio de Jones un invariante de nudos, tenemos, por medio de (JP2), que $V_{L_+}(q) = q + q^{-1}$. El diagrama L_0 corresponde a un diagrama del conocido como **enlace de Hopf**, que vamos a denotar por K . Para calcular su polinomio de Jones volvemos a hacer uso de (JP3), pero ahora nos fijamos en el cruce 3. El enlace K se corresponde con el que ahora denotaremos por K_- según las relaciones de la figura 4. Los otros enlaces a considerar son los que denotamos por K_+ y K_0 y que representamos a continuación.



Realizando un movimiento R_1 en el cruce 2 al enlace K_0 , vemos que se trata del nudo trivial. Tendremos que $V_{K_0}(q) = q + q^{-1}$. Por otro lado, si realizamos un movimiento R_2 en K_+ , obtenemos el enlace formado por una unión disjunta de dos nudos triviales. El lector puede comprobar que el polinomio de Jones de este enlace será $V_{K_+}(q) = (q + q^{-1})^2$ (pista: partir de un diagrama del nudo trivial al que se le ha realizado un movimiento R_1 y buscar aplicar (JP3)). En definitiva, de (JP3) tenemos que

$$q^2 V_{K_-}(q) - q^{-2} V_{K_+}(q) = (q - q^{-1}) V_{K_0}(q)$$

y despejando obtendremos que $V_{L_0}(q) = V_{K_-}(q) = q^{-6} + q^{-4} + q^{-2} + 1$. Finalmente, ya podemos despejar $V_{L_-}(q)$ de (1). Obtenemos así el polinomio de Jones del trebol a izquierda,

$$V_T(q) = V_{L_-}(q) = -q^{-9} + q^{-5} + q^{-3} + q^{-1}. \quad \blacktriangleleft$$

Ejemplo 8. Calcular el polinomio de Jones del trebol a derecha, observar que es diferente al del trebol a izquierda y concluir que, puesto que el polinomio de Jones es un invariante de nudos, son nudos no equivalentes. ◀

3.1. El polinomio corchete

Kauffman [8] introdujo una nueva forma de calcular el polinomio de Jones. La idea de Kauffman permite simplificar el cálculo del polinomio de Jones de un enlace partiendo de uno de sus diagramas y trabajando con diagramas más sencillos, obtenidos al hacer desaparecer cruces del diagrama original. De esta manera, se facilita el cómputo del polinomio de Jones. Estudiamos a continuación el enfoque de Kauffman. Comenzamos definiendo el polinomio corchete.

Definición 9. Sea D un diagrama de un enlace L . Definimos su polinomio corchete³ $\langle D \rangle$ como el polinomio de Laurent en la variable q definido por las siguientes reglas:

(BR1) $\langle \emptyset \rangle = 1$.

(BR2) $\langle D \cup \bigcirc \rangle = (q + q^{-1})\langle D \rangle$.

(BR3) $\langle \text{cruce} \rangle = \langle \text{cruce} \rangle - q \langle \text{cruce} \rangle$.

(BR3') $\langle \text{cruce} \rangle = \langle \text{cruce} \rangle - q \langle \text{cruce} \rangle$.

Esta versión del polinomio corchete de Kauffman se conoce como **corchete de Kauffman aumentado**. ◀

(BR2) nos relaciona el polinomio corchete de un diagrama D del enlace L con el corchete resultante de añadir un nudo trivial sin enlazar al diagrama D . En particular, tomando $D = \emptyset$, se tiene que $\langle \bigcirc \rangle = q + q^{-1}$.

(BR3) y (BR3'), por su parte, nos relacionan diagramas que únicamente se diferencian en un entorno de un cruce en el cual toman las formas ahí indicadas.

Nótese que el polinomio corchete, a diferencia del polinomio de Jones, se define para diagramas (tampoco interviene la orientación), no para enlaces. Esto es porque no es un invariante de nudos, no se conserva por movimientos de Reidemeister. Sin embargo, estudiar la manera en la que el polinomio corchete se comporta al realizar estos movimientos nos permitirá obtener a partir de él el polinomio de Jones.

Lema 10. Al realizar un movimiento de Reidemeister de tipo R_1 se dan las siguientes igualdades entre los polinomios corchete de los diagramas que intervienen:

(2) $\langle \text{cruce} \rangle = -q^2 \langle \text{cruce} \rangle$,

(3) $\langle \text{cruce} \rangle = q^{-1} \langle \text{cruce} \rangle$.

Observación 11. Nótese que la igualdad (2) se da cuando el cruce estudiado tiene signo «−» al darle una orientación cualquiera, mientras que en (3) tiene signo «+». ▶

Demostración. Haremos la demostración para la igualdad (2), la otra se deja como ejercicio.

Partimos de $\langle \text{cruce} \rangle$, y haciendo uso de (BR3) obtenemos que

$$\langle \text{cruce} \rangle = \langle \text{cruce} \rangle - q \langle \text{cruce} \rangle.$$

Finalmente, aplicando (BR2) al segundo sumando tenemos que

$$\langle \text{cruce} \rangle = \langle \text{cruce} \rangle - q(q + q^{-1}) \langle \text{cruce} \rangle = -q^2 \langle \text{cruce} \rangle. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 12. Prueba que el polinomio corchete es invariante por movimientos de tipo R_3 y que al realizar un movimiento de tipo R_2 la relación entre los diagramas es

$$\langle \text{cruce} \rangle = -q \langle \text{cruce} \rangle. \quad \blacktriangleleft$$

³A pesar de que el nombre que usamos es el mismo que el que usa Kauffman, no se trata del mismo polinomio; de hecho, este polinomio no es invariante por los movimientos R_2 .

Los siguientes resultados nos relacionan el polinomio corchete de un diagrama D de un enlace orientado L con el polinomio de Jones de L .

Teorema 13. *Definimos el polinomio $f[L]$ para un enlace orientado L como $f[L] = f[D]$, siendo D un diagrama de L y*

$$(4) \quad f[D] = (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \langle D \rangle,$$

donde n_+ y n_- son el número de cruces positivos y negativos según la orientación de D , respectivamente, y el corchete se calcula para el diagrama D obviando la orientación. Entonces, $f[D]$ es un invariante de enlaces orientados.

Demostración. Este resultado se obtiene demostrando que $f[D]$ es invariante por movimientos de Reidemeister. Para ello basta combinar los resultados obtenidos en el lema 10 y el ejemplo 12. ■

Al probar que es un invariante de enlaces orientados, podemos definir el polinomio f para enlaces orientados en lugar de diagramas. Con el siguiente teorema demostramos que el polinomio de Jones es un invariante de nudos y enlaces.

Teorema 14. *El polinomio f es el polinomio de Jones:*

$$f[L] = V_L(q).$$

Demostración. El polinomio f es un polinomio de Laurent, necesitamos ver que verifica los axiomas del polinomio de Jones.

Comprobar (JP1) y (JP2) es inmediato. Nos centramos en ver (JP3), esto es, probar que, dado un diagrama de un enlace orientado L y fijado un cruce cualquiera del mismo, se verifica que

$$(5) \quad q^2 f[L_-] - q^{-2} f[L_+] = (q - q^{-1}) f[L_0],$$

de acuerdo a la notación dada en la figura 4.

Supongamos que el número de cruces positivos y negativos de L_0 es $n_+(L_0) = p$ y $n_-(L_0) = s$. Entonces, como L_- y L_+ coinciden con L_0 salvo en el cruce en cuestión, sus números de cruces de cada signo son $n_+(L_-) = p$, $n_-(L_-) = s + 1$, $n_+(L_+) = p + 1$ y $n_-(L_+) = s$.

Sustituyendo en (5), de acuerdo a la definición del polinomio f dada en (4) y haciendo uso del número de cruces positivos y negativos en cada enlace, se llega a que (5) es equivalente a

$$(6) \quad -\langle L_- \rangle - q^{-1} \langle L_+ \rangle = (q - q^{-1}) \langle L_0 \rangle,$$

donde ahora ya no se está considerando la orientación de los enlaces.

Por último la ecuación (6) es cierta al corresponderse a la expresión

$$-q^{-1}(\text{BR3}') - (\text{BR3}). \quad \blacksquare$$

Corolario 15. *El polinomio de Jones es un invariante de nudos y enlaces orientados.*

3.2. Suma de estados

Al utilizar los axiomas (BR3) y (BR3') para el cálculo del polinomio corchete de un diagrama, estamos reduciendo el cálculo a obtener el corchete de dos diagramas con un cruce menos. El proceso de hacer desaparecer un cruce de un diagrama de una de las maneras indicadas en (BR3) o (BR3') recibe el nombre de **suavizado** del cruce y le asignamos la notación de acuerdo a la definición siguiente.

Definición 16. Sea L un nudo o enlace, consideramos un diagrama D del mismo. Si nos fijamos en un cruce de D :

- Diremos que hemos realizado un 0-suavizado del cruce si sustituimos el cruce  por .
- Diremos que hemos realizado un 1-suavizado del cruce si sustituimos el cruce  por .

El resultado de realizar un suavizado de todos los cruces de un diagrama es una unión disjunta de nudos triviales que se conoce como **estado** del diagrama. Dado un diagrama D con n cruces podemos obtener 2^n estados. Aplicando (BR3) o (BR3') a cada uno de los cruces de un diagrama, podremos simplificar el polinomio corchete de D como la suma de los corchetes de cada estado, fácil de calcular, multiplicando cada uno por una potencia de q según el número de 1-suavizados realizados para obtener dicho estado.

Sea χ el conjunto ordenado de cruces de D . Podemos asociar cada estado de D con un vértice α del cubo n -dimensional $\{0, 1\}^{|\chi|}$, asociando a un vértice un 0 si hemos realizado un 0-suavizado y un 1 en el caso de un 1-suavizado. A dicho estado lo denotaremos por s_α .

Cada estado consta de un número distinto de nudos triviales; denominamos $|s_\alpha|$ a este número para cada estado. Por (BR2), sabemos que el polinomio corchete de una unión disjunta de k nudos triviales es $(q + q^{-1})^k$. Por tanto, obtendremos la siguiente expresión para el corchete de D :

$$(7) \quad \langle D \rangle = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^{|\chi|}} (-1)^{r_\alpha} q^{r_\alpha} (q + q^{-1})^{|s_\alpha|},$$

donde r_α es el número de 1-suavizados realizados para obtener el estado s_α : $r_\alpha = \sum_{i \in \{1, \dots, |\chi|\}} \alpha_i$.

Ejemplo 17. Vamos a ver algunos estados del trébol a izquierda, que dibujábamos en la figura 3a. El número de cruces del trébol es 3. Por tanto, los posibles estados del trébol vendrán determinados por los vectores $\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : \alpha_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3\}$, donde las componentes del vector se corresponden a la enumeración de los cruces que vemos en las imágenes de la figura 5.

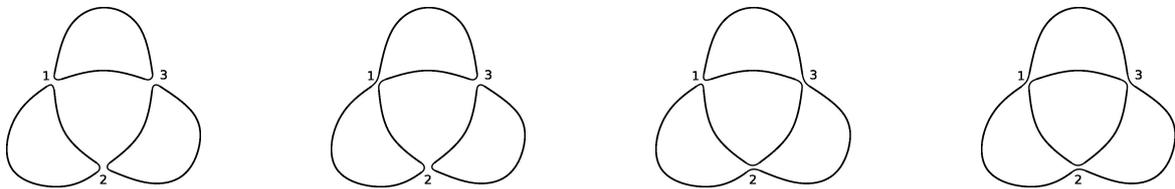


Figura 5: Estados correspondientes a las elecciones de suavizados determinadas por los vectores $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, 1, 1)$, ordenados de izquierda a derecha.

4. Homología de Khovanov

La homología es un recurso empleado en topología algebraica que nos permite asociar a espacios topológicos un conjunto de grupos abelianos los cuales son invariantes topológicos, es decir, se conservan por homeomorfismos. De esta manera, su cálculo resulta de gran utilidad para determinar cuándo dos espacios son homeomorfos o no.

Simplificadamente, la obtención de los grupos de homología de un espacio topológico se puede resumir en tres pasos.

1. **Obtención de los grupos de cadenas.** En primer lugar, se asocia al espacio topológico una familia de grupos $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ llamados grupos de cadenas. Existen distintos procedimientos para generar estos grupos según el tipo de homología empleada: simplicial, singular, celular...
2. **Definición de los homomorfismos borde.** Para cada $n \in \mathbb{Z}$ el n -ésimo homomorfismo borde ∂_n será un homomorfismo entre el $(n+1)$ -ésimo grupo de cadenas y el n -ésimo, de manera que se cumpla que la composición $\partial_{n-1} \partial_n$ es el homomorfismo nulo para todo n . La sucesión de grupos de cadenas

y homomorfismos bordes forman lo que se conoce como un **complejo de cadenas**, representado por el siguiente diagrama:

$$(8) \quad \dots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_n} C_n \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-1} \longrightarrow \dots$$

Generalmente suprimiremos los subíndices cuando quede claro a qué homomorfismos nos referimos. La igualdad que se verifica entonces es $\partial^2 = 0$.

3. **Grupos de homología.** La igualdad $\partial^2 = 0$ que verifican los homomorfismos borde nos asegura que $\text{Im}(\partial_n) \subset \text{Ker}(\partial_{n-1})$ para todo n y, al estar trabajando con grupos abelianos, podemos definir para cada n el **n -ésimo grupo de homología** como el cociente

$$H_n := \frac{\text{Ker}(\partial_{n-1})}{\text{Im}(\partial_n)}.$$

Estos grupos son isomorfos para espacios homeomorfos.

Para el lector que quiera profundizar, una introducción muy visual a la homología se puede encontrar en el libro de Hatcher [6].

Khovanov [9] adaptó la idea de la homología para espacios topológicos a enlaces orientados. La homología definida por Khovanov tiene como pieza fundamental al polinomio de Jones. La idea es expresar este polinomio a partir de los grupos del complejo de cadenas del que partimos para calcular los grupos de homología. Esto lo logramos introduciendo el concepto de **rango** de un **grupo abeliano libre** que veremos a continuación. Este proceso de expresar números naturales o polinomios a partir de propiedades de espacios vectoriales o grupos abelianos se conoce como **categorificación**. Uno de los ejemplos clásicos es la expresión de la característica de Euler de un espacio topológico a partir de sus grupos de homología.

En lo que resta del artículo expondremos una introducción a la homología de Khovanov siguiendo un enfoque combinatorio presentado por Viro [12]. Otro acercamiento a esta teoría de homología, pero que requiere de la introducción de más conceptos algebraicos, es el presentado por Bar-Natan [3]. El primer paso para ello pasa por introducir algunas definiciones de álgebra conmutativa.

Definición 18. Un grupo abeliano A está **finitamente generado** si existen elementos $a_1, a_2, \dots, a_r \in A$ tales que cualquier elemento $a \in A$ se puede expresar como $a = \sum_{i=1}^r n_i a_i$ para algunos $n_i \in \mathbb{Z}$. Sea $0 \in A$ el elemento neutro. Si el hecho de que $\sum_{i=1}^r n_i a_i = 0$ implica que $n_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq r$, diremos que A es **libre** o está **libremente generado** por a_1, \dots, a_r . En este caso, al conjunto de elementos a_1, \dots, a_r se les denomina sistema libre de generadores o base de A . ◀

Ejemplo 19. Sean D un diagrama de un enlace y $s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_r}$ un conjunto de estados de D . Entonces, denominamos grupo abeliano libre generado por los estados $s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_r}$ a

$$C = \{n_1 s_{\alpha_1} + n_2 s_{\alpha_2} + \dots + n_r s_{\alpha_r} : n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}\}. \quad \blacktriangleleft$$

Definición 20. Si A es un grupo abeliano libre finitamente generado por un sistema libre de r generadores, decimos que A tiene rango r y lo denotamos por $\text{rk}(A) = r$. ◀

Ejemplo 21. El rango del grupo abeliano libre C generado por $s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_r}$ es $\text{rk}(C) = r$. ◀

Volviendo a nuestra homología para nudos, sea K un enlace orientado y D un diagrama del enlace. La categorificación del polinomio de Jones de K propuesta por Khovanov consiste en generar una familia de complejos de cadenas $\{C^{i,j}(D)\}_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$, donde al diagrama D le asociamos grupos libres finitamente generados que dependerán de un par de enteros i y j , de manera que los rangos de estos grupos cumplan la igualdad

$$(9) \quad V_K(q) = \sum_{i,j} (-1)^i q^j \text{rk}(C^{i,j}(D)),$$

donde $\text{rk}(C^{i,j}(D))$ denota el rango del grupo $C^{i,j}(D)$. La elección de estos grupos depende del diagrama.

Una vez obtenidos estos grupos, definiremos unos homomorfismos entre ellos que nos permitan construir una serie de complejos de cadenas. Los grupos de homología resultantes de estos complejos serán invariantes de nudos.

4.1. Grupos de cadenas

Vamos a ver qué grupos de cadenas asociamos a un diagrama de nudo. Haciendo uso de las expresiones (4) y (7), podemos expresar el polinomio de Jones de un enlace orientado K a partir de uno de sus diagramas D como

$$(10) \quad V_K(q) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^{|\chi|}} (-1)^{n_- + r_\alpha} q^{r_\alpha + n_+ - 2n_-} (q + q^{-1})^{|\alpha|},$$

donde recordamos que n_- y n_+ son, respectivamente, los números de cruces negativos y positivos de D , $|\alpha|$ es el número de nudos triviales que conforman el estado s_α y $r_\alpha = \sum_{i \in \{1, \dots, |\chi|\}} \alpha_i$.

Cada término del sumatorio de la parte derecha de la expresión (10) corresponde a un estado del diagrama de D . Asociar un grupo de cadenas a cada estado de D no es conveniente, dado que queremos que un grupo de cadenas afecte a una única potencia de q , lo que no conseguiríamos en este caso. Para lograr este objetivo, introducimos una propiedad adicional a los estados para obtener lo que denominamos **estados mejorados**.

Definición 22. Sea D un diagrama de un enlace. Decimos que un **estado mejorado**, que denotaremos con S , es un estado s de D en el cual adicionalmente hemos asignado un signo positivo o negativo a cada uno de los nudos triviales que forman s . ◀

Observación 23. Fijado $\alpha \in \{0,1\}^{|\chi|}$, asociado al estado s_α encontramos $2^{|\alpha|}$ estados mejorados. ◀

La importancia de esta nueva definición es que nos permite expresar el factor $(q + q^{-1})^{|\alpha|}$ a partir de monomios que dependen de los estados mejorados como sigue. El teorema del binomio de Newton nos dice que

$$(11) \quad (q + q^{-1})^{|\alpha|} = \sum_{k=0}^{|\alpha|} \binom{|\alpha|}{k} q^{|\alpha| - k} q^{-k}.$$

Interpretando k en cada estado como el número de nudos triviales con signo negativo, entonces $|\alpha| - k$ será el número de nudos triviales con signo positivo en ese estado y $\binom{|\alpha|}{k}$ es el número de estados mejorados con k y $|\alpha| - k$ nudos triviales negativos y positivos, respectivamente. Este hecho demuestra que

$$(12) \quad (q + q^{-1})^{|\alpha|} = \sum_{S_\alpha} q^{\tau(S_\alpha)},$$

donde el sumatorio se realiza para todos los estados mejorados del estado s_α y $\tau(S_\alpha)$ es la diferencia entre nudos triviales positivos y negativos, que sería el término $|\alpha| - 2k$ correspondiente.

Sustituyendo la igualdad (12) en (10) obtenemos la siguiente expresión para el polinomio de Jones del enlace K a partir del diagrama D :

$$(13) \quad V_K(q) = \sum_S (-1)^{n_- + r(S)} q^{r(S) + n_+ - 2n_- + \tau(S)},$$

donde el sumatorio es para todos los estados mejorados del diagrama D . Obsérvese que los términos n_+ y n_- dependen del diagrama orientado D , mientras que el número de 1-suavizados del estado mejorado, que a partir de ahora denotamos por $r(S)$, y $\tau(S)$ variarán en función del estado mejorado S .

Introducimos la siguiente notación para los exponentes de la expresión (13). Sea S un estado mejorado del diagrama D ; escribimos

$$i(S) = n_- + r(S), \quad j(S) = r(S) + n_+ - 2n_- + \tau(S).$$

Entonces, si denotamos por $C^{i,j}(D)$ al grupo abeliano libre generado por los estados mejorados de D con $i(S) = i$ y $j(S) = j$, podemos expresar el polinomio de Jones de K en función de los rangos de estos grupos de acuerdo a la expresión

$$(14) \quad V_K(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \text{rk}(C^{i,j}(D)).$$

4.2. Paso del complejo de cadenas a la homología

En el apartado anterior obtenemos para un diagrama de nudo D los que serán nuestros grupos de cadenas, los grupos $\{C^{i,j}(D)\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$. Para poder definir la homología de Khovanov trabajaremos con una familia de complejos de cadenas de la forma

$$(15) \quad \dots \longrightarrow C^{i-1,j}(D) \longrightarrow C^{i,j}(D) \longrightarrow C^{i+1,j}(D) \longrightarrow \dots$$

para cada $j \in \mathbb{Z}$. En esta sección definimos homomorfismos $\partial : C^{i,j}(D) \rightarrow C^{i+1,j}(D)$ para cada $i, j \in \mathbb{Z}$ que verifiquen $\partial^2 = 0$ y nos permitan definir los grupos de homología de nuestras cadenas.

Observación 24. Hay que notar que los índices del complejo de cadenas (15) del que obtendremos la homología de Khovanov son crecientes, a diferencia del que introducíamos en (8). Esto se debe a que, en realidad, la homología de Khovanov no es propiamente una homología, sino una cohomología. Aún así, por coherencia con la nomenclatura habitual usaremos el término homología para referirnos a ella. Para conocer más sobre la diferencia entre homología y cohomología remitimos al lector interesado nuevamente al libro de Hatcher [6]. ◀

Para definir el homomorfismo $\partial : C^{i,j}(D) \rightarrow C^{i+1,j}(D)$ basta dar la imagen para los generadores de $C^{i,j}(D)$. Sea S un generador de $C^{i,j}(D)$. Podemos expresar su imagen por ∂ como

$$\partial(S) = \sum_T (S : T)T,$$

donde T son generadores del grupo $C^{i+1,j}$ y $(S : T)$ es un número entero que depende de los estados mejorados S y T . Al valor $(S : T)$ lo denominamos **número de incidencia** de S y T . Los números de incidencia son los valores que nos faltan por determinar para acabar de definir el homomorfismo ∂ . A continuación, daremos unas normas, en forma de propiedades, para determinar el valor de los números de incidencia de dos estados y lo ejemplificaremos calculando todos los números de incidencia cuando S es un estado mejorado del trébol a izquierda. Las dimensiones de este documento nos impiden realizar un cálculo completo de la homología de este nudo. El lector interesado podrá encontrar el cálculo de la homología de Khovanov completa del trébol a derecha (con algunas diferencias de notación) en el trabajo de fin de grado de Rivera Bustos [11].

Sean dos estados mejorados S y T cuyo número de incidencia $(S : T)$ es distinto de cero; entonces diremos que S es **incidente** a T . De ahora en adelante, nos centraremos en establecer unas condiciones para descartar aquellos estados no incidentes. La primera de estas condiciones se desprende de la definición del homomorfismo borde, según la cual, para que un estado S sea incidente a uno T , requerimos que, si S pertenece al grupo de cadenas $C^{i,j}(D)$, el estado T debe pertenecer al grupo $C^{i+1,j}(D)$.

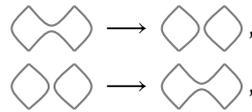
Propiedad 25. *Para que un estado (mejorado) S sea incidente a un estado (mejorado) T necesariamente debe cumplirse que $i(T) = i(S) + 1$ y $j(S) = j(T)$.*

Observación 26. Sean $r(S)$ y $r(T)$ el número de 1-suavizados de S y T , respectivamente. Del hecho de que $i(T) = i(S) + 1$, deducimos que $r(T) = r(S) + 1$. Además, como $j(S) = j(T)$, de lo anterior deducimos que $\tau(T) = \tau(S) - 1$. ◀

Recordemos que la obtención de un estado (mejorado) implicaba la elección de un 0- o 1-suavizado a cada uno de los cruces del diagrama, que representábamos en cada caso como un vector $\alpha \in \{0, 1\}^{|\mathcal{X}|}$. La observación 26 nos dice que el número de 1-suavizados para todo $T \in C^{i+1,j}(D)$ es mayor que el de S en una unidad y nos permite imponer la siguiente restricción para los números de incidencia.

Propiedad 27. *El número de incidencia $(S : T)$ con $S \in C^{i,j}(D)$ y $T \in C^{i+1,j}(D)$ será 0 cuando no se cumpla que la elección de 0- y 1-suavizados de cada uno de los estados (mejorados) coincide en todos los cruces del diagrama D salvo en uno, en el cual en S será un 0-suavizado y en T un 1-suavizado. A dicho cruce lo denotaremos por $x(S : T)$.*

La sustitución de un 0-suavizado por un 1-suavizado que comentamos en la propiedad 27 puede provocar una de las dos modificaciones siguientes en los nudos triviales de los estados:



donde el cruce que se altera es $x(S : T)$. Es decir, o bien uno de los nudos triviales del estado se divide en dos, o bien dos nudos triviales se unen para dar lugar a una única componente conexa. El resto de nudos triviales de los estados no se verán afectados, lo que nos conduce a la siguiente observación sobre los números de incidencia.

Observación 28. Si S es un estado incidente a T , i. e., $(S : T) \neq 0$, entonces el número de nudos triviales de S y T difiere en 1. Se cumple, aplicando la notación que empleábamos en la sección 3.2 ahora a estados mejorados, que $|T| = |S| \pm 1$. ◀

Además, imponemos una última restricción en forma de propiedad a los números de incidencia. En este caso es resultado de la asignación de signos a los nudos triviales de los estados mejorados.

Propiedad 29. *Dados dos estados mejorados S y T , S no será incidente a T a no ser que los nudos triviales comunes, es decir, aquellos que no se ven afectados por la modificación del suavizado del cruce $x(S : T)$, compartan signo en S y T .*

Recogemos todos los casos posibles que se deducen de las restricciones que hemos impuesto para que dos estados sean incidentes en la siguiente propiedad.

Propiedad 30. *Sean $S \in C^{i,j}(D)$ y $T \in C^{i+1,j}(D)$. Entonces, S es incidente a T si se encuentran en uno de los siguientes casos:*

1. $|T| = |S| - 1$, los dos nudos triviales de S que se unen para dar lugar a uno en T tienen signo positivo y el nudo trivial resultante tiene signo positivo.
2. $|T| = |S| - 1$, los dos nudos triviales de S que se unen tienen signo opuesto y el nudo trivial resultante en T tiene signo negativo.
3. $|T| = |S| + 1$, el nudo trivial de S que se divide en dos en T tiene signo negativo y los dos nudos triviales resultantes de la división tienen signo negativo.
4. $|T| = |S| + 1$, el nudo trivial de S que se divide en dos en T tiene signo positivo y los dos nudos triviales resultantes de la división tienen signo opuesto.

Demostración. La prueba de esta propiedad es consecuencia de las observaciones 26 y 28. ■

En definitiva, las propiedades 25, 27 y 29 determinan cuándo dos estados son incidentes o no y nos permiten dar una definición completa del homomorfismo ∂ .

Ejemplo 31. Sea S el estado mejorado obtenido a partir del estado del trébol a izquierda correspondiente a las elecciones de suavizados dada por el vector $(0, 0, 0)$, que ya obteníamos en el ejemplo 17, y en el que le hemos asignado un signo «+» o «-» a cada uno de los tres nudos triviales, y que representamos en la parte superior de la figura 6. Por la propiedad 27, los posibles estados a los que S es incidente son aquellos cuyo vector de suavizados tiene la forma $\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \alpha_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3\}$. En la figura 6 hemos enumerado con letras todos estos posibles estados mejorados.

La propiedad 29 nos reduce el número de posibles estados a los que nuestro estado mejorado S es incidente. Observando en cada caso el nudo trivial que queda invariante, podemos comprobar que el número de incidencia $(S : T)$ será 0 cuando T es uno de los estados a), c), e), g), j) y l). De esta manera, S no es incidente a estos estados mejorados.

Con ayuda de la propiedad 30, podemos determinar por completo a qué estados mejorados es incidente S . Observamos que en nuestro caso se cumple que siempre $|T| = |S| - 1$. Estudiamos entonces qué estados mejorados cumplen las condiciones 1 o 2 de la propiedad 30. Comprobamos que solo los estados d) y h) verifican una de estas dos condiciones. Concluimos que S es incidente únicamente a los estados mejorados d) y h). ◀

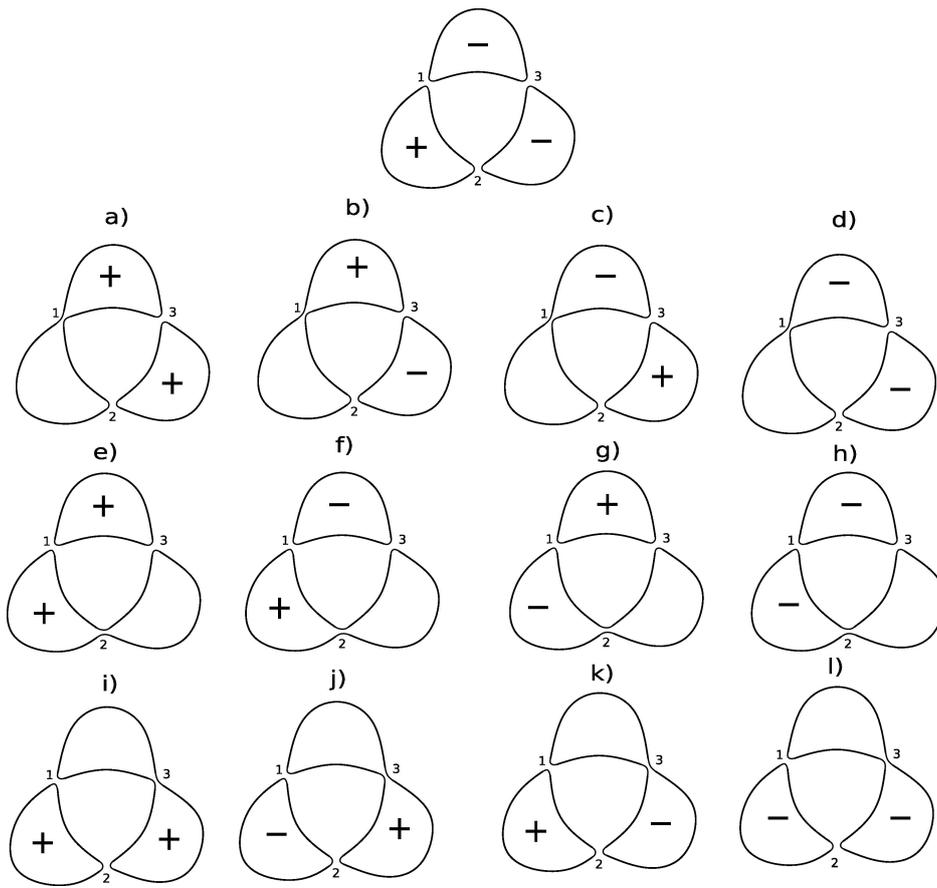


Figura 6: Estado mejorado del trébol a izquierda definido por el vector de suavizados $(0, 0, 0)$, un nudo trivial con signo positivo y dos negativos. Denotados con letras, los posibles estados mejorados incidentes a él. De acuerdo a las propiedades, el estado inicial solo es incidente a d) y h).

Definición 32. Denotando por $S \in C^{i,j}(D)$ y $T \in C^{i+1,j}(D)$ a los generadores de sus respectivos grupos, definimos el homomorfismo $\partial : C^{i,j}(D) \rightarrow C^{i+1,j}(D)$, dando la imagen para los generadores, como

$$\partial(S) = \sum_T (S : T)T,$$

donde $(S : T) = 0$ si S no es incidente a T . Si S es incidente a T , el número de incidencia es $(S : T) = (-1)^l$, donde l es el número de 1 que quedan a la derecha de la posición del cruce $x(S, T)$ en el vector α que se asocia con el estado S (o bien T , pues será el mismo número), esto es, el cardinal de $\{i \in \chi : i > x(S : T), \alpha(i) = 1\}$. El número de incidencia dependerá, por tanto, de la elección en el ordenamiento de los cruces. ◀

Ejemplo 33. Retomando el ejemplo del trébol a izquierda orientado de acuerdo al ejemplo 7, vamos a calcular el homomorfismo $\partial : C^{3,-7}(D) \rightarrow C^{4,-7}(D)$. Observamos que el número de cruces negativos de nuestro diagrama es $n_- = 3$ y el de positivos, $n_+ = 0$. De aquí deducimos que los únicos estados mejorados con $i = 3$ son aquellos cuyo vector de suavizados es $(0, 0, 0)$. Por tanto, el grupo de cadenas $C^{3,-7}(D)$ es el grupo abeliano libre generado por los estados mejorados con vector de suavizado $(0, 0, 0)$ y las tres mejoras posibles de asociar una etiqueta positiva a un nudo trivial y dos negativas a los restantes. Uno de estos estados mejorados es el estado S del ejemplo 31 y, puesto que los otros dos casos son simétricos, nos centraremos en calcular los números de incidencia para el generador S .

Para calcular el homomorfismo que nos proponemos, necesitamos por tanto conocer los números de incidencia de los estados a los que S es incidente. Vemos en el ejemplo 31 que estos estados son los que enumeramos con d) y h) en la figura 6, y que denotamos ahora por T_d y T_h , respectivamente.

Calculamos primero $(S : T_d)$. Tenemos en cuenta que el cruce $x(S : T_d)$ es el cruce 1. Como el vector de suavizados asociado a S es $(0, 0, 0)$, vemos que no tenemos ningún 1 a la derecha de la primera posición. Tendremos que $(S : T_d) = (-1)^0 = 1$. El cruce $x(S : T_h)$ es el cruce 2. Tampoco hay unos a la derecha de la segunda posición en el vector de suavizados de S . Concluimos que igualmente $(S : T_h) = 1$.

En definitiva, la imagen de S es

$$\partial(S) = T_d + T_h.$$

El homomorfismo $\partial : C^{3,-7}(D) \rightarrow C^{4,-7}(D)$ quedará determinado por la imagen de S junto con la de los otros dos generadores de $C^{3,-7}(D)$. De manera similar, se comprueba que las imágenes de estos otros generadores son las siguientes. Para el generador S' , que se obtiene de realizar la asignación de signo de sus nudos triviales de manera que coincide con rotar los signos de S una posición en sentido horario, la imagen por el homomorfismo borde será

$$\partial(S') = T_l + T_h.$$

El generador S'' , que se obtiene de realizar la asignación de signo de sus nudos triviales de manera que coincide con rotar los signos de S una posición en sentido antihorario, la imagen por el homomorfismo borde será

$$\partial(S'') = T_l + T_d. \quad \blacktriangleleft$$

Proposición 34. *El homomorfismo ∂ verifica que $\partial^2 = 0$.*

Demostración. Una demostración de este hecho se puede encontrar en el artículo de Viro [12]. ■

Como consecuencia, dado un enlace orientado K y un diagrama D del mismo, ya podemos asegurar que, para cada $j \in \mathbb{Z}$,

$$(16) \quad \dots \longrightarrow C^{i-1,j}(D) \xrightarrow{\partial} C^{i,j}(D) \xrightarrow{\partial} C^{i+1,j}(D) \longrightarrow \dots$$

es un complejo de cadenas y podemos calcular sus grupos de homología.

Definición 35. Sea K un enlace orientado y D , uno de sus diagramas. Llamamos grupos de homología de Khovanov del diagrama D , y los denotamos por $H^{i,j}(D)$ con $i, j \in \mathbb{Z}$, a los grupos de homología obtenidos de los complejos de cadenas (16):

$$H^{i,j}(D) = \frac{\text{Ker}(\partial : C^{i,j}(D) \rightarrow C^{i+1,j}(D))}{\text{Im}(\partial : C^{i-1,j}(D) \rightarrow C^{i,j}(D))}. \quad \blacktriangleleft$$

Ejemplo 36. Vamos a calcular uno de los grupos de homología de nuestro diagrama del trébol a izquierda: el grupo $H^{3,-7}(D)$. Este grupo es el grupo cociente

$$H^{3,-7}(D) = \frac{\text{Ker}(\partial_{3,-7})}{\text{Im}(\partial_{2,-7})},$$

donde $\partial_{3,-7}$ es el homomorfismo borde $\partial_{3,-7} : C^{3,-7}(D) \rightarrow C^{4,-7}(D)$ y $\partial_{2,-7}$ es el homomorfismo borde $\partial_{2,-7} : C^{2,-7}(D) \rightarrow C^{3,-7}(D)$. Es evidente que, puesto que $n_- = 3$, el grupo $C^{2,-7}(D)$ es el grupo nulo, con lo cual $\partial_{2,-7} = 0$ y, con ello, $\text{Im}(\partial_{2,-7}) = 0$. El homomorfismo $\partial_{3,-7}$ lo estudiábamos en el ejemplo 33, donde lo definíamos dando la imagen de los generadores de $C^{3,-7}(D)$.

Ahora, nos preguntamos qué forma tienen los estados mejorados $R \in C^{3,-7}(D)$ que verifiquen $\partial_{3,-7}(R) = 0$. Para ello, expresamos R en función de los generadores de su grupo de cadenas: existirán números enteros t, t' y t'' de manera que podemos expresar R como $R = tS + t'S' + t''S''$. Así, la imagen de R por $\partial_{3,-7}$ queda

$$\partial_{3,-7}(R) = t\partial(S) + t'\partial(S') + t''\partial(S'').$$

Recurriendo a los cálculos realizados en el ejemplo 33,

$$\partial_{3,-7}(R) = t(T_d + T_h) + t'(T_l + T_h) + t''(T_l + T_d) = (t + t')T_h + (t' + t'')T_l + (t + t'')T_d,$$

por lo que la única solución a la igualdad $\partial_{3,-7}(R) = 0$ se obtiene si $t = t' = t'' = 0$. De aquí deducimos que $\text{Ker}(\partial_{3,-7}) = 0$, con lo cual el grupo de homología $H^{3,-7}(D)$ es también el grupo nulo: $H^{3,-7}(D) = 0$. ◀

Obsérvese que, en un principio, hemos definido los grupos de homología de Khovanov en función de un diagrama D . A continuación enunciamos el teorema principal de esta sección. Este importante resultado dado por Khovanov [9] nos permite definir los grupos de Khovanov para nudos y enlaces y comprobar que son invariantes de nudos.

Teorema 37. Sean D y D' dos diagramas de nudos o enlaces que se diferencian en un único movimiento de Reidemeister. Entonces, sus respectivos grupos de homología de Khovanov son isomorfos.

Corolario 38. Sea K un nudo o enlace orientado. Sus grupos de homología de Khovanov, que denotamos como $\{H^{i,j}(K)\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$, son invariantes de nudos y enlaces.

En definitiva, la homología de Khovanov se basa en el polinomio de Jones para construir un nuevo invariante de nudos y enlaces. La gran importancia de esta teoría de homología, que veremos en la próxima sección, es que no se limita a darnos la misma información que el polinomio de Jones, sino que además nos aporta nueva información sobre los nudos y enlaces para los que la calculemos.

5. Conclusión

Debido a su estrecha relación con el polinomio de Jones, podría parecer que la homología de Khovanov es el mismo invariante de nudos que el polinomio de Jones, es decir, nudos con el mismo polinomio de Jones tienen los mismos grupos de homología de Khovanov. Sin embargo, este no es el caso. La homología de Khovanov resulta ser un invariante de nudos y enlaces orientados más fuerte que el polinomio de Jones.

Existe una extensión del concepto de rango, que definíamos para grupos abelianos libres finitamente generados, a grupos abelianos finitamente generados no necesariamente libres, como es el caso de los grupos de homología de Khovanov. Así, se puede demostrar que la expresión que obteníamos para los grupos de cadenas en (14) puede ser reescrita por medio de los grupos de homología de Khovanov quedando

$$(17) \quad V_K(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \text{rk}(H^{i,j}).$$

De esta expresión deducimos que nudos con los mismos grupos de homología de Khovanov tendrán el mismo polinomio de Jones. Sin embargo, el recíproco no es cierto, convirtiendo a la homología de Khovanov en un invariante más fuerte que el polinomio de Jones. Algún ejemplo de nudos con mismo polinomio de Jones y distinta homología de Khovanov se puede encontrar en el artículo de Bar-Natan [3]. Otro avance de la homología de Khovanov es el hecho de que permite caracterizar el nudo trivial. No habrá otros nudos o enlaces cuyos grupos $\{H^{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$ sean isomorfos a los del nudo trivial. Sin embargo, es desconocido si esto es cierto para el polinomio de Jones. Aún así, y a pesar de su mejora, la homología de Khovanov sigue sin ser un invariante de nudos completo. Podemos encontrar nudos no equivalentes que comparten los mismos grupos de homología.

En 2011, el físico y también ganador de una Medalla Fields Edward Witten impartía una charla en el *Institute of Advanced Studies* de Princeton titulada *Knots and Quantum Theory* [13]. En ella hablaba, entre otras cosas, de la homología de Khovanov y reflexionaba sobre la diferencia que existe en matemáticas entre saber que «algo» es verdad y saber «por qué» es verdad. A pesar de que sabemos que la homología de Khovanov es una herramienta computable, útil y potente para estudiar la equivalencia de nudos y enlaces orientados, y de los muchos resultados surgidos sobre ella, aún no somos capaces de entender realmente la naturaleza de esta teoría y sus implicaciones tanto para la teoría de nudos y la topología como para la física cuántica, como menciona Witten en su ponencia.

Por último, para concluir este artículo, recogemos la cita original de Edward Witten antes mencionada:

Unfortunately, it is not easy to explain to someone who does not work in mathematics or physics or an allied field the difference between knowing «what» is true and knowing «why» it is true. Yet the beauty of the «why» answer is much of the reason that people do mathematics.

Referencias

- [1] ARTAL BARTOLO, Enrique y LOZANO IMÍZCOZ, María Teresa. «Sir Vaughan Frederick Randal Jones». En: *La Gaceta de la RSME* 14.3 (2011), págs. 579-591. URL: <https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1022>.
- [2] ASAEDA, Marta y KHOVANOV, Mikhail. «Notes on link homology». En: *Low dimensional topology*. Ed. por Mrowka, Tomasz R. y Ozsváth, Peter S. IAS/Park City Mathematical Series 15. Providence: American Mathematical Society, 2009, págs. 139-195. <https://doi.org/10.1090/pcms/015/06>.
- [3] BAR-NATAN, Dror. «On Khovanov's categorification of the Jones polynomial». En: *Algebraic & Geometric Topology* 2 (2002), págs. 337-370. ISSN: 1472-2747. <https://doi.org/10.2140/agt.2002.2.337>.
- [4] BURDE, Gerhard; ZIESCHANG, Heiner, y HEUSENER, Michael. *Knots*. Studies in Mathematics 5. Berlín: De Gruyter, 2013. <https://doi.org/10.1515/9783110270785>.
- [5] GILBERT, Nick D. y PORTER, Timothy. *Knots and surfaces*. Oxford Science Publications. Oxford: Oxford University Press, 1994. ISBN: 978-0-19-853397-9.
- [6] HATCHER, Allen. *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN: 978-0-521-79540-1. URL: <http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>.
- [7] JONES, Vaughan F. R. «A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras». En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 12.1 (1985), págs. 103-111. <https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1985-15304-2>.
- [8] KAUFFMAN, Louis H. «State models and the Jones polynomial». En: *Topology. An International Journal of Mathematics* 26.3 (1987), págs. 395-407. ISSN: 0040-9383. [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(87\)90009-7](https://doi.org/10.1016/0040-9383(87)90009-7).
- [9] KHOVANOV, Mikhail. «A categorification of the Jones polynomial». En: *Duke Mathematical Journal* 101.3 (2000), págs. 359-426. ISSN: 0012-7094. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-00-10131-7>.
- [10] MURASUGI, Kunio. *Knot theory and its applications*. Boston: Birkhäuser, 1996. <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4719-3>.
- [11] RIVERA BUSTOS, Ana Alicia. *Homología de Khovanov*. Trabajo de Fin de Grado. Universidad de Sevilla, 2018. URL: <https://hdl.handle.net/11441/79504>.
- [12] VIRO, Oleg. «Khovanov homology, its definitions and ramifications». En: *Fundamenta Mathematicae* 184 (2004), págs. 317-342. ISSN: 0016-2736. <https://doi.org/10.4064/fm184-0-18>.
- [13] WITTEN, Edward. *Knots and Quantum Theory*. Video. 2010. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=cuJY14BYac4>.