

TEMat

Funciones armónicas en \mathbb{R}^n

Alba Crespo Pérez
Universidad de La Laguna
alu0100846461@ull.edu.es

Resumen: En este trabajo presentamos algunas propiedades básicas de las funciones armónicas en \mathbb{R}^n (aquellas $u \in C^2$ tales que $\Delta u = 0$), tales como la propiedad de la media, el principio del máximo, el problema de Dirichlet y algunos resultados relacionados con el problema de uno y dos radios, para terminar con el lema de regularidad de Weyl.

Abstract: In this work we present some basic properties for harmonic functions on \mathbb{R}^n (those $u \in C^2$ such that $\Delta u = 0$), such as the mean value property, the maximum principle, Dirichlet's problem and some results related to the one and two radius problem, to finish with Weyl's regularity lemma.

Palabras clave: funciones armónicas, propiedad de la media, principio del máximo, núcleo de Poisson, problema de Dirichlet, problemas de uno y dos radios, lema de Weyl.

MSC2010: 31B05, 35B05.

Recibido: 22 de abril de 2020.

Aceptado: 12 de octubre de 2020.

Agradecimientos: Gracias en especial al Prof. Manuel Tomás Flores Mederos, por haberme guiado siempre con sabiduría y mano experta por el maravilloso mundo de las matemáticas. Agradezco también a los revisores de TEMat sus valiosos consejos durante la revisión de este artículo.

Y gracias, sobre todo, a mi madre, por hacer con su magia que todo haya sido posible.

Referencia: CRESPO PÉREZ, Alba. «Funciones armónicas en \mathbb{R}^n ». En: *TEMat*, 5 (2021), págs. 17-34. ISSN: 2530-9633.
URL: <https://temat.es/articulo/2021-p17>.

1. Introducción

En el presente trabajo profundizaremos en las propiedades básicas de las funciones armónicas, es decir, aquellas que satisfacen que $\Delta u = 0$, donde Δ es el operador de Laplace

$$\Delta = \nabla^2 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Entre ellas se encuentran la propiedad de la media y el principio del máximo. En este último se ha basado la definición relativamente reciente de *soluciones viscosas* para operadores no lineales más generales.

Tras caracterizar el operador de Laplace mediante sus propiedades de invarianza, a lo largo de la sección 3 caracterizaremos las funciones armónicas vía la propiedad del valor medio y terminaremos con el lema de regularidad de Weyl, que refleja el carácter elíptico de Δ .

La sección 4.1 debe considerarse independiente del resto del trabajo. La razón de incluirla ha sido para completarlo con algunos resultados (unos actuales y otros no tanto) que, aunque clásicos, no se suelen incluir en los contenidos estándar sobre este tipo de materia. Es aquí donde usamos las funciones de Bessel y algunas de sus propiedades. Puesto que nuestro objetivo es fundamentalmente expositivo, no incluiremos las pruebas de estas propiedades (algunas nada triviales).

2. El operador de Laplace

El *operador de Laplace* o *laplaciano* es quizás el operador diferencial más importante de todos los operadores en derivadas parciales, no solo por sus aplicaciones sino por el papel que juega en fenómenos más generales. Está definido por

$$\Delta = \nabla^2 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Aquí, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \dots, \partial/\partial x_n)$ denota el operador *gradiente* y $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$, el producto interior formal. Recuérdese también que si $\vec{V} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ es un campo de vectores de clase C^1 en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, la divergencia de \vec{V} se denota formalmente por $\nabla \cdot \vec{V}$ y se define como $\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial V_n}{\partial x_n}$. Así, formalmente,

$$\Delta u = \nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

La electrostática proporciona un marco físico en el que presentar el operador de Laplace: de acuerdo con las ecuaciones de Maxwell, un campo electrostático \vec{E} en el espacio (un campo que representa la fuerza sobre una unidad de carga positiva) está relacionado con la densidad de carga f por la ecuación $\nabla \cdot \vec{E} = f$ y también satisface que $\nabla \times \vec{E} = 0$ (en n dimensiones, $\nabla \times \vec{E}$ denota la matriz antisimétrica $(\frac{\partial E_j}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_j})_{i,j}$). La última condición significa que, al menos localmente, $\vec{E} = -\nabla u$ para alguna función u llamada *potencial electrostático*. Así se tiene que $-\Delta u = \nabla \cdot \vec{E} = f$ y, por tanto, el laplaciano relaciona el potencial con la densidad de carga.

2.1. Propiedades de invarianza

Una de las propiedades fundamentales del laplaciano es que conmuta con traslaciones y rotaciones y genera el anillo de operadores diferenciales con esta propiedad. De aquí que aparezca en procesos físicos cuya física subyacente sea homogénea (independiente de la posición) e isotrópica (independiente de la dirección).

Los operadores diferenciales que consideramos en esta sección son de la forma

$$(1) \quad L[u](x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x),$$

donde $m = 1, 2, \dots$ es un entero positivo, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ es una n -tupla de enteros no negativos, $|\alpha| = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|$, $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

L tiene orden m si $a_\alpha \neq 0$ para algún α con $|\alpha| = m$. Si para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ denotamos $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, a tales operadores se les puede asociar el polinomio con coeficientes variables $P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ (llamado *símbolo de L*) y, formalmente, (1) se escribe como $L = P(x, \partial)$. En caso de que las funciones a_α sean constantes y $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$, el operador con coeficientes constantes asociado se denota por $L = P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$.

Que el operador definido en (1) conmute con traslaciones y rotaciones significa que $L[u \circ \psi] = L[u] \circ \psi$ para toda traslación o rotación ψ en \mathbb{R}^n . De hecho, que L sea invariante por traslaciones equivale a que presente coeficientes constantes. En efecto, si $\tau_y(x) := x + y$ denota la traslación por $y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$[L(u \circ \tau_y)](\cdot) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\cdot) [\partial^\alpha (u \circ \tau_y)](\cdot) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\cdot) [(\partial^\alpha u) \circ \tau_y](\cdot),$$

mientras que

$$[(Lu) \circ \tau_y](\cdot) = \sum_{|\alpha| \leq m} [a_\alpha \circ \tau_y](\cdot) [(\partial^\alpha u) \circ \tau_y](\cdot).$$

Esto implica que $a_\alpha = a_\alpha \circ \tau_y$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$ y, por tanto, $a_\alpha(x) \equiv a_\alpha$ es constante si $|\alpha| \leq m$.

De igual forma, que L conmute con rotaciones significa que $L[u \circ \varrho_O] = L[u] \circ \varrho_O$ para toda $O \in \mathfrak{o}_n$, donde ϱ denota la acción del grupo ortogonal \mathfrak{o}_n (aquel formado por todas las matrices cuadradas O de orden n tales que $O^T O = I$) en \mathbb{R}^n , dada por $\varrho_O(x) = O(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

El hecho aludido anteriormente de que el laplaciano genera el anillo de los operadores diferenciales que conmutan con traslaciones y rotaciones es el contenido del siguiente teorema.

Teorema 1. *Sea L un operador diferencial en derivadas parciales en \mathbb{R}^n como en (1). Entonces, L conmuta con traslaciones y rotaciones si y solo si L es un polinomio en Δ , esto es, $L = \sum_j a_j \Delta^j$, donde la suma es finita y $a_j \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Un operador $L = P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ con coeficientes constantes (por lo dicho antes, ahora este es el caso general) conmuta con rotaciones si

$$(2) \quad L(u \circ \varrho_O) = (Lu) \circ \varrho_O$$

para todo $O \in \mathfrak{o}_n$. Pero si $\omega \in \mathbb{R}^n$, para $u = e_\omega$ donde $e_\omega(x) := e^{\omega \cdot x}$, tenemos que

$$(Le_\omega) \circ \varrho_O = (P(\omega)e_\omega) \circ \varrho_O = P(\omega)[e_\omega \circ \varrho_O]$$

y

$$\begin{aligned} L(e_\omega \circ \varrho_O) &= L(e_{O^T(\omega)}) = P(O^T(\omega))e_{O^T(\omega)} \\ &= P(O^T(\omega))[e_\omega \circ \varrho_O] \end{aligned}$$

ya que, como se puede comprobar fácilmente, $e_\omega \circ \varrho_O = e_{O^T(\omega)}$. Así, que L sea \mathfrak{o}_n -invariante equivale a decir que $P(O^T(\omega)) = P(\omega)$ para todo $O \in \mathfrak{o}_n$ y $\omega \in \mathbb{R}^n$ (basta con evaluar (2) en $x = 0$), esto es, P debe ser radial. Puesto que la acción de \mathfrak{o}_n conserva la descomposición homogénea de polinomios, podemos, sin pérdida de generalidad, suponer que $P = P_s$ es homogéneo de grado s . Esto implica que $P_s(\xi) = c|\xi|^s$ con s par (P_s es un polinomio) y, por tanto, el polinomio original es de la forma

$$P(\xi) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} a_k |\xi|^{2k} = Q(|\xi|^2)$$

con

$$Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} a_j \lambda^j.$$

Así, $L = Q(\Delta) = \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} a_j \Delta^j$.

Para el recíproco será suficiente probar (2) para $L = \Delta$. Si $O = (o_{ij})_{i,j} \in \mathfrak{o}_n$ es ortogonal, entonces

$$\frac{\partial(u \circ \varrho_O)}{\partial x_k}(x) = \sum_{j=1}^n o_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j}(O(x))$$

y, de igual forma,

$$\frac{\partial^2(u \circ \varrho_O)}{\partial x_k^2}(x) = \sum_{j,\ell=1}^n o_{jk} o_{\ell k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_\ell}(O(x))$$

si $k = 1, 2, \dots, n$. Por tanto,

$$\begin{aligned} [\Delta(u \circ \varrho_O)](x) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2(u \circ \varrho_O)}{\partial x_k^2}(x) = \sum_{k,j,\ell=1}^n o_{jk} o_{\ell k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_\ell}(O(x)) = \sum_{j,\ell=1}^n \left(\sum_{k=1}^n o_{jk} o_{\ell k} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_\ell}(O(x)) \\ &= \sum_{j,\ell=1}^n \delta_{j\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_\ell}(O(x)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(O(x)) = \Delta u(O(x)) = [(\Delta u) \circ \varrho_O](x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Puesto que el laplaciano conmuta con rotaciones, conserva la clase de las funciones radiales, sobre la que se reduce a un operador diferencial ordinario conocido como la *parte radial* del laplaciano.

Proposición 2. Si $u(x) = f(r)$, donde $r = |x|$ es una función C^2 radial en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ($f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es C^2 en $(0, +\infty)$), entonces

$$\Delta u(x) = f''(r) + \frac{(n-1)}{r} f'(r).$$

Demostración. Puesto que $\partial r / \partial x_j = x_j / r$, tenemos que

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{x_j}{r} f'(r) \right] = \sum_{j=1}^n \left[\frac{x_j^2}{r^2} f''(r) + \left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3} \right) f'(r) \right] = f''(r) + \frac{(n-1)}{r} f'(r). \quad \blacksquare$$

Corolario 3. Si $u(x) = f(r)$ es como en la proposición anterior, entonces u satisface la ecuación $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si y solo si

$$f(r) = \begin{cases} a + b \ln r & \text{si } n = 2, \\ a + br^{2-n} & \text{si } n > 2, \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes.

Demostración. Por la proposición 2, $\Delta u = 0$ significa que $f''(r) + \frac{(n-1)}{r} f'(r) = 0$, por lo que, tras multiplicar por el factor integrante r^{n-1} , tenemos que $\frac{d}{dr} [r^{n-1} f'(r)] = 0$. Así, $f'(r) = cr^{1-n}$, y el corolario se deduce sin más que integrar tomando $b = \frac{c}{2-n}$ para $n > 2$ y $b = c$ si $n = 2$. \blacksquare

3. Propiedades básicas de las funciones armónicas

Una función $u \in C^2(\Omega)$ se dice *armónica* en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si $\Delta u = 0$ en Ω .

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado que suponemos con frontera regular y positivamente orientada, esto es, de modo que $\partial\Omega$ es una hipersuperficie regular orientada por su normal unitaria exterior \vec{n} . Recordamos el teorema de Gauss [18] (véase también el libro de Flores y Sadarangani [6, teorema 6.37]).

Teorema 4 (teorema de Gauss o de la divergencia). Si $\vec{V} \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, entonces

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{V} \, dx = \int_{\partial\Omega} \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS$$

donde dx es el «elemento diferencial de volumen» y dS , el «elemento diferencial de área».

Teorema 5 (identidades de Green). Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado con frontera regular y u, v son dos funciones C^2 y C^1 en $\overline{\Omega}$, respectivamente, entonces

$$(3) \quad \int_{\partial\Omega} v \partial_{\vec{n}} u \, dS = \int_{\Omega} (v \Delta u + \nabla v \cdot \nabla u) \, dx.$$

Si además $v \in C^2(\Omega)$,

$$(4) \quad \int_{\partial\Omega} (v \partial_{\vec{n}} u - u \partial_{\vec{n}} v) \, dS = \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx.$$

Demostración. (3) no es más que el teorema 4 aplicado al campo $\vec{V} = v \nabla u$. Ahora (4) se sigue de (3) restando tras intercambiar u y v . ■

Corolario 6 (teorema integral de Gauss). Si u es una función armónica en Ω , entonces

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{\vec{n}} u \, dS = 0.$$

Demostración. Basta tomar $v = 1$ en (3) o (4). ■

3.1. La propiedad del valor medio

Si $d\sigma$ denota la medida de Lebesgue invariante por rotaciones en $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}_n$ (la esfera y la bola unidad, respectivamente) normalizada de modo que $\sigma(\mathbb{S}^{n-1}) = 1$, el siguiente análogo multidimensional del lema 4.4.10 del libro de Berenstein y Gay [3] (véase también la proposición 2.6 del trabajo de Maciá Medina [15]) demuestra que el laplaciano de una función C^2 se puede recuperar a partir de sus medias esféricas.

Proposición 7. Si $u \in C^2(\mathbb{B}_n)$, entonces

$$(5) \quad \Delta u(0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2n}{r^2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (u(r\zeta) - u(0)) \, d\sigma(\zeta).$$

Demostración. Atendiendo al desarrollo de Taylor, para $\zeta \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $0 < r < 1$,

$$u(r\zeta) = u(0) + r \nabla u(0) \cdot \zeta + \frac{r^2}{2} (\mathcal{H}u(0)\zeta) \cdot \zeta + o(r^2),$$

donde $\mathcal{H}u(0)$ denota la matriz hessiana de u evaluada en $x = 0$. Integrando,

$$(6) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(r\zeta) \, d\sigma(\zeta) &= u(0) + r \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(0) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_j \, d\sigma(\zeta) + \frac{r^2}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(0) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_j \zeta_k \, d\sigma(\zeta) + o(r^2) \\ &= u(0) + \frac{r^2}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(0) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_j^2 \, d\sigma(\zeta) + o(r^2) = u(0) + \frac{r^2}{2n} \Delta u(0) + o(r^2) \end{aligned}$$

ya que, si $j = 1, 2, \dots, n$ y $j \neq k$,

$$(7) \quad \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_j \, d\sigma(\zeta) = 0,$$

$$(8) \quad \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_j^2 \, d\sigma(\zeta) = \frac{1}{n} \quad \text{y}$$

$$(9) \quad \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_j \zeta_k \, d\sigma(\zeta) = 0.$$

Para ver esto, obsérvese que la función

$$(10) \quad \begin{aligned} Q(x) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (\zeta \cdot x)^2 d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\sum_{j=1}^n \zeta_j x_j \right)^2 d\sigma(\zeta) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_j^2 d\sigma(\zeta) \right) x_j^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_j \zeta_k d\sigma(\zeta) \right) x_j x_k \end{aligned}$$

es radial puesto que, para toda transformación ortogonal $O \in \mathfrak{o}_n$,

$$\begin{aligned} Q(Ox) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (\zeta \cdot (Ox))^2 d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} ((O^T \zeta) \cdot x)^2 d\sigma(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (\zeta \cdot x)^2 d\sigma(\zeta) = Q(x) \end{aligned}$$

porque σ es invariante por rotaciones. De la expresión (10), (9) es evidente (los coeficientes de los monomios mixtos $x_j x_k$ para $j \neq k$ deben anularse). Además, como para cada $1 \leq i < j \leq n$ la transformación $T_{ij}(\zeta_1, \dots, \zeta_i, \dots, \zeta_j, \dots, \zeta_n) = (\zeta_1, \dots, \zeta_j, \dots, \zeta_i, \dots, \zeta_n)$ preserva la medida σ , tenemos que

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_1^2 d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_2^2 d\sigma(\zeta) = \dots = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_n^2 d\sigma(\zeta)$$

y, por tanto,

$$n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_j^2 d\sigma(\zeta) = \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_k^2 d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\zeta|^2 d\sigma(\zeta) = \sigma(\mathbb{S}^{n-1}) = 1$$

para todo $j = 1, 2, \dots, n$. Esto prueba (8). El razonamiento para ver (7) es similar: basta considerar la función

$$\tilde{Q}(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta \cdot x d\sigma(\zeta) = \sum_{j=1}^n \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_j d\sigma(\zeta) \right) x_j,$$

que, por la misma razón, también es radial. Puesto que \tilde{Q} es lineal y $\tilde{Q}(0) = 0$, tenemos que $\tilde{Q} \equiv 0^1$. Ahora (5) se sigue haciendo $r \rightarrow 0^+$ en (6) (recuérdese que $\sigma(\mathbb{S}^{n-1}) = 1$). ■

Ejemplo 8. Si $n = 2$, (5) se reduce al lema 4.4.10 en el libro de Berenstein y Gay [3]. En notación compleja, $z = re^{i\theta}$ se reduce a

$$\Delta u(0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{4}{r^2} \int_0^{2\pi} (u(re^{i\theta}) - u(0)) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Para $n = 3$, la medida $d\sigma$ en coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \text{sen } \varphi \cos \theta, \\ y = \text{sen } \varphi \text{sen } \theta, \\ z = \cos \varphi, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

tiene la expresión

$$d\sigma(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \frac{\text{sen } \varphi}{4\pi} d\theta d\varphi.$$

La identidad (5) se convierte así en

$$\Delta u(0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{3}{2\pi r^2} \int_0^\pi \text{sen } \varphi \left(\int_0^{2\pi} u(r \text{sen } \varphi \cos \theta, r \text{sen } \varphi \text{sen } \theta, r \cos \varphi) d\theta \right) d\varphi. \quad \blacktriangleleft$$

¹Esto también es consecuencia inmediata de que la función $\zeta \rightarrow \zeta_j$ es impar en \mathbb{S}^{n-1} .

El siguiente teorema establece que el valor de una función armónica en un punto coincide con su valor medio sobre cualquier esfera centrada en dicho punto.

Teorema 9 (del valor medio). *Sea u una función armónica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si $x \in \Omega$ y además $0 < r < \text{dist}(x, \partial\Omega)$, entonces*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|\zeta-x|=r} u(\zeta) \, dS(\zeta) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\zeta|=1} u(x+r\zeta) \, dS(\zeta) = \int_{|\zeta|=1} u(x+r\zeta) \, d\sigma(\zeta).$$

Aquí, $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ denota el área de la esfera unidad en \mathbb{R}^n (véase el libro de Flores y Sadarangani [6, ejercicio 4.28], aunque allí ω_n denota el volumen de \mathbb{B}_n) y Γ , la función de Euler

$$(11) \quad \Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} \, dt, \quad p > 0.$$

Demostración. Primero obsérvese que la segunda igualdad se sigue de la primera haciendo el cambio de variables $\zeta \rightarrow x+r\zeta$, que la tercera es otra forma de reescribir la segunda ($d\sigma = dS/\omega_n$) y que, componiendo con una traslación, podemos suponer que $x = 0$. Para probar la primera usaremos el teorema integral de Gauss (corolario 6). Si

$$\Theta(r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\zeta|=1} u(r\zeta) \, dS(\zeta),$$

entonces

$$\Theta'(r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\zeta|=1} \zeta \cdot \nabla u(r\zeta) \, dS(\zeta) \underset{\eta=r\zeta}{=} \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|\eta|=r} \partial_{\vec{n}} u(\eta) \, dS(\eta) = 0.$$

Esto implica que Θ es constante y, por tanto,

$$u(0) = \Theta(0) = \Theta(r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\zeta|=1} u(r\zeta) \, dS(\zeta). \quad \blacksquare$$

Integrando en r , podemos enunciar la siguiente versión del teorema 9 en volumen.

Corolario 10. *Si Ω , u y $r > 0$ son como en el teorema 9, entonces*

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{|y|\leq r} u(x+y) \, dy = \frac{n}{\omega_n} \int_{|y|\leq 1} u(x+ry) \, dy.$$

Demostración. El resultado sigue sin más que multiplicar la relación

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\zeta|=1} u(x+\varrho\zeta) \, dS(\zeta)$$

por ϱ^{n-1} e integrar para $0 \leq \varrho \leq 1$ tras aplicar la generalización de la fórmula de integración en polares

$$(12) \quad \int_{|x|\leq r} v(x) \, dx = \int_0^r \varrho^{n-1} \left(\int_{|\zeta|=1} v(\varrho\zeta) \, dS(\zeta) \right) d\varrho,$$

válida, por ejemplo, para cualquier función continua v [8, theorem 2.49]. La última igualdad se obtiene realizando el cambio de variables $y \rightarrow ry$. ■

Observación 11. (a) Nótese que el factor n/ω_n en el corolario 10 coincide con $1/|\mathbb{B}_n|$ (el volumen n -dimensional de \mathbb{B}_n). Esto sigue de (12) con $v = 1$ y $r = 1$.

(b) Puesto que $d\sigma = dS/\omega_n$, la fórmula (5) muestra que para funciones C^2 el recíproco del teorema 9 también es cierto. De hecho, bastaría con que a cada $x \in \Omega$ correspondiera una sucesión de radios $0 < r_j < \text{dist}(x, \partial\Omega)$, $j = 1, 2, \dots$, tales que $r_j \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$ para los que

$$(13) \quad u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\zeta|=1} u(x+r_j\zeta) \, dS(\zeta), \quad j = 1, 2, \dots \quad \blacktriangleleft$$

El siguiente resultado es el análogo armónico del teorema 1.2.4 del libro de Hörmander [13] (véase también el trabajo de Maciá Medina [15, teorema 1.10]).

Corolario 12. *Sea u una función armónica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Para todo compacto $K \subset \Omega$ y todo entorno abierto $U \subset \Omega$ de K existe $C > 0$ (que solo depende de K y U pero no de u) tal que*

$$\sup_K |u| \leq C \|u\|_{L^1(U)}.$$

Demostración. Sea $\delta < \text{dist}(K, \partial U)/2$. Si $x_0 \in K$ y $|x - x_0| \leq \delta$, por el corolario 10 tenemos que

$$|u(x)| \leq \frac{n}{\omega_n \delta^n} \int_{|y| \leq \delta} |u(x+y)| dy \leq \frac{n}{\omega_n \delta^n} \int_U |u(y)| dy = \frac{n}{\omega_n \delta^n} \|u\|_{L^1(U)}. \quad \blacksquare$$

Observación 13. El corolario 12 muestra que, para sucesiones de funciones armónicas, la convergencia uniforme en compactos es equivalente a la convergencia en L^1_{loc} , es decir, en L^1 sobre compactos. Otra forma de decir esto es que las correspondientes topologías sobre el espacio de funciones armónicas coinciden. De hecho, ¡cualquier topología «medianamente razonable» que se considere en el espacio de funciones armónicas implica convergencia uniforme en compactos!² ◀

3.2. El recíproco del teorema del valor medio

El siguiente teorema muestra que la hipótesis de regularidad en la observación 11(b) puede relajarse sustancialmente.

Teorema 14. *Supongamos que u sea continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y que*

$$(14) \quad u(x) = \int_{|\zeta|=1} u(x+r\zeta) d\sigma(\zeta)$$

para todo $x \in \Omega$ y todo $0 < r < \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Entonces, $u \in C^\infty(\Omega)$ y es armónica en Ω .

Demostración. De acuerdo con la observación 11(b), basta probar que $u \in C^\infty(\Omega)$. Sea $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{B}_n)$ radial tal que $\int_{\mathbb{B}_n} \phi dv = 1$ y $\phi(x) = \psi(|x|)$ con $\psi \in C_c^\infty(0, 1)$. Para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, sean $\phi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \phi(x/\varepsilon)$ y $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Entonces, si $x \in \Omega_\varepsilon$, la función $y \rightarrow \phi_\varepsilon(x-y)$ tiene soporte en Ω y

$$\begin{aligned} u * \phi_\varepsilon(x) &= \int_{\Omega} u(y) \phi_\varepsilon(x-y) dy = \int_{\Omega} u(x-y) \phi_\varepsilon(y) dy = \varepsilon^{-n} \int_{|y| \leq \varepsilon} u(x-y) \phi(y/\varepsilon) dy \\ &= \int_{|y| \leq 1} u(x-\varepsilon y) \phi(y) dy \stackrel{(12)}{=} \int_0^1 \varrho^{n-1} \psi(\varrho) \left(\int_{|\zeta|=1} u(x-\varepsilon\varrho\zeta) dS(\zeta) \right) d\varrho \\ &= \omega_n u(x) \int_0^1 \varrho^{n-1} \psi(\varrho) d\varrho = u(x) \int_{\mathbb{B}_n} \phi(y) dy = u(x). \end{aligned}$$

Puesto que $\phi \in C^\infty$, $u = u * \phi_\varepsilon$ también lo es en Ω_ε (no es difícil ver que es lícito derivar bajo el signo integral y que $\partial^\alpha(u * \phi_\varepsilon) = u * (\partial^\alpha \phi_\varepsilon)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ [8, proposition 8.10]). Como $\varepsilon > 0$ es arbitrariamente pequeño, concluimos que $u \in C^\infty(\Omega)$. ■

Corolario 15. *Si u es una función armónica en Ω , entonces $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Demostración. Consecuencia inmediata de los teoremas 9 y 14 aplicados sucesivamente. ■

Corolario 16. *Si $\{u_k\}$ es una sucesión de funciones armónicas en Ω que converge uniformemente en compactos de Ω a una función u , entonces u es armónica en Ω .*

Demostración. Puesto que cada u_k satisface las hipótesis del teorema 14, u también. ■

²Otra manifestación de la elipticidad de Δ .

3.3. El principio del máximo

Teorema 17. Sea Ω un dominio en \mathbb{R}^n . Si u es una función armónica en Ω y

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = A < +\infty,$$

entonces $u(x) < A$ para todo $x \in \Omega$ o $u(x) = A$ para todo $x \in \Omega$.

Demostración. La prueba sigue un razonamiento de conexidad en la línea de la demostración del teorema 2.10 del trabajo de Maciá Medina [15]. Claramente, se verifica que el conjunto $\mathcal{U} := \{x \in \Omega \mid u(x) = A\}$ es relativamente cerrado en Ω . Pero por el teorema del valor medio, si $x_0 \in \mathcal{U}$ entonces $u(x) = A$ para todo x en cualquier bola cerrada centrada en x_0 y contenida en Ω , y, por tanto, \mathcal{U} también es abierto. Como Ω es conexo, $\mathcal{U} = \emptyset$, con lo que $u < A$ en Ω , o $\mathcal{U} = \Omega$, en cuyo caso $u = A$ en Ω . ■

Corolario 18. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es acotado y u es una función armónica en Ω continua en $\overline{\Omega}$, entonces

$$\max_{x \in \Omega} u(x) = \max_{\zeta \in \partial\Omega} u(\zeta) \quad y \quad \min_{x \in \Omega} u(x) = \min_{\zeta \in \partial\Omega} u(\zeta).$$

Demostración. El máximo se alcanza en algún punto de $\overline{\Omega}$: si esto sucede en un punto interior, u es constante en la componente conexa que lo contiene (teorema 17); por tanto, el máximo también se alcanza en $\partial\Omega$. La igualdad entre los mínimos sigue de la de los máximos sin más que reemplazar u por $-u$. ■

Corolario 19 (teorema de unicidad). Sea Ω acotado y u, v dos funciones armónicas en Ω continuas en $\overline{\Omega}$. Si $u = v$ en $\partial\Omega$, entonces $u = v$ en Ω .

Demostración. Las funciones $u - v$ y $v - u$ son armónicas en Ω y se anulan en $\partial\Omega$. Por el corolario 18, $u = v$ en Ω . ■

Observación 20. Como hemos visto, la propiedad del valor medio es característica de las funciones armónicas, pero el principio del máximo y sus corolarios siguen siendo válidos para ecuaciones en derivadas parciales más generales. ◀

El siguiente resultado generaliza el teorema de Liouville clásico relativo a funciones enteras de variable compleja [17, theorem 10.23; cf. 1, 7, 15].

Teorema 21 (Liouville). Toda función armónica acotada u en \mathbb{R}^n es constante.

Demostración. Si $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > |x|$, por el corolario 10 tenemos que

$$(15) \quad \begin{aligned} |u(x) - u(0)| &= \frac{n}{\omega_n r^n} \left| \int_{|y| \leq r} u(x+y) \, dy - \int_{|y| \leq r} u(y) \, dy \right| \\ &\leq \frac{n}{\omega_n r^n} \|u\|_\infty \int_{D_r} dy = \|u\|_\infty \frac{n|D_r|}{\omega_n r^n}, \end{aligned}$$

donde D_r denota la diferencia simétrica de las bolas $B_r(x)$ y $B_r(0)$. Pero como D_r está contenido en el anillo esférico $\mathcal{A}_r := \{y \mid r - |x| < |y| < r + |x|\}$ (figura 1),

$$|D_r| \leq |\mathcal{A}_r| = \int_{\mathcal{A}_r} dy = \omega_n \int_{r-|x|}^{r+|x|} \varrho^{n-1} \, d\varrho = \frac{\omega_n}{n} ((r+|x|)^n - (r-|x|)^n),$$

lo que implica que³

$$|u(x) - u(0)| \lesssim \frac{(r+|x|)^n - (r-|x|)^n}{r^n} = \left(1 + \frac{|x|}{r}\right)^n - \left(1 - \frac{|x|}{r}\right)^n \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Por tanto, $u(x) = u(0)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y u es constante. ■

³Como es usual en análisis, para dos cantidades A y B , $A \lesssim B$ significa que $A \leq CB$ para alguna constante $C > 0$ sin especificar.

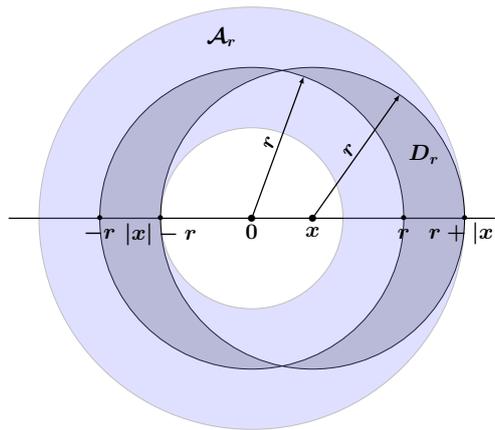


Figura 1: Diferencia simétrica $D_r \subset A_r$.

Observación 22. Cabe señalar que la misma demostración del teorema 21 permite relajar su hipótesis: basta suponer que u sea positiva [1]. En efecto, puesto que u es positiva ahora se puede prescindir del valor absoluto en (15) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |u(x) - u(0)| &= \frac{n}{\omega_n r^n} \left| \int_{|y| \leq r} u(x+y) \, dy - \int_{|y| \leq r} u(y) \, dy \right| \stackrel{u > 0}{=} \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{D_r} u(y) \, dy \\ &\leq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{A_r} u(y) \, dy = \frac{n}{\omega_n r^n} \left(\int_{|y| \leq r+|x|} u(y) \, dy - \int_{|y| \leq r-|x|} u(y) \, dy \right) \\ &= u(0) \left(\frac{(r+|x|)^n - (r-|x|)^n}{r^n} \right). \end{aligned}$$

Corolario 23. Toda función armónica positiva en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es constante.

Demostración. Si u es armónica y positiva en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, la función $z \rightarrow u(e^z)$ es armónica positiva en $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ y, atendiendo a la observación 22, u es constante. ■

El análogo al corolario 23 es falso cuando $n > 2$: por el corolario 3, la función $u(x) := |x|^{2-n}$ es positiva y armónica en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ⁴.

3.4. El problema de Dirichlet en la bola. El núcleo de Poisson

Uno de los problemas fundamentales en teoría del potencial donde aparece el operador de Laplace es el *problema de Dirichlet*: si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado con frontera regular y f es una función continua en $\partial\Omega$, encontrar una función u armónica en Ω y continua en $\bar{\Omega}$ tal que $u = f$ en $\partial\Omega$.

En esta sección estudiaremos este problema en el caso particular, pero importante, de la bola unidad \mathbb{B}_n . Si la solución al problema de Dirichlet existe entonces, el razonamiento en el libro de Rudin [17, sections 5.22–5.24], con las modificaciones apropiadas a dimensiones superiores, permite ver que existe una función P definida en $\mathbb{B}_n \times \mathbb{S}^{n-1}$ (el *núcleo de Poisson*) tal que

$$(16) \quad u(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} P(x, \zeta) f(\zeta) \, d\sigma(\zeta), \quad x \in \mathbb{B}_n.$$

Por la propiedad de la media (teorema 9), debemos tener que $P(0, \zeta) = 1$ para todo $\zeta \in \mathbb{S}^{n-1}$.

⁴Que este es esencialmente el único contraejemplo es consecuencia de un teorema debido a Bôcher [1] (véase también el trabajo de Crespo Pérez [4, corolario 5.24]) que implica que cualquier función armónica positiva en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ($n > 2$) es de la forma $u(x) = a + b|x|^{2-n}$ para ciertas constantes $a, b > 0$.

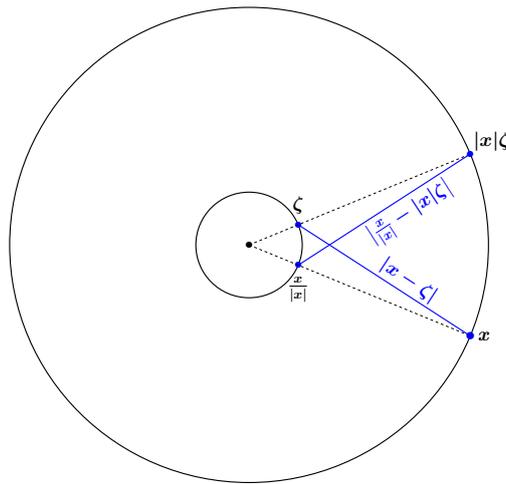


Figura 2: Simetría de módulos.

Supongamos que u es armónica en \mathbb{B}_n y sea $x \in \mathbb{B}_n \setminus \{0\}$. Por el corolario 3, tenemos que la función $v(y) := w(y) - |x|^{2-n} |y - \frac{x}{|x|}|^{2-n}$, donde $w(y) = |y - x|^{2-n}$, es armónica en $\mathbb{B}_n \setminus \{x\}$ y, ya que $|\zeta - x| = ||x|\zeta - \frac{x}{|x}|$ si $\zeta \in \mathbb{S}^{n-1}$ (como queda ilustrado en la figura 2),

$$v(\zeta) = w(\zeta) - \left| |x|\zeta - \frac{x}{|x|} \right|^{2-n} = w(\zeta) - |\zeta - x|^{2-n} = 0$$

para $\zeta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Si $0 < \varepsilon < \frac{1-|x|}{2}$ (para que $\overline{B}(x, \varepsilon) \subset \mathbb{B}_n$) y aplicamos la identidad de Green (4) en $\Omega_\varepsilon = \mathbb{B}_n \setminus \overline{B}(x, \varepsilon)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u \partial_{\vec{n}} v \, dS &\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ v=0 \text{ en } \mathbb{S}^{n-1}}}{=} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (u \partial_{\vec{n}} v - v \partial_{\vec{n}} u) \, dS \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx + \int_{\partial B(x, \varepsilon)} (u \partial_{\vec{n}} v - v \partial_{\vec{n}} u) \, dS \\ &\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \Delta u = \Delta v = 0 \text{ en } \Omega_\varepsilon}}{=} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} (u \partial_{\vec{n}} v - v \partial_{\vec{n}} u) \, dS \\ &\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ v-w \text{ armónica en } \mathbb{B}_n}}{=} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} (u \partial_{\vec{n}} w - w \partial_{\vec{n}} u) \, dS \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2-n) \omega_n u(x), \end{aligned}$$

ya que, como $|w| = \varepsilon^{2-n}$ en $\partial B(x, \varepsilon)$,

$$\left| \int_{\partial B(x, \varepsilon)} w \partial_{\vec{n}} u \, dS \right| \lesssim \varepsilon^{2-n} S(\partial B(x, \varepsilon)) = \omega_n \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$$

y

$$\int_{\partial B(x, \varepsilon)} u \partial_{\vec{n}} w \, dS = (2-n) \varepsilon^{1-n} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} u \, dS = (2-n) \omega_n u(x)$$

por la propiedad de la media y $\partial_{\vec{n}} w(y) = \partial_{\vec{n}_y} |y - x|^{2-n} = (2-n) |y - x|^{1-n}$.

Consecuentemente, si $n \geq 3$, (16) es válido con

$$\begin{aligned} P(x, \zeta) &= \frac{1}{2-n} \partial_{\vec{n}} v(\zeta) = \frac{1}{2-n} \left([(\nabla_y |y-x|^{2-n})(\zeta)] - |x|^{2-n} [(\nabla_y |y-x/|x|^2|^{2-n})(\zeta)] \right) \cdot \vec{n}_\zeta \\ &= (|\zeta-x|^{-n}(\zeta-x) - |x|^{2-n}|\zeta-x/|x|^2|^{-n}(\zeta-x/|x|^2)) \cdot \zeta \\ &= (|\zeta-x|^{-n}(\zeta-x) - |x|^2|x|\zeta-x/|x|^{-n}(\zeta-x/|x|^2)) \cdot \zeta \\ &= (|\zeta-x|^{-n}(\zeta-x) - |x|^2|\zeta-x|^{-n}(\zeta-x/|x|^2)) \cdot \zeta \\ &= |\zeta-x|^{-n} ((\zeta-x) - (|x|^2\zeta-x)) \cdot \zeta = \frac{(1-|x|^2)|\zeta|^2}{|\zeta-x|^n} = \frac{1-|x|^2}{|\zeta-x|^n}. \end{aligned}$$

Aquí hemos usado que $\partial_{\vec{n}} v(\zeta) = \nabla v(\zeta) \cdot \vec{n}_\zeta$, la identidad $\nabla_y |y-a|^\kappa = \kappa|y-a|^{\kappa-2}(y-a)$ (válida para todo $a \in \mathbb{R}^n$ y $\kappa \in \mathbb{R}$) y que la normal exterior a \mathbb{S}^{n-1} en $\zeta \in \mathbb{S}^{n-1}$ es $\vec{n}_\zeta = \zeta$. Nótese que, como se había observado anteriormente, $P(0, \zeta) = 1$ si $|\zeta| = 1$.

Resulta que esta misma expresión es válida en dos dimensiones ($n = 2$), es decir, en notación compleja, $P(z, e^{i\theta}) = \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$ ($|z| < 1$) [15, sección 2.3].

Con el núcleo de Poisson a nuestra disposición podemos resolver el problema de Dirichlet en \mathbb{B}_n .

Teorema 24. Sea $f \in C(\mathbb{S}^{n-1})$ y

$$P[f](x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} P(x, \zeta) u(\zeta) d\sigma(\zeta) & \text{si } x \in \mathbb{B}_n, \\ f(x) & \text{si } x \in \mathbb{S}^{n-1}. \end{cases}$$

Entonces, $P[f]$ es armónica en \mathbb{B}_n y continua en $\overline{\mathbb{B}_n}$.

La demostración de este teorema es estándar y se basa en las siguientes propiedades del núcleo de Poisson (ver el libro de Axler, Bourdon y Ramey [1]):

- $P(x, \zeta) > 0$ y es armónica en $x \in \mathbb{B}_n$ para todo $\zeta \in \mathbb{S}^{n-1}$ (esto sigue de la propia construcción de P ya que v es armónica en $\mathbb{B}_n \setminus \{x\}$).
- $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} P(x, \zeta) d\sigma(\zeta) = 1$ para todo $x \in \mathbb{B}_n$.
- Para cualquier $\zeta_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ y todo $\delta > 0$, $\int_{|\zeta-\zeta_0|>\delta} P(x, \zeta) d\sigma(\zeta) \xrightarrow{x \rightarrow \zeta_0} 0$.

4. La propiedad del valor medio revisada

En la observación 11(b) se apuntaba que la propiedad (13) es suficiente para concluir que una función $u \in C^2(\Omega)$ es armónica en Ω . Siguiendo la demostración del teorema 11.13 del libro de Rudin [17] veremos que, como en el teorema 14, la hipótesis de regularidad sobre u puede relajarse.

Teorema 25. Si u es continua en Ω y satisface (13), entonces u es armónica en Ω .

Demostración. Supongamos que $\bar{B}(a, r) \subset \Omega$ y sea $v = P[u|_{\partial B(a, r)}]$ la extensión armónica de $u|_{\partial B(a, r)}$ a $B(a, r)$ dada por el teorema 24. Probaremos el teorema viendo que $u = v$ en $B(a, r)$.

Supongamos que $w = v - u$ es positiva en algún punto de $B(a, r)$ y consideremos $E \subset \bar{B}(a, r)$ el conjunto donde w toma su valor máximo. Puesto que E es compacto, contiene un punto x más alejado de a . Claramente, $x \in B(a, r)$ ya que $w = 0$ en $\partial B(a, r)$ y, por tanto, existe j tal que $B(x, r_j) \subset B(a, r)$ en donde $u(x)$ es el promedio de u sobre $\partial B(x, r_j)$. Ahora bien, como v es armónica en $B(a, r)$,

$$w(x) = \int_{|\zeta|=1} w(x + r_j \zeta) d\sigma(\zeta),$$

pero $w(x + r_j \zeta) \leq w(x)$ para todo $|\zeta| = 1$ y, por continuidad, $w|_{\partial B(x, r_j)} = w(x)$, lo que contradice nuestra elección de x . Así $v - u \leq 0$ en $\bar{B}(a, r)$. De forma similar $v - u \geq 0$ en $\bar{B}(a, r)$ (basta razonar con $-u$ en lugar de u). ■

Observación 26. Nótese que la demostración del teorema anterior proporciona un principio del máximo para la clase de funciones que satisfacen (13), es más, permite ver que el teorema 25 sigue siendo válido si u tiene la propiedad del valor medio para un solo radio, ya que tales funciones satisfacen el principio del máximo. ◀

4.1. Generalizaciones

Sorprendentemente, para que una función continua u en \mathbb{R}^n sea armónica, basta que (14) se verifique para dos valores distintos de r (y todo $x \in \mathbb{R}^n$) siempre que estos radios no estén relacionados de una manera muy especial. Más precisamente, si

$$j_n(z) = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_0^\pi e^{iz \cos \theta} \operatorname{sen}^{n-1} \theta \, d\theta = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{2}{z}\right)^{(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(z),$$

donde Γ es la función de Euler definida en (11) y J_ν , la función de Bessel de primera especie y orden ν definida, por ejemplo, mediante la fórmula de Schlömilch [20] (J_ν satisface la ecuación diferencial (20)⁵ y en la ecuación (21) se puede consultar su desarrollo en serie de potencias)

$$(17) \quad \exp\left[\frac{z}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_\nu(z)t^\nu, \quad z \in \mathbb{C}, t \neq 0.$$

Sea

$$H_n = \{z_1/z_2 > 0 \mid j_n(z_1) = j_n(z_2) = 1\}$$

el conjunto de cocientes positivos de ceros de la función $j_n - 1$. Se debe a J. Delsarte [5] que, si (14) se verifica para $r = r_1$ y $r = r_2$ y $r_1/r_2 \notin H_n$, entonces u es armónica en \mathbb{R}^n [21-23]. El desarrollo asintótico de las funciones de Bessel se puede usar para demostrar que, para $n > 1$, H_n es finito y, de hecho, $H_3 = \{1\}$ [5], por lo que en dimensión 3 es suficiente con dos radios distintos. El caso $n = 1$ es especial: $j_1(z) = \cos z$ y el conjunto de cocientes excepcionales es $H_1 = \mathbb{Q}^+$ (rationales no negativos). Que el conjunto excepcional es no vacío para todo $n > 1$ sigue siendo una cuestión abierta [23].

También existen versiones locales de este teorema [2, 19]: si u es continua en $B(0, r)$ y satisface (14) para $r = r_1, r_2$ ($r_1/r_2 \notin H_n$) y $x \in B(0, r)$ tal que $|x| + r_j < r$, entonces u es armónica en $B(0, r)$ siempre que $r_1 + r_2 < r$.

A este respecto hemos de mencionar el *problema de un radio de Littlewood* resuelto por W. Hansen y N. Nadirashvili: sea u continua y acotada en el disco unidad abierto $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ y supongamos que para cada $z \in \mathbb{D}$ existe un radio $r = r(z) < 1 - |z|$ tal que

$$(18) \quad u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z + r(z)e^{i\theta}) \, d\theta.$$

¿Debe u ser armónica en \mathbb{D} ? La respuesta resulta ser NO [12]. Por otro lado, la condición sobre un radio que se obtiene al reemplazar el promedio de línea por el de área sobre el disco de radio $r(z)$ SÍ que implica armonicidad [11]. Este último resultado se puede extender a funciones definidas en dominios acotados de \mathbb{R}^n (y a otros no acotados también) incluso relajando la hipótesis de acotación sobre u a que esta admita una mayorante armónica, es decir, que $|u| < h$ para alguna función armónica positiva h . Recopilaciones sobre estos y otros resultados relacionados se pueden encontrar en los trabajos de Hansen [9] y Netuka y Veselý [16].

⁵Lógicamente llamada ecuación de Bessel.

Observación 27. 1. Sin embargo, si u es continua en \overline{D} y tiene la propiedad de un radio (18), entonces u es armónica en D . Para ver esto, sean $M = \max_{\overline{D}} u$ y $E = \{z \in \overline{D} \mid u(z) = M\}$ el conjunto de puntos de \overline{D} donde u alcanza su máximo. Como en la demostración del teorema 25, puesto que E es compacto, $E \cap \partial D \neq \emptyset$, por lo que $\max_{\overline{D}} u = \max_{\partial D} u$. Así, $u = P[u|_{\partial D}]$.

2. Aunque la respuesta al problema de Littlewood es negativa, para el caso del plano es afirmativa si se imponen condiciones adicionales a r , a saber, si r es una función estrictamente positiva en \mathbb{R}^2 tal que, para alguna constante $M > 0$,

$$(19) \quad r(z) \leq |z| + M \quad \text{siempre que} \quad |z| > M,$$

entonces cualquier función continua y acotada u en \mathbb{R}^2 que satisfaga (18) debe ser constante. ¡La conclusión es falsa si la condición (19) se reemplaza por $r(z) \leq 4|z| + M$ [10]!

En la recta ($n = 1$), el promedio (18) podría reemplazarse por $(f(x - r(x)) + f(x + r(x)))/2$. Con $r(x) \equiv 2\pi$, la función $u(x) = \sin x$ muestra que el resultado análogo es falso en una dimensión.

Por último, cabe señalar que ya en \mathbb{R}^3 no se sabe si existe un análogo de este resultado. ◀

Para ver cómo aparecen las funciones de Bessel, consideremos $n = 2$ y $u_0(z) = e^{iy}$ ($z = x + iy$). Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(z + re^{i\theta}) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(y+rsen\theta)} d\theta = e^{iy} \int_{-\pi}^{\pi} e^{irsen\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= u_0(z) \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{r}{z}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} \frac{d\theta}{2\pi} = u_0(z) \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_{\nu}(r) e^{i\nu\theta} \right) \frac{d\theta}{2\pi} = J_0(r)u_0(z) \end{aligned}$$

por (17).

Nótese que u_0 es una autofunción del laplaciano; más precisamente, satisface la ecuación de Helmholtz $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ con $\kappa = 1$. Es más, si u es cualquier solución de esta ecuación y

$$\Theta(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta}) d\theta,$$

de la demostración del teorema 2.4 en el trabajo de Maciá Medina [15] tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dr}(r) &= \frac{1}{2\pi r} \iint_{|z| \leq r} \Delta u(z) dA(z) = -\frac{\kappa^2}{2\pi r} \iint_{|z| \leq r} u(z) dA(z) \\ &= -\frac{\kappa^2}{2\pi r} \int_0^r \varrho \left(\int_{-\pi}^{\pi} u(\varrho e^{i\theta}) d\theta \right) d\varrho = -\frac{\kappa^2}{r} \int_0^r \varrho \Theta(\varrho) d\varrho. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que Θ satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Theta}{dr} \right) + \kappa^2 r \Theta = 0$$

y, por tanto, la función $\Psi(t) = \Theta(t/\kappa)$ satisface que⁶

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d\Psi}{dt} + \Psi = 0.$$

Esta última es la ecuación de Bessel de orden cero, de la que sabemos que solo tiene a los múltiplos de J_0 como soluciones acotadas para $t \rightarrow 0^+$. Puesto que Θ (y por ende Ψ) está acotada cerca de 0 y $J_0(0) = 1$, deducimos que $\Theta(r) = J_0(\kappa r)\Theta(0) = J_0(\kappa r)u(0)$, es decir,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta}) d\theta = J_0(\kappa r)u(0).$$

⁶Con el cambio de variables $r = t/\kappa$, $d/dr = \kappa d/dt$ y $r d/dr = t d/dt$, por lo que

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) + \kappa^2 r = \kappa \frac{d}{dt} \left(t \frac{d}{dt} \right) + \kappa t = \kappa t \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d}{dt} + 1 \right).$$

Además, como la ecuación de Helmholtz es invariante por traslaciones, también se tendrá que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta = J_0(\kappa r)u(z)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ y $r > 0$.

Siguiendo la demostración del teorema 9, un razonamiento análogo prueba que en n dimensiones, si u es solución de la ecuación de Helmholtz y

$$\Theta(r) = \int_{|\zeta|=1} u(r\zeta) d\sigma(\zeta),$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dr}(r) &= \int_{|\zeta|=1} \zeta \cdot \nabla u(r\zeta) d\sigma(\zeta) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|\eta|=r} \partial_{\bar{n}} u(\eta) dS(\eta) \stackrel{(3) \text{ con } v=1}{=} \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|x|\leq r} \Delta u(x) dx \\ &= -\frac{\kappa^2}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|x|\leq r} u(x) dx = -\frac{\kappa^2}{\omega_n r^{n-1}} \int_0^r \varrho^{n-1} \left(\int_{|\zeta|=1} u(r\zeta) dS(\zeta) \right) d\varrho \\ &= -\frac{\kappa^2}{r^{n-1}} \int_0^r \varrho^{n-1} \left(\int_{|\zeta|=1} u(r\zeta) d\sigma(\zeta) \right) d\varrho = -\frac{\kappa^2}{r^{n-1}} \int_0^r \varrho^{n-1} \Theta(\varrho) d\varrho, \end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{d\Theta}{dr} \right) + \kappa^2 r^{n-1} \Theta = 0.$$

Si $\nu = (n - 2)/2$, con el cambio de función $\Psi(r) = r^\nu \Theta(r)$ esta ecuación se transforma en

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} + \left(\kappa^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) \Psi = 0,$$

que, a su vez, con el cambio de variable independiente $t = \kappa r$ se reduce a

$$(20) \quad \frac{d^2\Psi}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d\Psi}{dt} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2} \right) \Psi = 0.$$

Como antes, esta es la ecuación de Bessel de orden ν y, por tanto, Ψ (que es continua en $t = 0$) debe ser proporcional a J_ν . Desahaciendo los cambios y ajustando la constante de proporcionalidad vemos que

$$\Theta(r) = \Gamma(\nu + 1) \left(\frac{2}{\kappa} \right)^\nu r^{-\nu} J_\nu(\kappa r) \Theta(0) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{2}{\kappa r} \right)^{(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(\kappa r) \Theta(0) = j_n(\kappa r) \Theta(0)$$

ya que

$$(21) \quad J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{\nu+2k},$$

y, por tanto, $\left(\frac{2}{r}\right)^\nu J_\nu(r) \rightarrow 1/\Gamma(\nu + 1)$ cuando $r \rightarrow 0^+$.

Consecuentemente, hemos probado que si u es solución de la ecuación de Helmholtz (que sigue siendo invariante por traslaciones), entonces

$$(22) \quad \int_{|\zeta|=1} u(x + r\zeta) d\sigma(\zeta) = j_n(\kappa r)u(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$.

Recíprocamente, de (21) vemos que

$$j_n(z) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k}.$$

Así, $j_n(0) = 1$, $j_n'(0) = 0$ y $j_n''(0) = -1/n$. Ahora la ecuación (5) implica que, si $u \in C^2$ satisface (22), entonces

$$\Delta u(x) = 2n \frac{d^2}{dr^2} \Big|_{r=0} j_n(\kappa r) u(x) = -\kappa^2 u(x).$$

Por tanto, y como ocurre con la propiedad del valor medio para funciones armónicas, al menos para funciones C^2 , (22) caracteriza las soluciones de la ecuación de Helmholtz.

Observación 28. Si $r > 0$ es un cero de $j_n - 1$, sigue inmediatamente de (22) que cualquier solución de la ecuación de Helmholtz con $\kappa = 1$ satisface (14) en circunferencias de radio r pero no es armónica, esto es, la propiedad del valor medio para un solo radio no implica armonicidad. De igual forma, si $r_1/r_2 \in H_n$, es decir, $r_1/r_2 = z_1/z_2 > 0$ con $j_n(z_1) = j_n(z_2) = 1$, para $\kappa = z_1/r_1 = z_2/r_2$ tendremos que $j_n(\kappa r_1) = j_n(\kappa r_2) = 1$ y cualquier solución de la ecuación de Helmholtz con parámetro κ satisface (14) para circunferencias de radios r_1 y r_2 . Puesto que $\kappa \neq 0$, tal solución tampoco es armónica. ◀

5. El lema de Weyl

La sección 2.5 del trabajo de Maciá Medina [15] está, como aquí, dedicada al aspecto de regularidad para las funciones armónicas. Maciá Medina prueba el teorema 30 para el caso del plano \mathbb{R}^2 pero, como bien indica en la observación 2.37, no hay nada particular en la prueba que no permita su generalización al caso multidimensional. Para otra prueba ligeramente diferente pero esencialmente equivalente, véase el libro de Jost [14, corollary 1.2.1]. Como en el trabajo de Maciá Medina [15], empezamos recordando las definiciones pertinentes.

Si u es armónica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, de (4) (con $v = \varphi$),

$$\langle u, \Delta \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) dv(x) = \int_{\Omega} \varphi(x) \Delta u(x) dv(x) = 0.$$

Esta condición tiene sentido incluso para funciones que no sean continuas en Ω , como, por ejemplo, si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es localmente integrable. Esto sugiere la siguiente definición.

Definición 29. Una función localmente integrable u en un abierto Ω de \mathbb{R}^n se dice armónica en sentido débil o que satisface la ecuación $\Delta u = 0$ en sentido débil si

$$\langle u, \Delta \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) dv(x) = 0$$

para toda función $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. ◀

Obsérvese que no sigue de la definición 29 que si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es armónica en sentido débil lo sea en el sentido usual (para ello u debe ser al menos C^2).

Este hecho se recoge, y es parte de un resultado más general, en el siguiente teorema.

Teorema 30 (Weyl). Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $\Delta u = 0$ en sentido débil, entonces u es armónica, esto es, $\Delta u = 0$ en sentido clásico en Ω .

Para ser más precisos, en la conclusión se debe entender que u es armónica tras posiblemente ser modificada en un conjunto de medida nula.

Demostración. Sean Ω_ε y ϕ como en la demostración del teorema 14. Si $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces $\varphi * \phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ y $u_\varepsilon := u * \phi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

Por (4) se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \Delta u_{\varepsilon}(x) \varphi(x) \, dv(x) &= \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \Delta \varphi(x) \, dv(x) \\
 &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} u(y) \phi_{\varepsilon}(x-y) \, dv(y) \right) \Delta \varphi(x) \, dv(x) \\
 &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \phi_{\varepsilon}(x-y) \Delta \varphi(x) \, dv(x) \right) u(y) \, dv(y) \\
 &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \phi_{\varepsilon}(x) \Delta \varphi(x+y) \, dv(x) \right) u(y) \, dv(y) \\
 &= \int_{\Omega} u(y) \left(\Delta_y \int_{\Omega} \phi_{\varepsilon}(x) \varphi(x+y) \, dv(x) \right) \, dv(y) \\
 &= \int_{\Omega} u(y) \Delta \chi(y) \, dv(y) = 0,
 \end{aligned}$$

ya que la función

$$\chi(y) := \int_{\Omega} \phi_{\varepsilon}(x) \varphi(x+y) \, dv(x)$$

es $C_c^{\infty}(\Omega)$ y u es armónica en sentido débil en Ω . Por tanto, u_{ε} es armónica en sentido clásico en Ω .

Por último observemos que, para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, como consecuencia de la demostración del teorema 14,

$$u_{\varepsilon} = u_{\varepsilon} * \phi_{\delta} = (u * \phi_{\varepsilon}) * \phi_{\delta} = u * (\phi_{\varepsilon} * \phi_{\delta}) = u * (\phi_{\delta} * \phi_{\varepsilon}) = (u * \phi_{\delta}) * \phi_{\varepsilon} = u_{\delta} * \phi_{\varepsilon} = u_{\delta}$$

en $\Omega_{\max\{\varepsilon, \delta\}}$ (Ω_{ε} decrece con ε) y, puesto que $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ en $L_{loc}^1(\Omega)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, del corolario 12 (o la observación 13), u_{ε} converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω a una función u_* que, por el corolario 16, es armónica en Ω y coincide con u en casi todo punto. ■

Referencias

- [1] AXLER, Sheldon; BOURDON, Paul, y RAMEY, Wade. *Harmonic function theory*. 2.ª ed. Graduate Texts in Mathematics 137. Nueva York: Springer-Verlag, 2001. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-8137-3>.
- [2] BERENSTEIN, Carlos A. y GAY, Roger. «A local version of the two-circles theorem». En: *Israel Journal of Mathematics* 55.3 (1986), págs. 267-288. ISSN: 0021-2172. <https://doi.org/10.1007/BF02765026>.
- [3] BERENSTEIN, Carlos A. y GAY, Roger. *Complex variables. An introduction*. Graduate Texts in Mathematics 125. Nueva York: Springer-Verlag, 1991. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3024-3>.
- [4] CRESPO PÉREZ, Alba. *Funciones armónicas*. Trabajo de Fin de Grado. Universidad de La Laguna, 2017. URL: <https://riull.ull.es/xmlui/handle/915/6221>.
- [5] DELSARTE, Jean. *Lectures on topics in mean periodic functions and the two-radius theorem*. Lectures on mathematics and physics. Mathematics 22. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1961. URL: <http://www.math.tifr.res.in/~publ/ln/tifr22.pdf>.
- [6] FLORES, Manuel y SADARANGANI, Kishin. *Cálculo Diferencial e Integral*. Manuales y textos universitarios. La Laguna: Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna, 2013. ISBN: 978-84-15910-53-4. URL: <https://www.ull.es/servicios/publicaciones/publicacion/calculo-diferencial-e-integral>.
- [7] FOLLAND, Gerald B. *Introduction to partial differential equations*. 2.ª ed. Princeton: Princeton University Press, 1995. ISBN: 978-0-691-04361-6.
- [8] FOLLAND, Gerald B. *Real analysis. Modern techniques and their applications*. 2.ª ed. Pure and Applied Mathematics. Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1999. ISBN: 978-0-471-31716-6.

- [9] HANSEN, Wolfhard. «Restricted mean value property and harmonic functions». En: *Proceedings of the International Conference on Potential Theory*. Potential Theory – ICPT (Kouty, 1994). Berlín: De Gruyter, 1996, págs. 67-90. <https://doi.org/10.1515/9783110818574.67>.
- [10] HANSEN, Wolfhard. «A strong version of Liouville's theorem». En: *American Mathematical Monthly* 115.7 (2008), págs. 583-595. ISSN: 0002-9890. <https://doi.org/10.1080/00029890.2008.11920570>.
- [11] HANSEN, Wolfhard y NADIRASHVILI, Nikolai. «A converse to the mean value theorem for harmonic functions». En: *Acta Mathematica* 171.2 (1993), págs. 139-163. ISSN: 0001-5962. <https://doi.org/10.1007/BF02392531>.
- [12] HANSEN, Wolfhard y NADIRASHVILI, Nikolai. «Littlewood's one circle problem». En: *Journal of the London Mathematical Society. Second Series* 50.2 (1994), págs. 349-360. ISSN: 0024-6107. <https://doi.org/10.1016/j.exmath.2008.04.001>.
- [13] HÖRMANDER, Lars. *An introduction to complex analysis in several variables*. 3.ª ed. North-Holland Mathematical Library 7. Ámsterdam: North-Holland Publishing Co., 1990. ISBN: 978-0-444-88446-6.
- [14] JOST, Jürgen. *Partial differential equations*. 2.ª ed. Graduate Texts in Mathematics 214. Nueva York: Springer, 2007. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-49319-0>.
- [15] MACIÁ MEDINA, Víctor J. *Análisis Complejo: la ecuación $\bar{\partial}$ y funciones armónicas en el plano*. Trabajo de Fin de Grado. Universidad de La Laguna, 2017. URL: <https://riull.ull.es/xmlui/handle/915/4265>.
- [16] NETUKA, Ivan y VESELÝ, Jiří. «Mean value property and harmonic functions». En: *Classical and modern potential theory and applications* (Chateau de Bonas, 1993). NATO Science Series C: Mathematical and Physical Sciences 430. Dordrecht: Springer, 1994, págs. 359-398. https://doi.org/10.1007/978-94-011-1138-6_29.
- [17] RUDIN, Walter. *Real and complex analysis*. 3.ª ed. Nueva York: McGraw-Hill Book Co., 1987. ISBN: 978-0-07-054234-1.
- [18] SPIVAK, Michael. *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus*. Nueva York-Ámsterdam: W. A. Benjamin, Inc., 1965. ISBN: 978-0-8053-9021-6.
- [19] VOLCHKOV, Vitaly V. «The final version of the mean value theorem for harmonic functions». En: *Mathematical Notes* 59.3 (1996), págs. 247-252. ISSN: 0025-567X. <https://doi.org/10.1007/BF02308535>.
- [20] WATSON, George N. *A treatise on the theory of Bessel functions*. 2.ª ed. Cambridge Mathematical Library. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. ISBN: 978-0-521-48391-9.
- [21] ZALCMAN, Lawrence. «Analyticity and the Pompeiu problem». En: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 47 (1972), págs. 237-254. ISSN: 0003-9527. <https://doi.org/10.1007/BF00250628>.
- [22] ZALCMAN, Lawrence. «Real proofs of complex theorems (and vice versa)». En: *American Mathematical Monthly* 81 (1974), págs. 115-137. ISSN: 0002-9890. <https://doi.org/10.2307/2976953>.
- [23] ZALCMAN, Lawrence. «Offbeat integral geometry». En: *American Mathematical Monthly* 87.3 (1980), págs. 161-175. ISSN: 0002-9890. <https://doi.org/10.2307/2321600>.