TEMat

Algunas fórmulas cerradas para productos infinitos y su relación con la función zeta de Riemann

Miguel Camarasa Buades
Universitat de València
miguel.camarasa.buades@gmail.com

Resumen: El principal objetivo es obtener una fórmula cerrada para los productos infinitos de la forma

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^k}{n^k}\right),$$

donde $z \in \mathbb{C}$ y $k \geq 2$. Esto nos permitirá, por ejemplo, obtener algunos productos infinitos como

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right), \quad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{o} \quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^4}\right).$$

Abstract: The main goal is to obtain a closed-form for infinite products of the form

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^k}{n^k}\right),$$

where $z \in \mathbb{C}$ and $k \geq 2$. It will allow us, for example, to obtain some infinite products such as

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right), \quad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{o} \quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^4}\right).$$

Palabras clave: productos infinitos, función zeta de Riemann.

MSC2010: 40A20.

Recibido: 6 de noviembre de 2019.
Aceptado: 16 de junio de 2020.

Referencia: Camarasa Buades, Miguel. «Algunas fórmulas cerradas para productos infinitos y su relación con la función zeta de Riemann». En: *TEMat*, 5 (2021), págs. 35-42. ISSN: 2530-9633. URL: https://temat.es/articulo/2021-p35.

1. Introducción

El problema de Basilea consiste en la obtención de una fórmula cerrada para la suma de los recíprocos de los números naturales al cuadrado,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Es un famoso problema de teoría de números que tardó muchos años en ser resuelto, hasta que en 1735 Leonhard Euler encontró que la suma anterior vale $\pi^2/6$. Hoy en día es natural relacionarlo con la función zeta de Riemann ζ, definida de la siguiente manera:

$$\zeta(z) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \qquad \text{para } \operatorname{Re}(z) > 1.$$

De este modo, se tiene que $\zeta(2) = \pi^2/6$. Es más, todos los valores pares de esta función pueden ser expresados mediante los números de Bernoulli [2] como

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2 \cdot (2n)!} B_{2n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

En cambio, para valores impares no se conoce una fórmula cerrada. Por ejemplo,

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots = 1{,}202\,056\,9\dots,$$

conocida como la constante de Apéry, debida al matemático Roger Apéry, no dispone actualmente de una fórmula cerrada conocida. Apéry demostró en 1978 que esta constante era un número irracional [1], pero a día de hoy no se sabe si es trascendente.

El principal objetivo de este artículo es presentar un problema similar relacionado con productos infinitos en vez de series. Así pues, nos preguntamos si es posible obtener una fórmula cerrada para los productos infinitos de la forma

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^k}\right), \tag{1}$$

donde $k \geq 2$. Un producto infinito es convergente si uno de sus factores es nulo (entonces diremos que converge a 0) o si su sucesión de productos parciales converge a un valor no nulo.

Para las propiedades elementales de los productos infinitos se puede consultar el libro de Rao *et al.* [5]. En él se demuestra el siguiente resultado, aplicable a una sucesión arbitraria de números complejos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, que justifica que el producto infinito (1) es convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \implies \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \quad \text{converge.}$$

Lo anterior motiva a hacerse la siguiente pregunta: ¿existe una fórmula cerrada para los siguientes productos infinitos:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right), \quad \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) \quad \text{o} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^4}\right)?$$

¿Habrá una fórmula cerrada para cada uno de ellos, o solo para los valores pares de k, como en el caso de las series? La respuesta es que se puede obtener una fórmula cerrada para cada uno de ellos en términos de la función gamma de Euler.

Una de las mejores formas de abordar esta clase de problemas es a través del análisis complejo. Como bien dijo el matemático francés Jacques Hadamard: «El camino más corto entre dos verdades del análisis real pasa por el análisis complejo». Así pues, nuestro siguiente objetivo va a ser obtener una fórmula cerrada, en términos de la función gamma de Euler, para la siguiente familia de productos en variable compleja:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^k}{n^k}\right), \tag{2}$$

donde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ y $z \in \mathbb{C}$. Es bien conocido que para $k = 2$ el producto anterior puede ser escrito en términos de la función seno, usando la representación de Euler [3]:

$$\operatorname{sen}(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

Esto mismo es una especie de «factorización infinita» de la función seno, pues los valores donde se anula este producto infinito son precisamente los enteros. Es por eso que, con esta inspiración, nos vamos a preguntar cuáles son los ceros del producto infinito en (2) y si conocemos alguna función con estas propiedades.

2. Ceros

El conjunto de ceros de la función entera

$$P_k(z) := \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^k}{n^k}\right), \quad k \geq 2,$$

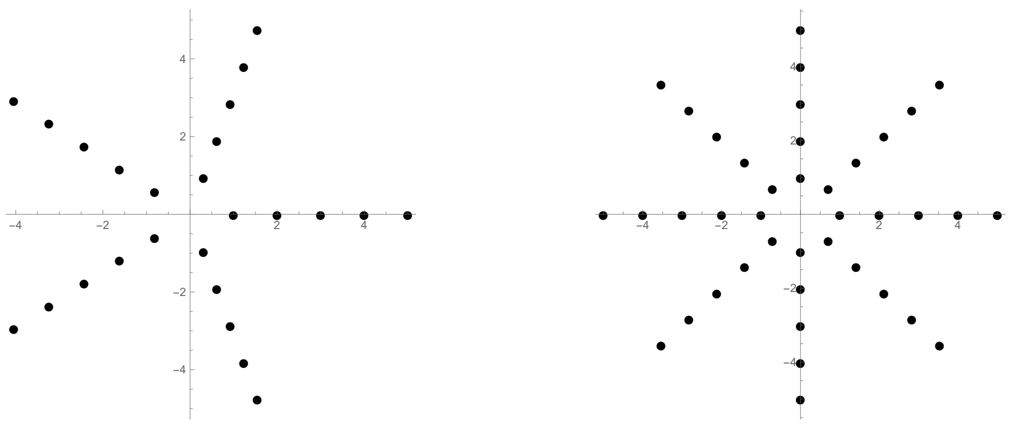
para todo $z \in \mathbb{C}$, está dado por

$$Z(P_k) = \{z \in \mathbb{C} : z = nw_j \text{ para algún } n \in \mathbb{N},\ 0 \leq j \leq k-1\},$$

donde

$$w_j = \exp\left(\frac{2\pi j}{k}\mathrm{i}\right), \quad 0 \leq j \leq k-1,$$

son las k-ésimas raíces de la unidad. El punto importante aquí es que, para un j fijo, los ceros de la forma $z = n \cdot w_j$ son lineales en n. En la figura 1 se representa el conjunto de ceros de P_5 y P_8.



(a) Ceros de P_5.

(b) Ceros de P_8.

Figura 1: Ceros de P_k para $k = 5$ y $k = 8$.

Nuestro objetivo es encontrar una expresión, tan simple como sea posible, de una función cuyo conjunto de ceros sea $Z(P_k)$. En este contexto es casi natural considerar la función gamma de Euler, ya que sus polos son precisamente los enteros no positivos y, por tanto, los ceros de su función recíproca serán precisamente estos mismos. Recordemos que

(3) $$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Además, la función gamma satisface la siguiente ecuación funcional:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Esta función se extiende de manera holomorfa a todo el plano complejo excepto a los enteros no positivos, por lo que su función recíproca puede ser extendida a una función entera, ya que Γ no tiene ceros. Esta también tiene una representación como producto infinito, uniformemente convergente en conjuntos compactos,

(4) $$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n},$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni [5]. Se sigue que

$$Z\left(\frac{1}{\Gamma(z)}\right) = \{0, -1, -2, \ldots\}.$$

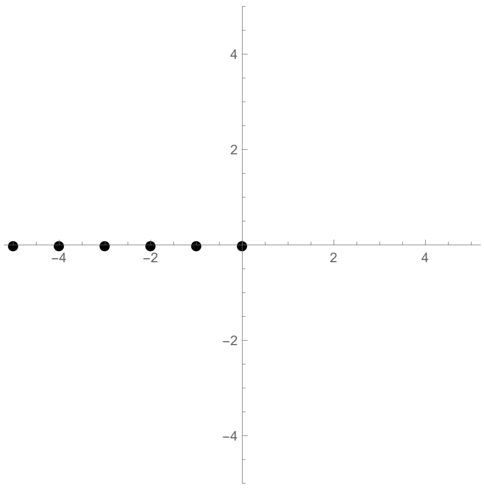


Figura 2: Ceros de $1/\Gamma(z)$.

Este conjunto está representado en la figura 2. Ahora bien, si a este conjunto de ceros se le aplica una determinada transformación lineal, se puede construir una función entera con los ceros deseados, $Z(P_k)$. De hecho, la composición con $z \mapsto 1 - z$ tiene por ceros el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$, los cuales son parte de los ceros de, por ejemplo, la función P_5. Además, después de componer con la transformación $z \mapsto z/w_1$, los ceros son movidos a la segunda línea (en sentido antihorario) de la figura 1. En general, el producto finito

(5) $$\frac{1}{\prod_{j=0}^{k-1} \Gamma\left(1 - \frac{z}{w_j}\right)}$$

tiene el mismo conjunto de ceros que $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^k}{n^k}\right)$. Veamos que en realidad son la misma función.

3. Teorema principal

Se presenta ahora un resultado que muestra que la expresión (5) coincide con el producto $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^k}{n^k}\right)$. Primero necesitamos otro resultado acerca de las raíces de la unidad.

Lema 1. *Sean $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$ y $\{w_j\}_{j=0}^{k-1}$ el conjunto de las k-ésimas raíces de la unidad. Entonces,*

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{w_j} = 0, \qquad \prod_{j=0}^{k-1} w_j = (-1)^{k+1}.$$

Demostración. Usando la representación

$$p_k(z) = z^k - 1 = \prod_{j=0}^{k-1} (z - w_j),$$

si se desarrolla el producto de la derecha y se comparan ambos lados de la igualdad, se deduce inmediatamente que

$$-1 = \prod_{j=0}^{k-1} -w_j = (-1)^k \prod_{j=0}^{k-1} w_j \text{ y } 0 = -\sum_{k=0}^{k-1} w_j. \qquad \blacksquare$$

Ya estamos en condiciones de presentar el resultado principal.

Teorema 2. *Sea $k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 2$. Entonces,*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^k}{n^k}\right) = \left(\prod_{j=0}^{k-1} \Gamma\left(1 - \frac{z}{w_j}\right)\right)^{-1}. \tag{6}$$

Demostración. Sea $p_k(z) = z^k - 1$. Se tiene por la segunda igualdad del lema 1 que

$$p_k(z) = \prod_{j=0}^{k-1} (z - w_j) = \prod_{j=0}^{k-1} (-w_j) \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{z}{-w_j}\right) = -\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{z}{-w_j}\right).$$

Por la primera igualdad del lema 1,

$$\prod_{j=0}^{k-1} \exp\left(\frac{z}{w_j}\right) = 1$$

y, por tanto,

$$p_k(z) = -\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{z}{-w_j}\right) \exp\left(\frac{z}{w_j}\right).$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^k}{n^k}\right) &= \prod_{n=1}^{\infty} -p_k\left(\frac{z}{n}\right) \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{z}{-nw_j}\right) \exp\left(\frac{z}{nw_j}\right) \\
&= \prod_{j=0}^{k-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{-nw_j}\right) \exp\left(\frac{z}{nw_j}\right) \\
&= \prod_{j=0}^{k-1} \left(\Gamma\left(\frac{-z}{w_j}\right) \frac{-z}{w_j} \exp\left(\gamma \frac{-z}{w_j}\right)\right)^{-1} \\
&= \prod_{j=0}^{k-1} \left(\Gamma\left(\frac{-z}{w_j}\right) \frac{-z}{w_j}\right)^{-1} \\
&= \left(\prod_{j=0}^{k-1} \Gamma\left(1 - \frac{z}{w_j}\right)\right)^{-1}.
\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Una versión más general del teorema 2 se puede encontrar en *A course of modern analysis* [7], el cual expresa el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_k)}{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_k)},$$

para $k \geq 2$ y bajo ciertas condiciones sobre $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$, en términos de la función gamma.

Ejemplo 3. Imaginemos que queremos calcular el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$. De acuerdo con el teorema 2, se puede escribir

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^3}{n^3}\right) = \left(\prod_{j=0}^{2}\Gamma\left(1-\frac{z}{w_j}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{\Gamma(1-z)\,\Gamma\left(1-\dfrac{z}{\exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}\right)}\right)\Gamma\left(1-\dfrac{z}{\exp\left(\frac{4\pi \mathrm{i}}{3}\right)}\right)}.$$

Para $z=-1$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right) &= \frac{1}{\Gamma(2)\,\Gamma\left(1+\exp\left(\frac{-2\pi \mathrm{i}}{3}\right)\right)\Gamma\left(1+\exp\left(\frac{-4\pi \mathrm{i}}{3}\right)\right)}\\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)}\\ &= \frac{1}{\pi}\cosh\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de la *fórmula de reflexión de Euler*,

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}, \qquad \operatorname{Re}(z) > 0.$$ ◂

Trabajar con valores no enteros de la función gamma de Euler es un poco difícil. Por esta razón, se presenta un resultado complementario para el caso en el que k es un número par. Este relaciona la familia de funciones P_k con el producto finito de funciones seno, las cuales son más fáciles de tratar.

Corolario 4. *Sea $m \in \mathbb{N}$ y sean $\{w_j\}_{j=0}^{2m-1}$ las raíces $2m$-ésimas de la unidad. Entonces,*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^{2m}}{n^{2m}}\right) = \frac{\mathrm{i}^{m-1}}{(\pi z)^m}\prod_{j=0}^{m-1}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{w_j}\right).$$

Demostración. La clave es agrupar el producto de funciones gamma en parejas:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(1-\frac{z}{w_j}\right)\Gamma\left(1-\frac{z}{w_{j+m}}\right) &= -\frac{z}{w_j}\Gamma\left(-\frac{z}{w_j}\right)\Gamma\left(1-\frac{z}{w_{j+m}}\right)\\ &= -\frac{z}{w_j}\Gamma\left(-\frac{z}{w_j}\right)\Gamma\left(1+\frac{z}{w_j}\right).\end{aligned}$$

Ahora, por la fórmula de reflexión de Euler, se obtiene que

$$\Gamma\left(1-\frac{z}{w_j}\right)\Gamma\left(1-\frac{z}{w_{j+m}}\right) = \frac{z}{w_j}\frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{w_j}\right)}.$$

Por el teorema 2, finalmente obtenemos que

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^{2m}}{n^{2m}}\right)=\left(\prod_{j=0}^{m-1}\frac{z}{w_j}\frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{w_j}\right)}\right)^{-1}=\frac{\mathrm{i}^{m-1}}{(\pi z)^m}\prod_{j=0}^{m-1}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{w_j}\right).$$

El término i^{m-1} en la última igualdad es debido a que

$$\prod_{j=0}^{m-1} w_j=\prod_{j=0}^{m-1}\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{2m}j\right)=\exp\left(\frac{\pi\mathrm{i}}{m}\sum_{j=0}^{m-1}j\right)=\exp\left(\frac{\pi\mathrm{i}(m-1)}{2}\right)=\mathrm{i}^{m-1}. \qquad \blacksquare$$

4. Relación con la función zeta de Riemann

Puede resultar extraño que se pueda encontrar una fórmula cerrada para $P_k(z)$ para cualquier k y que, en cambio, no se haya encontrado todavía una fórmula cerrada para valores impares de la función zeta de Riemann, ya que

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^k}{n^k}\right)=1-\zeta(k)z^k+\dots$$

Así pues, a primera vista parece ser que, como tenemos una fórmula cerrada para el producto infinito en términos de la función gamma, deberíamos poder expresar $\zeta(k)$ de igual forma para cualquier $k\geq 2$, pero esto no es así.

Esto se ve reflejado a través del corolario 4. Cuando k es par, podemos expresar P_k en términos de la función seno, de la cual el desarrollo de Taylor es conocido. Así pues, reagrupando los coeficientes es posible, por ejemplo, resolver el problema de Basilea. En cambio, para valores impares de k, se debe trabajar con el recíproco de la función gamma, y la clave aquí es que no se dispone de una fórmula cerrada para todos los coeficientes de su desarrollo de Taylor. De hecho, solo se conocen los tres primeros:

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=z+\gamma z^2+\left(\frac{\gamma^2}{2}-\frac{\pi^2}{12}\right)z^3+\dots \tag{7}$$

Nosotros estamos interesados en el desarrollo de Taylor de la función recíproca de $\Gamma(1-z)$,

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)}=1-\gamma z+\left(\frac{\gamma^2}{2}-\frac{\pi^2}{12}\right)z^2+a_3z^3+\dots,$$

donde $a_3\in\mathbb{R}$.

Por el teorema 2,

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^k}{n^k}\right)=\prod_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{z}{w_j}\right)}.$$

Entonces, $-\zeta(k)$ es el coeficiente de z^k en el desarrollo en serie de Taylor de la función en el lado derecho. Por ejemplo, para $k=3$ y después de varias manipulaciones, se llega a que

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)\,\Gamma\left(1-\frac{z}{\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)}\right)\Gamma\left(1-\frac{z}{\exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right)}\right)}=1+\left(3a_3^3+\frac{\gamma^3}{2}-\frac{1}{4}\gamma\pi^2\right)z^3+\dots$$

Así pues, $\zeta(3)=1/4\gamma\pi^2-3a_3^3-\gamma^3/2$. En otras palabras, podemos obtener una fórmula cerrada para $\zeta(3)$ si obtenemos una fórmula cerrada para el tercer coeficiente del desarrollo de Taylor de $1/\Gamma(1-z)$. Es más, si la encontramos para cada uno de sus coeficientes también encontramos una fórmula cerrada para $\zeta(k)$ en general. Un estudio completo sobre estos coeficientes se puede consultar en «Taylor series for the reciprocal gamma function and multiple zeta values» [6]. Recientemente, una representación integral ha sido descubierta por Fekih-Ahmed [4]:

$$a_n=\frac{(-1)^n}{\pi n!}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\operatorname{Im}((\log(t)-\mathrm{i}\pi)^n)\,\mathrm{d}t.$$

Referencias

[1] Apéry, Roger. «Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$». En: *Astérisque* 61 (1979): *Journées arithmétiques de Luminy, 20 Juin – 24 Juin 1978. Colloque international du CNRS, Marseille-Luminy*, págs. 11-13. ISSN: 0303-1179.

[2] Apostol, Tom M. «Another elementary proof of Euler's formula for $\zeta(2n)$». En: *American Mathematical Monthly* 80 (1973), págs. 425-431. ISSN: 0002-9890. https://doi.org/10.2307/2319093.

[3] Eberlein, William F. «On Euler's infinite product for the sine». En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 58.1 (1977), págs. 147-151. ISSN: 0022-247X. https://doi.org/10.1016/0022-247X(77)90234-7.

[4] Fekih-Ahmed, Lazhar. «On the Power Series Expansion of the Reciprocal Gamma Function». En: *arXiv e-prints* (2014). arXiv: 1407.5983 [math.NT].

[5] Rao, Murali; Stetkær, Henrik; Fournais, Søren, y Møller, Jacob Schach. *Complex analysis. An invitation.* 2.ª ed. Hackensack: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2015. https://doi.org/10.1142/9062.

[6] Sakata, Mika. «Taylor series for the reciprocal gamma function and multiple zeta values». En: *Proceedings of the Japan Academy. Series A* 93.6 (2017), págs. 47-49. ISSN: 0386-2194. https://doi.org/10.3792/pjaa.93.47.

[7] Whittaker, Edmund T. y Watson, George N. *A course of modern analysis.* 4.ª ed. Cambridge Mathematical Library. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. https://doi.org/10.1017/CBO9780511608759.