TEMat

Buscando el ADN de un espacio de Banach: el problema de Tingley

Alexis Béjar López
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada
alexisbjl@correo.ugr.es

Resumen: Sabemos que, mediante el ADN, es posible distinguir a dos personas comparando solamente una pequeña parte de ellas. Trasladando este hecho a los espacios de Banach y entendiendo que dos de estos espacios son idénticos cuando entre ellos existe un isomorfismo isométrico (isometría lineal y sobreyectiva), al preguntar dónde está contenido el ADN de un espacio de Banach, nos estamos refiriendo a qué porción necesitamos conocer de un espacio de Banach para poder distinguirlo de otro. Tras varios avances, el punto en el que se encuentra esta pregunta actualmente es en el de tratar de averiguar si el ADN de un espacio de Banach está contenido en su esfera unidad, dando lugar al conocido como problema de Tingley. Este artículo se centra fundamentalmente en recoger algunas de las respuestas afirmativas que admite este problema cuando se plantea entre ciertos espacios de Banach conocidos.

Abstract: We know that, through DNA, it is possible to distinguish two people by comparing only a small part of them. Transferring this fact to Banach spaces and understanding that two of these spaces are identical when there is an isometric isomorphism between them (linear and surjective isometry), when we ask where the DNA of a Banach space is contained, we are referring to what portion we need to know about a Banach space to distinguish it from another. After several advances, the current state of the question is trying to find out whether the DNA of a Banach space is contained in its unity sphere, giving rise to what is known as Tingley's problem. This article focuses primarily on collecting some of the affirmative answers that this problem admits when it arises between certain known Banach spaces.

Palabras clave: espacio de Banach, homeomorfismo, isometría, isomorfismo isométrico, problema de Tingley.

MSC2010: 46B03.

Recibido: 3 de noviembre de 2019.
Aceptado: 24 de julio de 2020.

Agradecimientos: Agradezco a mi familia, especialmente a mis padres (Paco e Isabel) y a mi abuela (Paqui), por apoyarme y enseñarme incluso más de lo que saben. Muestro mi agradecimiento a mis amigos de siempre, sobre todo a Alex y Álvaro, con los que he compartido unos años de maravillosa convivencia. No puedo olvidarme tampoco de las grandes personas que las matemáticas me han dado hasta ahora y que se han convertido en mis amigos para siempre: Antoñín, Belén, Elías, Melli, Roque A. y Tony.

Este artículo ha sido realizado durante el disfrute de una Beca de Iniciación a la Investigación del plan Propio de la Universidad de Granada (Año 2018) bajo la supervisión del profesor Antonio Peralta, al que agradezco enormemente su ayuda para realizar el TFG del que se nutre este artículo.

Referencia: Béjar López, Alexis. «Buscando el ADN de un espacio de Banach: el problema de Tingley». En: *TEMat*, 5 (2021), págs. 57-68. ISSN: 2530-9633. URL: https://temat.es/articulo/2021-p57.

1. Introducción

Es sabido que dos espacios vectoriales son idénticos cuando entre ellos existe una biyección lineal, y que lo mismo ocurre en el caso de espacios métricos cuando tenemos una isometría (aplicación que conserva distancias) sobreyectiva entre dos de ellos. Como es cierto que toda aplicación que preserva distancias es inyectiva, sería suficiente con tener una isometría sobreyectiva y lineal (en adelante isomorfismo isométrico) entre dos espacios normados, que son espacios vectoriales y también métricos con la distancia heredada de la norma, para afirmar que uno es una copia del otro. Pero, ¿es esto necesario? Es decir, ¿realmente necesitamos definir un isomorfismo isométrico entre la totalidad de dos espacios normados para afirmar que son idénticos? O, por el contrario, ¿basta con que exista una identificación de este tipo entre dos porciones de ambos espacios?

El primer avance en esta dirección fue conseguido por Mazur y Ulam, y queda recogido en el siguiente resultado cuya demostración original puede encontrarse en su artículo [15].

Teorema 1 (Mazur-Ulam,1932). *Sean E y F dos espacios normados reales y $\Delta\colon E \to F$ una isometría sobreyectiva. Entonces, Δ es afín, es decir, existen una aplicación lineal T y un vector $y \in F$ tales que $\Delta(x) = T(x) + y$ para todo $x \in E$.*

Obsérvese la necesidad de la hipótesis de que los espacios vectoriales sean reales en este resultado, puesto que, por ejemplo, la aplicación de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ que a cada elemento le asocia su conjugado es una isometría sobreyectiva y no es $\mathbb{C}$-lineal, ya que $\bar{\mathrm{i}} \neq \mathrm{i}$. Por esta razón, todos los espacios normados que vamos a tratar en este artículo deben entenderse como espacios normados reales.

Como consecuencia de este teorema obtenemos que, para averiguar si dos espacios normados son idénticos, podemos «olvidarnos» de que son espacios vectoriales y tratar de estudiar si son idénticos como espacios métricos, ya que la aplicación $T = \Delta - y$ vista en el teorema es un isomorfismo isométrico. De esta forma, ahora podemos afirmar que toda la información de un espacio normado, es decir, todo lo que necesitamos conocer de un espacio normado para poder distinguirlo de otro, está contenida en su estructura de espacio métrico.

Varias décadas después, P. Mankiewicz [14] demostró el siguiente teorema, que supone una generalización del resultado de Mazur y Ulam. Para entender por completo este teorema de Manckiewicz es necesario recordar que un subconjunto A de un espacio vectorial se dice convexo si, para cualquier par de puntos de A, el segmento que los une se queda contenido en A.

Teorema 2 (Mankiewicz,1972). *Sean E y F dos espacios normados y $\Delta\colon A \to B$ una isometría sobreyectiva entre dos subconjuntos convexos de E y F. Entonces, existe una isometría afín $T\colon E \to F$ tal que $T_{|A} = \Delta$.*

A partir de este resultado obtenemos de manera sencilla este corolario.

Corolario 3. *Si E y F son dos espacios normados y $\Delta\colon B_E \to B_F$ es una isometría sobreyectiva entre sus bolas unidad cerradas, entonces Δ es la restricción de un isomorfismo isométrico entre E y F.*

Demostración. Comencemos notando que la bola unidad de un espacio normado es un conjunto convexo y, por el teorema 2, tenemos que Δ es la restricción de una isometría afín $T\colon E \to F$.

Para probar que T es lineal, basta ver que $\Delta(0) = 0$. Dado $y \in B_F$, como Δ es sobreyectiva, existe $x \in B_E$ tal que $\Delta(x) = y$. Por tanto, utilizando que Δ es una isometría, obtenemos que

$$\|\Delta(0) - y\| = \|\Delta(0) - \Delta(x)\| = \|0 - x\| \leq 1,$$

para todo $y \in B_F$. Puesto que en cualquier espacio normado se verifica que 0 es el único elemento tal que su distancia a cualquier otro elemento de la bola unidad es menor o igual que 1, obtenemos que $\Delta(0) = 0$ y, como consecuencia, T es lineal.

Para acabar la demostración nos resta comprobar que T es sobreyectiva. Para ello, consideramos un elemento arbitrario $y \in F$; si $y = 0$, entonces $T(0) = y$, y si $y \neq 0$, entonces $\frac{y}{\|y\|} \in B_F$ y existe $x \in B_E$ tal que $T(x) = \Delta(x) = \frac{y}{\|y\|}$. Finalmente, usando que T es lineal, nos queda que $T(\|y\|x) = y$. ∎

Este resultado muestra que ya no necesitamos comparar la totalidad de dos espacios normados (ni siquiera como espacios métricos) para averiguar si son idénticos, sino que nos es suficiente con estudiar si sus bolas unidad cerradas son isométricas.

El siguiente paso fue dado por D. Tingley en 1987 [17], cuando demostró que si E y F son dos espacios normados de dimensión finita (y, por tanto, completos) y $\Delta : S(E) \to S(F)$ es una isometría sobreyectiva entre sus esferas unidad, entonces, para todo $x \in S(E)$, se verifica que $\Delta(-x) = -\Delta(x)$. Debido a esta aportación, el problema que vamos a tratar a continuación es conocido como el **problema de Tingley**:

Problema (problema de Tingley). Sean E y F dos espacios de Banach y $\Delta : S(E) \to S(F)$ una isometría sobreyectiva entre sus esferas unidad. ¿Podemos asegurar que Δ es la restricción de una isometría sobreyectiva y lineal entre la totalidad de ambos espacios? ◂

Observemos que una respuesta afirmativa a este problema nos proporcionaría un resultado mucho más fuerte que el de Mankiewicz (teorema 2), ya que implicaría que toda la información de un espacio de Banach (siempre visto como espacio vectorial real) está contenida en su esfera unidad, un conjunto que desde un punto de vista topológico es «pequeño», es un cerrado con interior vacío.

Aunque el problema de Tingley supone un activo tema de investigación en el campo del análisis funcional, se trata de un problema abierto incluso en dimensión dos. Sin embargo, sí que se ha podido resolver para algunos espacios de Banach concretos, así que dedicaremos las siguientes páginas a estudiar el problema de Tingley cuando se plantea entre algunos espacios de Banach clásicos. Concretamente, siguiendo las ideas de Ding [6-8] y Wang [19] veremos cómo puede resolverse este problema cuando se plantea entre espacios de Hilbert (sección 2), entre los espacios $\ell_p(I)$ que generalizan a los espacios ℓ_p clásicos (sección 3) y entre espacios $C_0(\Omega)$ (sección 4).

En este artículo solo pretendemos realizar una introducción al problema de Tingley y supone una selección de los resultados más destacados que aparecen en el trabajo de fin de grado de Béjar López [2]. Esta introducción puede ser completada con las referencias que exponemos a continuación.

En primer lugar, para completar la sección 3 puede ser de utilidad el artículo escrito por G. Ding [9]. Allí, se definen los espacios $\ell_\infty(I)$ de las funciones acotadas de Ω en $\mathbb{R}$, que forma un espacio de Banach con la norma del supremo, y se demuestra que toda isometría sobreyectiva entre las esferas unidad dos espacios de este tipo puede ser extendida a una isometría sobreyectiva y lineal entre la totalidad de los espacios.

Una posible continuación para la sección 4 puede encontrarse en el artículo escrito por R. Liu [13]. Allí, entre otros resultados, se prueba que si Ω es un espacio compacto y de Hausdorff, toda isometría sobreyectiva entre la esfera unidad de $C(\Omega)$ (el espacio de Banach de las funciones continuas de Ω en $\mathbb{R}$ con la norma del máximo) y la de un espacio de Banach E puede ser extendida a una isometría sobreyectiva y lineal entre ambos espacios.

Uno de los resultados más recientes en torno al problema de Tingley es el aportado por el español Cabello Sánchez [3], que demuestra que todo espacio de Banach dos dimensional y no estrictamente convexo verifica la propieda de Mazur-Ulam (véanse las definiciones 4 y 19).

Las que aquí se proponen forman una pequeña parte de la gran variedad de referencias que pueden consultarse para profundizar en el problema de Tingley. Se anima al lector a que, si está interesado en más información, consulte el *survey* donde Yang y Zhao [20] recogen los resultados más destacados en torno al problema de Tingley que se han publicado hasta 2014.

2. Problema de Tingley entre espacios de Hilbert

Uno de los primeros ejemplos que se nos viene a la cabeza al hablar de espacios de Banach y con los que estamos más acostumbrados a trabajar son los espacios de Hilbert. Como veremos en esta sección, en este tipo de espacios es posible resolver un problema más fuerte que el de Tingley y todos los resultados que necesitaremos para ello pueden consultarse en el artículo de Ding [6].

Comencemos introduciendo el concepto de espacio de Hilbert.

Definición 4. Si E es un espacio vectorial, un producto escalar real es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon E \times E \to \mathbb{R}$ verificando las siguientes propiedades:

- Simétrica: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad (x, y \in E)$.
- Lineal en la primera variable: $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle \quad (x, y, z \in E,\ a, b \in \mathbb{R})$.

  Por ser simétrica, la linealidad en la primera variable implica también la linealidad en la segunda.
- Definida positiva: $\langle x, x \rangle > 0$, para todo $0 \neq x \in E$.

Diremos que un espacio normado E es un **espacio prehilbertiano** si existe un producto escalar tal que $\|\cdot\|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$, donde $\|\cdot\|$ denota la norma en E.

Un **espacio de Hilbert** no es más que un espacio prehilbertiano completo. ◂

Definición 5. Un espacio normado E satisface la conocida como **regla del paralelogramo** si se verifica que $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad (x, y \in E)$. ◂

Es fácil comprobar que todo espacio prehilbertiano verifica la regla del paralelogramo y, tal y como probó M. Day en 1947 [5], la implicación contraria también es cierta. Concretamente, se cumple que, si los elementos de la esfera unidad de un espacio normado satisfacen la regla del paralelogramo, entonces la norma del espacio proviene de un producto escalar.

Para resolver el problema de Tingley entre espacios de Hilbert vamos a estudiar algunas propiedades de los espacios normados estrictamente convexos y de las isometrías sobreyectivas entre sus esferas unidad.

Definición 6. Diremos que un espacio normado E es **estrictamente convexo** si para cualquier par de elementos $x, y \in S(E)$ tales que $\|x + y\| = 2$ se verifica que $x = y$. ◂

Observación 7. No es complicado comprobar que todo espacio prehilbertiano es estrictamente convexo. Efectivamente, si E es un espacio prehilbertiano y $x, y \in S(E)$ verifican que $\|x + y\| = 2$, por la igualdad del paralelogramo concluimos que $\|x - y\|^2 = 0$ y, por tanto, $x = y$.

También es cierto que no todo espacio normado es estrictamente convexo. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ con la norma del máximo, $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, los pares de puntos $x = (1, 0)$ e $y = (1, 1)$, verifican que $\|x + y\| = 2$ y, sin embargo, $x \neq y$.

Igualmente, si consideramos en $\mathbb{R}^2$ la norma 1, $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$, tenemos que $\|(1, 0) + (0, 1)\|_1 = 2$ y ambos puntos son distintos. ◂

El siguiente resultado es una extensión de la aportación original de Tingley.

Proposición 8. *Si E y F son espacios normados con E estrictamente convexo y $\Delta \colon S(E) \to S(F)$ verifica que*

(i) $-\Delta(S(E)) \subset \Delta(S(E))$ *y*

(ii) $\|\Delta(x) - \Delta(y)\| \leq \|x - y\| \quad (x, y \in S(E))$,

entonces Δ es inyectiva y $\Delta(-x) = -\Delta(x)$ para todo $x \in S(E)$.

Además, si E y F son prehilbertianos, se cumple que $\|\Delta(x) - \lambda\Delta(y)\| = \|x - \lambda y\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo par de elementos $x, y \in S(E)$.

Ya podemos enunciar y demostrar el primer teorema sobre el que posteriormente se sustentará la solución del problema de Tingley en espacios de Hilbert.

Teorema 9. *Sean E y F dos espacios prehilbertianos y $\Delta \colon S(E) \to S(F)$ una aplicación satisfaciendo que*

(i) $-\Delta(S(E)) \subset \Delta(S(E))$ *y*

(ii) $\|\Delta(x) - \Delta(y)\| \leq \|x - y\| \quad (x, y \in S(E))$.

Entonces, existe $T \colon E \to F$ una isometría homogénea (es decir, $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $x \in E$) que extiende a Δ.

Demostración. Utilizamos, como es habitual, la extensión positivamente homogénea de Δ dada por $T\colon E \to F$,

$$T(x) = \begin{cases} \|x\|\Delta\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Utilizando la proposición 8 comprobamos que T es homogénea. Efectivamente,

$$T(\lambda x) = |\lambda|\|x\|\Delta\left(\frac{\lambda x}{|\lambda|\|x\|}\right) = |\lambda|\|x\|\frac{\lambda}{|\lambda|}\Delta\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \lambda T(x) \quad (0 \neq x \in E,\ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}).$$

Solo nos queda comprobar que T es una isometría. Para tal fin consideramos $0 \neq x, y \in E$ y, de nuevo por la proposición 8, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(y)\| &= \left\| \|x\|\Delta\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \|y\|\Delta\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\| \\ &= \|x\| \left\| \Delta\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \frac{\|y\|}{\|x\|}\Delta\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\| \\ &= \|x\| \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{\|y\|}{\|x\|}\frac{y}{\|y\|} \right\| = \|x - y\|. \end{aligned}$$

Si x o y fuese 0, es evidente que $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$. Así que T es una isometría. ■

El siguiente paso consiste en reunir las últimas herramientas necesarias para poder dar una respuesta afirmativa al problema de Tingley en espacios de Hilbert: recordaremos el teorema de extensión equinórmica de Hahn-Banach y el teorema de representación Riesz-Fréchet (teorema 3.3.8 y teorema 6.3.4 del libro de Lax [12], respectivamente) e introduciremos los conceptos de punto suave y funcional soporte.

Recordemos que si E es un espacio normado, el conjunto E^* formado por todas las aplicaciones lineales y continuas de E en $\mathbb{R}$ se llama **espacio dual** de E y es un espacio normado cuando se dota de la conocida como norma de operadores: $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}$.

Teorema 10 (teorema de representación Riesz-Fréchet). *Sea E un espacio de Hilbert y sea $\Psi\colon E \to E^*$ la aplicación que a cada $x \in E$ le hace corresponder el funcional lineal $\Psi(x)\colon E \to \mathbb{R}$ definido por*

$$[\Psi(x)](y) = \langle x, y \rangle \quad (y \in E).$$

Entonces, se verifica que Ψ es una biyección lineal e isométrica de E sobre E^*.

Teorema 11 (extensión equinórmica). *Sean E un espacio normado, S un subespacio de E y $f \in S^*$. Entonces, existe $g \in E^*$ con $\|f\| = \|g\|$ y tal que $f(y) = g(y)$ para todo $y \in S$.*

Corolario 12. *Si E es un espacio normado, para cada $0 \neq x \in E$ existe $f \in E^*$ con $\|f\| = 1$ y $f(x) = \|x\|$.*

Definición 13. Sea E un espacio de Banach y $0 \neq x_0 \in E$. Por el corolario 12, sabemos que existe f, un funcional lineal en la esfera unidad de E^*, tal que $f(x_0) = \|x_0\|$. Diremos que x_0 es un **punto suave** si el conjunto $\{f \in S(E^*) : f(x_0) = \|x_0\|\}$ tiene un único elemento, y dicho elemento será llamado **funcional soporte** en x_0. ◂

Nos será útil conocer la siguiente propiedad:

Lema 14. *Sean $T\colon E \to F$ una isometría entre dos espacios de Banach con $T(0) = 0$, $x_0 \in E$ un punto suave y $g \in S(F^*)$ tal que $g(T(\lambda x_0)) = \lambda\|x_0\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, $g(T(x)) = f_{x_0}(x)$ para todo $x \in E$, donde f_{x_0} denota el funcional soporte en x_0.*

Ya estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema que, como vamos a ver, ofrece una respuesta positiva a un problema más fuerte que el de Tingley.

Teorema 15. *Sean E y F dos espacios de Hilbert y $\Delta : S(E) \to S(F)$ una aplicación satisfaciendo que*

(I) $-\Delta(S(E)) \subset \Delta(S(E))$ *y*

(II) $\|\Delta(x) - \Delta(y)\| \leq \|x - y\| \quad (x, y \in S(E))$.

Entonces, Δ puede ser extendida a una isometría lineal entre E y F.

Demostración. El teorema 9 nos garantiza que T, la extensión positivamente homogénea de Δ allí definida, es una isometría homogénea entre E y F. Por tanto, solo nos queda comprobar que T es aditiva.

En primer lugar, dado $x \in S(E)$, tenemos que, por el teorema de Riesz-Fréchet (teorema 10), el cardinal de $\{f \in S(E^*) : f(x) = 1\}$ es el mismo que el cardinal de $\{y \in S(E) : \langle x, y\rangle = 1\}$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, como $\|x\| = \|y\| = 1$, sabemos que $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| = 1$ implica que $x = y$. Así que el conjunto $\{y \in S(E) : \langle x, y\rangle = 1\}$ tiene un único elemento y x es un punto suave.

Por otro lado, teniendo en cuenta que, de nuevo por el teorema de Riesz-Fréchet, para cualquier $x \in S(E)$ existe $g \in F^*$ tal que $g(y) = \langle y, T(x)\rangle$ para todo $y \in F$, nos queda que

$$g(T(\lambda x)) = \langle T(\lambda x), T(x)\rangle = \langle \lambda T(x), T(x)\rangle = \lambda\|T(x)\|^2 = \lambda\|x\| \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Por tanto, utilizando el lema 14, deducimos que

$$g\left(T(z)\right) = f_x(z) \quad (z \in E).$$

Esta expresión nos permite concluir que para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ y $x \in S(E)$ se cumple que

$$\begin{aligned}\langle T(x_1 + x_2), T(x)\rangle &= g(T(x_1 + x_2)) = f_x(x_1 + x_2)\\ &= f_x(x_1) + f_x(x_2) = g(T(x_1)) + g(T(x_2))\\ &= \langle T(x_1) + T(x_2), T(x)\rangle.\end{aligned}$$

Esto prueba que

$$\langle T(x_1 + x_2), y\rangle = \langle T(x_1) + T(x_2), y\rangle \quad (y \in \operatorname{Span}\{T(x) : x \in S(E)\}), \tag{1}$$

donde $\operatorname{Span}\{T(x) : x \in S(E)\}$ denota el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de de la forma $T(x)$ con $x \in S(E)$.

Finalmente, tomando $y = \frac{1}{\|x_1+x_2\|}(T(x_1) + T(x_2)) - T\Big(\frac{x_1+x_2}{\|x_1+x_2\|}\Big) \in \operatorname{Span}\{T(x) : x \in S(E)\}$ y usando que T es homogénea, de la expresión (1) concluimos que $\frac{1}{\|x_1+x_2\|^2}\|T(x_1 + x_2) - (T(x_1) + T(x_2))\|^2 = 0$ y, por tanto, $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in X$.

De esta forma queda probado que T es una isometría lineal entre E y F. ∎

Esto nos permite probar el siguiente resultado

Corolario 16 (solución al problema de Tingley en espacios de Hilbert). *Sean E y F dos espacios de Hilbert y $\Delta : S(E) \to S(F)$ una aplicación satisfaciendo que*

(I') *Δ es sobreyectiva y*

(II) $\|\Delta(x) - \Delta(y)\| \leq \|x - y\| \quad (x, y \in S(E))$.

Entonces, Δ puede ser extendida a una isometría sobreyectiva y lineal entre E y F.

Demostración. Como Δ es sobreyectiva, se verifica que $\Delta(S(E)) = S(F) = -S(F) = -\Delta(S(E))$. Aplicando el teorema 15, tenemos que la extensión positivamente homogénea de Δ es una isometría lineal entre E y F. Repitiendo el razonamiento realizado en la demostración del corolario 3, comprobamos que dicha extensión es también sobreyectiva. ∎

Observación 17. Como consecuencia de este resultado, además de resolver el problema de Tingley entre espacios de Hilbert, obtenemos que no existe ninguna aplicación $\Delta : S(E) \to S(F)$ (con E y F espacios de Hilbert) sobreyectiva y verificando que $\|\Delta(x) - \Delta(y)\| < \|x - y\|$ para todo $x, y \in S(E)$. ◂

El siguiente corolario muestra que no es necesaria la hipótesis de la sobreyectividad para poder extender la aplicación, aunque entonces hay que exigir que Δ sea una isometría.

Corolario 18. *Si $\Delta : S(E) \to S(F)$ es una isometría entre las esferas unidad de dos espacios de Hilbert, entonces puede extenderse a una isometría lineal entre E y F.*

Demostración. Dado $x \in S(E)$, aplicando que Δ es una isometría, obtenemos que

$$\|\Delta(x) - \Delta(-x)\| = \|x - (-x)\| = 2.$$

Como F es un espacio de Hilbert, es estrictamente convexo (observación 7) y, por tanto, se cumple que $\Delta(-x) = -\Delta(x)$. De esta forma obtenemos que $\Delta(S(E)) = -\Delta(S(E))$ y el teorema 15 termina la demostración. ■

Para completar este apartado, vamos a probar que los espacio de Hilbert cumplen la que se conoce como propiedad de Mazur-Ulam. Este resultado se encuentra en el artículo de Becerra-Guerrero *et al.* [1].

Definición 19. Diremos que un espacio de Banach E cumple la **propiedad de Mazur-Ulam** cuando, dado cualquier espacio de Banach F, toda isometría sobreyectiva $\Delta : S(E) \to S(F)$ admite una extensión a una isometría sobreyectiva y lineal entre la totalidad de ambos espacios. ◂

Teorema 20. *Todo espacio de Hilbert cumple la propiedad de Mazur-Ulam.*

Demostración. Sea E un espacio de Hilbert y F un espacio de Banach tal que existe $\Delta : S(E) \to S(F)$, una isometría sobreyectiva.

Dados $y_1, y_2 \in S(F)$, por la sobreyectividad de Δ, existen $x_1, x_2 \in S(E)$ satisfaciendo que $\Delta(x_1) = y_1$ y $\Delta(x_2) = y_2$, y además se verifica que $\Delta(S(E)) = S(F) = -S(F) = -\Delta(S(E))$. Por la proposición 8 tenemos que $\Delta(-x_2) = -y_2$ y, por tanto,

$$\begin{aligned}\|y_1 + y_2\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2 &= \|\Delta(x_1) + \Delta(x_2)\|^2 + \|\Delta(x_1) - \Delta(x_2)\|^2 \\ &= \|x_1 + x_2\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 = 2\|x_1\|^2 + 2\|x_2\|^2 = 4 = 2\|y_1\|^2 + 2\|y_2\|^2.\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Day visto tras la definición 5, obtenemos que F es un espacio de Hilbert y el corolario 16 nos proporciona la conclusión deseada. ■

3. Problema de Tingley en espacios $\ell_p(I)$ ($p \in [1, \infty[\setminus \{2\}$)

En esta sección nos preguntaremos si, dado $1 \leq p < \infty$ y dos conjuntos arbitrarios no vacíos I y J, toda isometría entre $S(\ell_p(I))$ y $S(\ell_p(J))$ puede extenderse a una isometría sobreyectiva y lineal entre $\ell_p(I)$ y $\ell_p(J)$. Todos los resultados que necesitaremos para responder a esta pregunta han sido demostrados por Ding en sendos artículos para los casos $1 < p < \infty$ [7] y para el caso $p = 1$ [8].

El primer paso consiste en definir los espacios $\ell_p(I)$ (que no son más que una generalización de los habituales espacios $\ell_p(\mathbb{N})$) y para ello necesitamos introducir previamente el concepto de familia sumable.

Definición 21. Sea I un conjunto arbitrario no vacío y $\mathcal{F}(I) = \{F \subset I : F \text{ es finito}\}$. Diremos que una familia $\{x_i : i \in I\}$ de elementos de un espacio normado X es **sumable** si existe un elemento $x \in X$ tal que para todo ε positivo podemos encontrar un subconjunto $F_0 \subset \mathcal{F}(I)$ satisfaciendo que

$$\left\| x - \sum_{i \in F} x_i \right\| < \varepsilon, \text{ para todo } F \in \mathcal{F}(I) \text{ con } F_0 \subset F.$$

Diremos que $\{x_i : i \in I\}$ verifica la **condición de Cauchy para familias sumables** si para todo ε positivo existe $F_0 \subset \mathcal{F}(I)$ cumpliendo que

$$\left| \sum_{i \in F_1} x_i - \sum_{i \in F_2} x_i \right| < \varepsilon, \text{ para todo } F_1, F_2 \in \mathcal{F}(I), \text{ con } F_0 \subset F_1, F_2.$$ ◂

El siguiente resultado, cuya demostración queda recogida en los ejercicios resueltos 1.9, 1.12 y 1.13 del libro de Vera [18], nos proporciona un par de caracterizaciones útiles para saber si una familia es sumable.

Lema 22. *Sea I un conjunto arbitrario no vacío y sea $\{x_i : i \in I\}$ una familia infinita de elementos de un espacio normado X. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) *La familia $\{x_i : i \in I\}$ es sumable si y solo si el conjunto $A = \{i \in I : x_i \neq 0\}$ es numerable y, para toda biyección $\sigma\colon \mathbb{N} \to A$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ es convergente. Además, en caso de que $\{x_i : i \in I\}$ sea sumable, el límite $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ es independiente de σ y, por tanto, podemos escribir $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$, donde σ es cualquier biyección entre $\mathbb{N}$ y A.*

(ii) *Si X es un espacio de Banach, $\{x_i : i \in I\}$ es sumable si y solo si $\{x_i : i \in I\}$ satisface la condición de Cauchy.*

Una vez conocido el concepto de familia sumable, podemos definir los espacios $\ell_p(I)$.

Definición 23. Si I es un conjunto arbitrario y no vacío, denotaremos por $\mathbb{R}^I$ el espacio vectorial formado por todas las funciones $x\colon I \to \mathbb{R}$. Bajo esa notación, definimos $\ell_p(I)$ como el conjunto de funciones $x \in \mathbb{R}^I$ tales que la familia $\{|x(i)|^p : i \in I\}$ es sumable, es decir,

$$\ell_p(I) = \{x \in \mathbb{R}^I : \{|x(i)|^p : i \in I\} \text{ es sumable}\}.$$ ◂

Gracias al lema 22, sabemos que la aplicación

$$\|\cdot\|\colon \ell_p(I) \to \mathbb{R}_0^+,\ \|x\| = \left(\sum_{i\in I} |x(i)|^p\right)^{1/p}$$

está bien definida y es una norma. Además, se puede probar que $\ell_p(I)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^I$ completo cuando se dota de esta norma (la demostración es idéntica a la que se realiza en los espacios $\ell_p(\mathbb{N})$ y puede consultarse en el teorema 3.5 del libro de Ovchinnikov [16]).

Para todo $x \in \ell_p(I)$ se cumple que $x = \sum_{i\in I} x(i)e_i$ donde cada $e_i \in \ell_p(I)$ verifica que $e_i(k) = 1$ si $i = k$ y $e_i(k) = 0$ si $i \neq k$. Estos elementos e_i forman la que se conoce como **base canónica de** $\ell_p(I)$.

Observación 24. Cuando $p = \infty$, se define $\ell_\infty(I) = \{x \in \mathbb{R}^I : \sup\{|x(i)| : i \in I\} < \infty\}$. Este es un espacio de Banach cuando se dota de la norma del supremo $\|x\|_\infty = \sup\{|x(i)| : i \in I\}$.

Tal y como se ha comentado en la introducción, el problema de Tingley también admite una respuesta positiva cuando se plantea entre dos espacios de este tipo (ver el artículo de Ding [9]). Sin embargo, este resultado es demasiado técnico y se escapa de las pretensiones de este artículo, así que en esta sección nos quedaremos con los casos $1 \leq p < \infty$. ◂

A lo largo de esta sección excluiremos de nuestro análisis el caso $p = 2$. Este hecho no es restrictivo, ya que $\ell_2(I)$ es un espacio de Hilbert y ya sabemos que el problema de Tingley en espacios de Hilbert admite una respuesta positiva.

La herramienta fundamental para resolver el problema que nos ocupa en este apartado es el siguiente lema, que nos permite conocer cómo son las isometrías sobreyectivas entre las esferas unidad de dos espacios $\ell_p(I)$.

Lema 25. *Sean I y J dos conjuntos arbitrarios no vacíos y $p \in [1, \infty[\setminus \{2\}$. Si $\Delta\colon S(\ell_p(I)) \to S(\ell_p(J))$ es una isometría sobreyectiva, entonces existe una biyección $\pi\colon J \to I$ y una familia $\{z_i : i \in I\}$ con $z_i \in \{-1, 1\}$, para todo $i \in I$, para las que se se verifica que*

$$\Delta(x) = \sum_{j\in J} z_{\pi(j)} x(\pi(j)) e_j \quad (x \in \ell_p(I)).$$

Por último, el teorema que ofrecemos a continuación resuelve el problema de Tingley en espacios $\ell_p(I)$.

Teorema 26 (solución al problema de Tingley en espacios $\ell_p(I)$). *Sean I y J dos conjuntos arbitrarios no vacíos y $p \in [1, \infty[\setminus \{2\}$. Si $\Delta\colon S(\ell_p(I)) \to S(\ell_p(J))$ con $p \geq 1$ y $p \neq 2$ es una isometría sobreyectiva, entonces es posible extender Δ a una isometría sobreyectiva y lineal entre $\ell_p(I)$ y $\ell_p(J)$.*

Demostración. Al igual que ocurría en espacios de Hilbert, la extensión positivamente homogénea de Δ va a satisfacer las propiedades deseadas. Recordemos que dicha aplicación viene definida por $T\colon \ell_p(I) \to \ell_p(J)$ verificando que

$$T(x) = \begin{cases} \|x\|\Delta\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

De nuevo, como T es positivamente homogénea y Δ es sobreyectiva, tenemos que T es sobreyectiva.

Si consideramos x e y, dos elementos no nulos de $\ell_p(I)$, y denotamos $\alpha_i = \frac{x(i)}{\|x\|}$ y $\beta_i = \frac{y(i)}{\|y\|}$, para todo $i \in I$, el lema 25 establece que

$$\begin{aligned} T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) &= \Delta\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \sum_{j\in J} z_{\pi(j)}\alpha_{\pi(j)}e_j, \\ T\left(\frac{y}{\|y\|}\right) &= \Delta\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \sum_{j\in J} z_{\pi(j)}\beta_{\pi(j)}e_j. \end{aligned}$$

Como consecuencia, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(y)\|^p &= \left\| \|x\|\Delta\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \|y\|\Delta\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\|^p \\ &= \|x\|^p \left\| \Delta\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \frac{\|y\|}{\|x\|}\Delta\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\|^p \\ &= \|x\|^p \left\| \sum_{j\in J} z_{\pi(j)}\alpha_{\pi(j)}e_j - \frac{\|y\|}{\|x\|}\sum_{j\in J} z_{\pi(j)}\beta_{\pi(j)}e_j \right\|^p \\ &= \|x\|^p \left\| \sum_{j\in J} z_{\pi(j)}\left(\alpha_{\pi(j)} - \frac{\|y\|}{\|x\|}\beta_{\pi(j)}\right)e_j \right\|^p \\ &= \|x\|^p \sum_{j\in J} \left| z_{\pi(j)}\left(\alpha_{\pi(j)} - \frac{\|y\|}{\|x\|}\beta_{\pi(j)}\right)\right|^p \\ &= \|x\|^p \sum_{j\in J} \left| \alpha_{\pi(j)} - \frac{\|y\|}{\|x\|}\beta_{\pi(j)}\right|^p \\ &= \|x\|^p \sum_{i\in I} \left| \alpha_i - \frac{\|y\|}{\|x\|}\beta_i\right|^p \\ &= \|x\|^p \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{\|y\|}{\|x\|}\frac{y}{\|y\|}\right\|^p \\ &= \|x - y\|^p. \end{aligned}$$

Está claro que también se verifica que $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ en el caso de que x o y sean nulos. Por tanto, tenemos que T es una isometría sobreyectiva entre $\ell_p(I)$ y $\ell_p(J)$, y gracias al teorema de Mazur-Ulam (teorema 1) y al hecho de que $T(0) = 0$, concluimos que T es también lineal. ■

4. Problema de Tingley en espacios $C_0(\Omega)$

Para cerrar la lista de ejemplos en los que el problema de Tingley admite una respuesta positiva vamos a tratar el espacio $C_0(\Omega)$.

Definición 27. Si Ω es un espacio localmente compacto (es decir, todo punto posee un entorno compacto) y de Hausdorff, $C_0(\Omega)$ representa el espacio de las funciones continuas de Ω en $\mathbb{C}$ que se **anulan en infinito**, es decir, tales que para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ es compacto.

La aplicación

$$\|\cdot\|\colon C_0(\Omega) \to \mathbb{R}_0^+, \ \|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$$

es una norma que dota a $C_0(\Omega)$ de estructura de espacio de Banach. ◂

Observación 28. Cuando Ω es un conjunto dotado de la topología discreta, $C_0(\Omega)$ coincide con $c_0(\Omega)$, el espacio de las funciones $x \in \mathbb{R}^\Omega$ tales que para todo ε positivo el conjunto $\{i \in I : |x(i)| \geq \varepsilon\}$ es finito. Por ejemplo, si consideramos $\Omega = \mathbb{N}$, obtenemos el espacio de las sucesiones convergentes a 0. ◂

Fijemos en lo que sigue Ω_1 y Ω_2, dos espacios topológicos localmente compactos y de Hausdorff tales que existe una isometría sobreyectiva $\Delta : S_{\Omega_1} \to S_{\Omega_2}$, donde S_{Ω_1} y S_{Ω_2} denotan las esferas unidad de $C_0(\Omega_1)$ y $C_0(\Omega_2)$, respectivamente. Nuestro objetivo será extender Δ a una isometría sobreyectiva y lineal entre $C_0(\Omega_1)$ y $C_0(\Omega_2)$, y todos los resultados que utilizamos para ello han sido demostrados por Wang [19].

Recogemos en forma de lema las herramientas necesarias para resolver el problema que nos ocupa.

Lema 29. *Si $x \in \Omega_1$, el conjunto*

$$\Psi_\Delta(x) = \bigcap_{\|f\|=|f(x)|=1} \{t \in \Omega_2 : |\Delta(f)(t)| = 1\}$$

contiene exactamente un punto. Además, la aplicación $\Psi_\Delta : \Omega_1 \to \Omega_2$, que le asigna a cada $x \in \Omega_1$ el único punto del conjunto $\Psi_\Delta(x)$, es un homeomorfismo (aplicación biyectiva y continua con inversa continua) con $\Psi_\Delta^{-1} = \Psi_{\Delta^{-1}}$.

Observación 30. El resultado recién expuesto tiene importancia por sí solo, ya que establece que, si S_{Ω_1} y S_{Ω_2} son isométricas, entonces Ω_1 y Ω_2 son homeomorfos como espacios topológicos. ◂

Lema 31. *La aplicación $F : S(\mathbb{C}) \times \Omega_1 \to S(\mathbb{C})$ tal que $F(\alpha, x) = \Delta(f)(\Psi_\Delta(x))$, donde f es cualquier función en S_{Ω_1} con $f(x) = \alpha$, está bien definida (no depende de f) y es continua.*

Además, para cada $x \in \Omega_1$ se verifica que, o bien $F(\alpha, x) = \alpha F(1, x)$ para todo $\alpha \in S(\mathbb{C})$, o bien $F(\alpha, x) = \overline{\alpha} F(1, x)$ para todo $\alpha \in S(\mathbb{C})$.

Dada $f \in S_{\Omega_1}$, el siguiente lema nos permite expresar $\Delta(f)(\Psi_\Delta(x))$ en función de la aplicación F recién definida.

Lema 32. *Si $f \in S_{\Omega_1}$ y $x \in \Omega_1$, se cumple que*

$$\Delta(f)(\Psi_\Delta(x)) = \begin{cases} |f(x)| F\left(\dfrac{f(x)}{|f(x)|}, x\right) & \text{si } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{si } f(x) = 0. \end{cases}$$

Ya somos capaces de resolver el problema de Tingley en espacios $C_0(\Omega)$, y exponemos su solución a continuación.

Teorema 33 (solución al problema de Tingley en espacios $C_0(\Omega)$). *Si Ω_1 y Ω_2 son dos espacios localmente compactos y de Hausdorff tales que existe una isometría sobreyectiva $\Delta : S_{\Omega_1} \to S_{\Omega_2}$, entonces es posible encontrar una isometría sobreyectiva y lineal $T : C_0(\Omega_1) \to C_0(\Omega_2)$ extendiendo a Δ.*

Demostración. Empezamos definiendo el par de conjuntos

$$A = \{x \in \Omega_1 : F(\alpha, x) = \alpha F(1, x), \forall \alpha \in S(\mathbb{C})\}$$

y

$$B = \{x \in \Omega_1 : F(\alpha, x) = \overline{\alpha} F(1, x), \forall \alpha \in S(\mathbb{C})\}.$$

El lema 31 implica que $A \cup B = \Omega_1$. Además, se verifica que $A \cap B = \varnothing$, ya que, en caso de que existiese $x \in A \cap B$, tendríamos que $F(\mathrm{i}, x) = \mathrm{i} F(1, x) = \overline{\mathrm{i}} F(1, x)$ y llegaríamos al absurdo $\mathrm{i} = \overline{\mathrm{i}}$.

El conjunto A es cerrado por ser intersección de imágenes inversas de un cerrado por una función continua, ya que $A = \bigcap_{\alpha \in S(\mathbb{C})} \{x \in \Omega_1 : F(\alpha, x) - \alpha F(1, x) = 0\}$. Análogamente, B es cerrado, y también ambos conjuntos son abiertos por ser uno el complementario del otro.

Debido al hecho de que Ψ_Δ es un homeomorfismo, concluimos que $A' = \Psi_\Delta(A)$ y $B' = \Psi_\Delta(B)$ son dos conjuntos complementarios, abiertos y cerrados en Ω_2. Además, las funciones características de A' y B', denotadas por $\chi_{A'}$ y $\chi_{B'}$, son continuas por ser ambos conjuntos abiertos y cerrados.

Ahora, definimos $T\colon C_0(\Omega_1) \to C_0(\Omega_2)$ mediante

$$T(f)(y) = f(\Psi_{\Delta^{-1}}(y))F(1, \Psi_{\Delta^{-1}}(y))\chi_{A'}(y) + \overline{f(\Psi_{\Delta^{-1}}(y))}F(1, \Psi_{\Delta^{-1}}(y))\chi_{B'}(y)$$

(con $f \in C_0(\Omega_1)$, $y \in \Omega_2$).

Por el álgebra de funciones continuas tenemos que $T(f)$ es continua y

$$|T(f)(y)| = |f(\Psi_{\Delta^{-1}}(y))F(1, \Psi_{\Delta^{-1}})(y)| = |f(\Psi_{\Delta^{-1}}(y))|,$$

así que $T(f) \in C_0(\Omega_2)$ para toda $f \in C_0(\Omega_1)$.

Claramente, T es una aplicación lineal, y teniendo en cuenta que, para todo $y \in \Omega_2$, $|F(1, \Psi_{\Delta^{-1}})(y)| = 1$, $A' \cap B' = \emptyset$ y que Ψ_Δ es un homeomorfismo, obtenemos que

$$\|T(f) - T(g)\| = \sup\{|f(\Psi_{\Delta^{-1}}(y)) - g(\Psi_{\Delta^{-1}}(y))| \,:\, y \in \Omega_2\} = \|f - g\| \quad (f, g \in C_0(\Omega_1));$$

por tanto, T es una isometría lineal.

Dada $g \in C_0(\Omega_2)$, la aplicación $f \in C_0(\Omega_1)$ definida por

$$f(x) = \frac{g(\Psi_\Delta(x))}{F(1, x)}\chi_A(x) + \frac{\overline{g(\Psi_\Delta(x))}}{\overline{F(1, x)}}\chi_B(x)$$

cumple que $T(f) = g$, así que T es sobreyectiva.

Por último, aplicando el lema 32, si $f \in S_{\Omega_1}$, tenemos que

$$\Delta(f)(y) = |f(\Psi_{\Delta^{-1}}(y))|F\left(\frac{f(\Psi_{\Delta^{-1}}(y))}{|f(\Psi_{\Delta^{-1}}(y))|}, \Psi_{\Delta^{-1}}(y)\right) \quad (y \in Y).$$

Por un lado, si $y \in A'$, se sigue que $\Psi_{\Delta^{-1}}(y) \in A$ y, por definición de A, concluimos que

$$\Delta(f)(y) = f(\Psi_{\Delta^{-1}}(y))F(1, \Psi_{\Delta^{-1}}(y)).$$

Por otro lado, si $y \in B'$, tenemos que $\Psi_{\Delta^{-1}}(y) \in B$ y, por definición de B, obtenemos que

$$\Delta(f)(y) = \overline{f(\Psi_{\Delta^{-1}}(y))}F(1, \Psi_{\Delta^{-1}}(y)).$$

De esta forma queda comprobado que T extiende a Δ. ■

Observación 34. Observemos que, en la demostración anterior, Ψ_Δ puede ser sustituido por cualquier otro homeomorfismo que exista entre Ω_1 y Ω_2. Este hecho permite completar la observación 30 al establecer que Ω_1 y Ω_2 son homeomorfos si y solo si S_{Ω_1} y S_{Ω_2} son isométricas. ◂

Referencias

[1] Becerra-Guerrero, Julio; Cueto-Avellaneda, María; Fernández-Polo, Francisco J., y Peralta, Antonio M. «On the extension of isometries between the unit spheres of a JBW*-triple and a Banach space». En: *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 20.1 (2021), págs. 277-303. issn: 1474-7480. https://doi.org/10.1017/S1474748019000173.

[2] Béjar López, Alexis. *Introducción al problema de Tingley. Extensión de isometrías.* Trabajo de Fin de Grado. Universidad de Granada, 2019.

[3] Cabello Sánchez, Javier. «A reflection on Tingley's problem and some applications». En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 476.2 (2019), págs. 319-336. issn: 0022-247X. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.03.041.

[4] Conway, John B. *A course in functional analysis.* 2.ª ed. Graduate Texts in Mathematics 96. Nueva York: Springer-Verlag, 1990. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3828-5.

[5] Day, Mahlon M. «Some characterizations of inner-product spaces». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 62 (1947), págs. 320-337. ISSN: 0002-9947. https://doi.org/10.2307/1990458.

[6] Ding, Guanggui. «The 1-Lipschitz mapping between the unit spheres of two Hilbert spaces can be extended to a real linear isometry of the whole space». En: *Science in China. Series A. Mathematics* 45.4 (2002), págs. 479-483. ISSN: 1006-9283. https://doi.org/10.1007/BF02872336.

[7] Ding, Guanggui. «The isometric extension problem in the unit spheres of $l^p(\Gamma)(p > 1)$ type spaces». En: *Science in China. Series A. Mathematics* 46.3 (2003), págs. 333-338. ISSN: 1006-9283. URL: https://link.springer.com/article/10.1360/03ys9035.

[8] Ding, Guanggui. «The representation theorem of onto isometric mappings between two unit spheres of $l^1(\Gamma)$ type spaces and the application to the isometric extension problem». En: *Acta Mathematica Sinica (English Series)* 20.6 (2004), págs. 1089-1094. ISSN: 1439-8516. https://doi.org/10.1007/s10114-004-0447-7.

[9] Ding, Guanggui. «The representation theorem of onto isometric mappings between two unit spheres of l^∞-type spaces and the application on isometric extension problem». En: *Science in China. Series A. Mathematics* 47.5 (2004), págs. 722-729. ISSN: 1006-9283. URL: https://link.springer.com/article/10.1360/03ys0049.

[10] Fang, Xi Nian y Wang, Jian Hua. «Extension of isometries between the unit spheres of normed space E and $C(\Omega)$». En: *Acta Mathematica Sinica (English Series)* 22.6 (2006), págs. 1819-1824. ISSN: 1439-8516. https://doi.org/10.1007/s10114-005-0725-z.

[11] Fu, Xiao Hong. «The isometric extension of the into mapping from the unit sphere $S_1(E)$ to $S_1(l^\infty(\Gamma))$». En: *Acta Mathematica Sinica (English Series)* 24.9 (2008), págs. 1475-1482. ISSN: 1439-8516. https://doi.org/10.1007/s10114-008-7286-x.

[12] Lax, Peter D. *Functional analysis*. Pure and Applied Mathematics. Nueva York: Wiley-Interscience, 2002. ISBN: 978-0-471-55604-6.

[13] Liu, Rui. «On extension of isometries between unit spheres of $L^\infty(\Gamma)$-type space and a Banach space E». En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 333.2 (2007), págs. 959-970. ISSN: 0022-247X. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.11.044.

[14] Mankiewicz, Piotr. «On extension of isometries in normed linear spaces». En: *Bulletin de l'Académie polonaise des sciences. Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques* 20 (1972), págs. 367-371. ISSN: 0001-4117.

[15] Mazur, Stanislaw y Ulam, Stanislaw. «Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés». En: *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 194 (1932), págs. 946-948. ISSN: 0001-4036.

[16] Ovchinnikov, Sergei. *Functional analysis. An introductory course*. Universitext. Cham: Springer, 2018. https://doi.org/10.1007/978-3-319-91512-8.

[17] Tingley, Daryl. «Isometries of the unit sphere». En: *Geometriae Dedicata* 22.3 (1987), págs. 371-378. ISSN: 0046-5755. https://doi.org/10.1007/BF00147942.

[18] Vera Botí, Gabriel. *Variable compleja. Problemas y complementos*. Murcia: RSME y Electrolibris, 2013. ISBN: 978-84-940688-4-3.

[19] Wang, Ri Sheng. «Isometries between the unit spheres of $C_0(\Omega)$ type spaces». En: *Acta Mathematica Scientia* 14.1 (1994), págs. 82-89. ISSN: 0252-9602. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(18)30093-6.

[20] Yang, Xiuzhong y Zhao, Xiaopeng. «On the extension problems of isometric and nonexpansive mappings». En: *Mathematics without boundaries*. Ed. por Rassias, Themistocles M. y Pardalos, Panos M. Nueva York: Springer, 2014, págs. 725-748. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-1106-6_24.