

TEMat

Este trabajo fue galardonado con el primer premio en la edición de 2021 del Premi Poincaré, entregado por la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya.



Premi Poincaré

al millor treball de recerca de Batxillerat en Matemàtiques

18a edició 2021

La geometría taxicab: un mundo donde los círculos son cuadrados

✉ Aniol Cortada Garcia^a
Universitat Politècnica de Catalunya
aniolcortadagarcia@gmail.com

Resumen: Nuestra intuición nos tiene acostumbrados a medir según la geometría euclidiana clásica, donde la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta. Sin embargo, hay ocasiones en que la línea recta no es una trayectoria posible, como por ejemplo al considerar el trayecto de un taxi por una ciudad. En este trabajo se plantea estudiar la geometría que se deriva de esta nueva manera de medir, la denominada geometría taxicab. Después de introducir el concepto de métrica, se aborda el estudio de diferentes elementos geométricos con la métrica de Manhattan. Se obtienen resultados sorprendentes: las circunferencias son cuadrados, las elipses pueden ser octógonos, los triángulos equiláteros pueden no ser semejantes y el valor de π (entendido como la razón entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia) es 4. Todos estos elementos se ilustran haciendo uso del programa GeoGebra. Como aplicación práctica se estudian dos problemas de geometría urbana que dan respuesta a dónde situar equipamientos urbanos de una manera más eficiente. Finalmente, se proponen generalizaciones de la métrica de Manhattan que abren todo un mundo de posibilidades.

Abstract: People are used to measuring according to classical Euclidean geometry, where the shortest distance between two points is the straight line. However, sometimes the straight line is not a possible path, for instance when a taxi goes through a city. In this work, we study the geometry derived from this new way of measuring, called the taxicab geometry. After introducing the concept of metric, the study of different geometric elements is approached by means of the Manhattan metric. Surprising results are obtained: circumferences are squares, ellipses can be octagons, equilateral triangles may not be similar and the value of π (understood as the ratio between the perimeter and the diameter of a circumference) is 4. All these elements are illustrated by means of GeoGebra program. For practical purposes, we study two urban geometry problems concerning the efficient location of urban facilities. Finally, we propose some generalizations of the Manhattan metric that open a new world of possibilities.

Palabras clave: geometrías no euclidianas, geometría taxicab, métrica de Manhattan, GeoGebra, Voronoi.

MSC2020: 51-99.

Recibido: 27 de agosto de 2021.

Aceptado: 18 de abril de 2022.

Agradecimientos: Queremos agradecer a la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la UPC y a la revista *TEMat* la oportunidad de publicar este artículo como parte del Premi Poincaré 2021.

Referencia: CORTADA GARCIA, Aniol. «La geometría taxicab: un mundo donde los círculos son cuadrados». En: *TEMat*, 6 (2022), págs. 1-15. ISSN: 2530-9633. URL: <https://temat.es/articulo/2022-p1>.

^aEste trabajo se lleva a cabo a partir del Treball de Recerca de 2.º de Bachillerato desarrollado en el INS Cendrassos de Figueres.

1. Introducción

Cuando se ha de medir una distancia, de entrada, estamos acostumbrados a hacerlo según la geometría euclidiana. Sin embargo, hay ocasiones en que esto no tiene por qué ser lo más conveniente, ni siquiera lo que más se ajuste a la realidad. Ocurre en campos avanzados como la cosmología moderna o en situaciones cotidianas de la vida urbana, y medir de una manera u otra puede ser muy relevante. Valga como ejemplo el caso de James Robbins en 2002 (publicado en el *New York Times*). Este fue detenido por vender drogas a unos 900 pies de una escuela, distancia inferior a 1000 pies, lo cual era considerado como un agravante. Su abogado argumentó que la distancia no podía ser tomada en línea recta ya que en la ciudad nos desplazamos por las calles doblando esquinas. Siguiendo las calles había unos 1200 pies, con lo cual la pena sería menor. Sin embargo, el juez consideró que la distancia se había de calcular como lo haría Euclides y no con la métrica de Manhattan, de manera que fue condenado a una pena de seis a doce años de prisión.

La geometría taxicab¹ es una de esas geometrías que se adapta más fielmente a ciertas situaciones de la vida cotidiana, como sería el ámbito urbano. En este trabajo, estudiaremos esta geometría ayudándonos del programa GeoGebra para modelizar diferentes escenarios. Este no sirve para demostrar teoremas matemáticos, pero sí es muy útil para mostrar y entender muchos conceptos.

En primer lugar, estudiaremos qué es una métrica, analizando varios ejemplos y concluyendo con la métrica de Manhattan.

En el siguiente apartado estudiaremos, haciendo uso de la métrica de Manhattan, diferentes elementos geométricos que se definen a partir del concepto de distancia: mediatrices, triángulos y cónicas. Esto nos permitirá ver lo diferentes que son la geometría taxicab y la euclidiana.

A continuación nos plantearemos dos aplicaciones prácticas de la geometría taxicab a problemas de geometría urbana. De hecho, se trata de dos problemas clásicos de gran utilidad práctica: el punto de Fermat (el lugar que hace que la suma de las distancias a tres vértices sea mínima) y los diagramas de Voronoi (cómo dividir el plano según las regiones más cercanas a unos ciertos puntos).

Finalmente, en el último apartado, estudiaremos algunas generalizaciones que se pueden hacer de la métrica de Manhattan. La primera corresponde a considerar esta métrica en el espacio en lugar del plano. La segunda consiste en cambiar los movimientos perpendiculares a los ejes propios de la geometría taxicab por otros que permitan también desplazamientos diagonales, como sería el caso de los movimientos de las damas chinas. Por último, veremos la generalización a enrejados triangulares de cualquier ángulo.

2. Métricas

Una métrica es el concepto matemático que corresponde a la idea tan común e intuitiva de distancia. En este apartado veremos la definición y algunos ejemplos de métricas que nos mostrarán cómo cambiando la manera de medir distancias se construyen geometrías muy diferentes.

2.1. Definición

Una métrica sobre un conjunto S es una función distancia, $d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$, que para todo $P, Q, R \in S$ satisface las siguientes condiciones:

- (i) $d(P, Q) \geq 0$,
- (ii) $d(P, Q) = 0$ si y solo si $P = Q$,
- (iii) $d(P, Q) = d(Q, P)$ y
- (iv) $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$.

¹En diferentes artículos y libros podemos leer indistintamente geometría taxicab, geometría del taxista, métrica de Manhattan, métrica L_1 , geometría urbana... En este trabajo hablaremos de geometría taxicab cuando nos refiramos a la geometría desde un punto de vista global y de métrica de Manhattan cuando hablemos concretamente de la función distancia.

Hay muchas funciones que satisfacen estas propiedades y cualquiera que lo haga será una métrica. Esto conduce a casos muy curiosos, como la métrica de Chebyshev (también llamada «del ajedrez», porque corresponde a los movimientos del rey), la métrica de Hamming (con aplicaciones en teoría de códigos), la métrica discreta, la familia de métricas L^p , etc. A continuación analizaremos algunos ejemplos en $\mathbb{R}^2$.

2.2. Ejemplos

2.2.1. Métrica euclidiana

La métrica euclídea sobre el plano cartesiano es la que se ha utilizado desde siempre. Es la distancia intuitiva que encontramos a partir del teorema de Pitágoras. Dados dos puntos del plano $P(p_1, p_2)$ y $Q(q_1, q_2)$, la distancia euclídea viene dada por la expresión

$$d(P, Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}.$$

2.2.2. Métrica del ascensor

Si pensamos en un conjunto de rascacielos colocados en línea, la distancia entre dos pisos que estuvieran en el mismo edificio sería el valor absoluto de la diferencia de coordenadas verticales, o sea, el recorrido que haría el ascensor. Si estuvieran en edificios diferentes, la distancia sería lo que se baja en el primer ascensor, más lo que se camina entre los edificios, más lo que se sube en el segundo ascensor. Por ejemplo, en la figura 1 la distancia entre los dos puntos sería $d(P, Q) = 2 + |4 - 1| + 3 = 8$. Así, podemos ver que la métrica viene definida por la expresión

$$d(P, Q) = \begin{cases} |q_2 - p_2| & \text{si } p_1 = q_1, \\ |p_2| + |q_1 - p_1| + |q_2| & \text{si } p_1 \neq q_1. \end{cases}$$

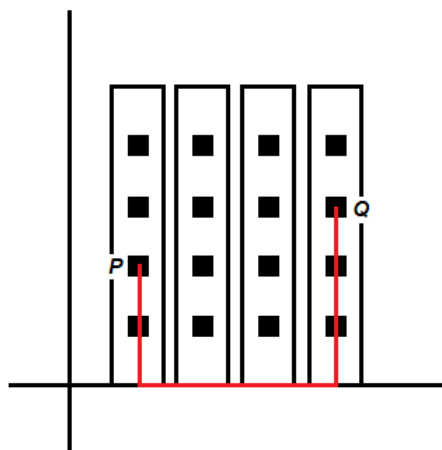


Figura 1: Métrica del ascensor.

Para hacernos una idea de cómo es la geometría con esta métrica, podemos representar las circunferencias en esta métrica, es decir, el conjunto de puntos que equidistan una distancia r de un centro C . Con la ayuda de GeoGebra, podemos ver que las circunferencias de esta métrica tienen forma de cuadrado con un punto encima (siempre que el radio r sea mayor que la altura p_2), como podemos ver en la figura 2.

2.2.3. Métrica de correos

También conocida como la métrica del mensajero, la métrica de correos se define de la siguiente manera: la distancia entre dos puntos es la que resulta de sumar la distancia euclídea de cada punto al origen. Es

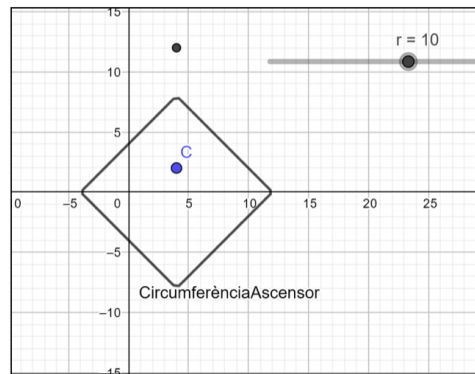


Figura 2: Circunferencia en la métrica del ascensor.

decir, para ir del punto P al punto Q , primero vamos de P al origen y, después, del origen a Q (es el recorrido que haría una carta, va del remitente a la oficina y de la oficina al destinatario, y de ahí el nombre). Viene dada por la expresión

$$d(P, Q) = \begin{cases} 0 & \text{si } P = Q, \\ \sqrt{p_1^2 + q_1^2} + \sqrt{p_2^2 + q_2^2} & \text{si } P \neq Q. \end{cases}$$

Es necesario pedir que $d(P, P) = 0$ por la propia definición de métrica. Este requisito tiene mucho sentido intuitivamente: no es de esperar que una persona que quiera enviarse una carta a su propia casa lo vaya a hacer usando el servicio de correos.

Haciendo uso de GeoGebra podemos analizar cómo son las circunferencias. Se observa el hecho curioso de que, independientemente de donde esté el centro, las circunferencias están siempre centradas en el origen. Además, pueden tener el centro en el interior o en el exterior. En esta métrica, las circunferencias sí tienen forma circular (suponiendo siempre que el radio r es mayor que la distancia euclídea de P al origen).

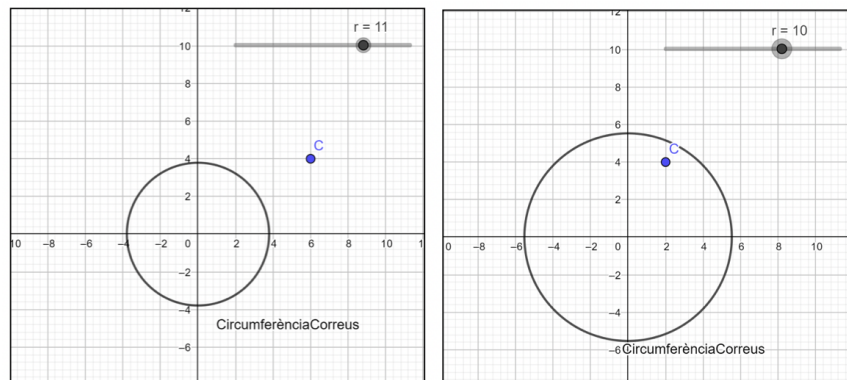


Figura 3: Circunferencias en la métrica de correos.

2.2.4. La métrica de Manhattan

El primero en estudiar esta métrica fue el matemático alemán Hermann Minkowski (1864-1909). Sin embargo, el primero en llamarla «taxicab» fue el matemático austriaco Karl Menger en 1952 en una exposición en el Museo de Ciencia e Industria de Chicago.

El nombre «métrica de Manhattan» viene del diseño en cuadrícula de las calles del barrio neoyorquino, que hace que el camino más corto que un coche puede tomar entre dos puntos de la ciudad no sea la línea recta (que atravesaría los edificios) sino las correspondientes variaciones siguiendo las diferentes calles.

Por ejemplo, en la figura 4, la distancia taxicab de P a Q por cualquiera de los caminos sería 9 (a diferencia de la Euclídea, que sería $\sqrt{45}$). Vale la pena destacar que el camino más corto en esta métrica no es único. De hecho, en el ejemplo anterior podemos trazar $9!/(6! \cdot 3!) = 84$ caminos diferentes de la misma longitud mínima.

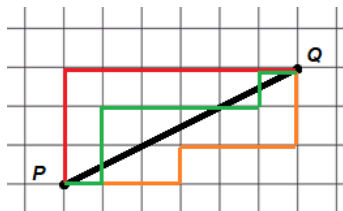


Figura 4: Métrica de Manhattan.

La expresión matemática de la métrica de Manhattan (también distancia taxicab, o distancia L_1) es

$$d(P, Q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$$

para dos puntos $P(p_1, p_2)$ y $Q(q_1, q_2)$ cualesquiera de $\mathbb{R}^2$.

3. Elementos de la métrica de Manhattan

En este apartado estudiaremos diferentes elementos geométricos que se definen a partir del concepto de distancia. De esta manera podremos apreciar cómo cambian por el hecho de elegir una métrica u otra.

3.1. Mediatriz

En geometría euclídea, la mediatriz es el lugar geométrico de los puntos $R(x, y)$ que equidistan de dos puntos dados, P y Q . Se trata de un elemento geométrico muy útil en diversas situaciones; por ejemplo, cuando se delimitan regiones según áreas de influencia, como veremos más adelante con los diagramas de Voronoi. En la geometría taxicab, la ecuación de la mediatriz de P y Q viene dada por la expresión

$$d(P, R) = |x - x(P)| + |y - y(P)| = |x - x(Q)| + |y - y(Q)| = d(R, Q),$$

donde $x(P)$, $y(P)$, $x(Q)$ e $y(Q)$ son las coordenadas de P y Q .

Como podemos observar en la figura 5, la mediatriz en el caso general tiene forma de línea quebrada, a diferencia de lo que ocurre en la geometría euclídea. Se observan además dos casos particulares en los que la forma cambia: uno cuando los puntos están alineados con los ejes de coordenadas (como el caso euclidiano), y el otro cuando los puntos están alineados según un ángulo de 45° (en este caso, la mediatriz es un segmento seguido de dos regiones no acotadas).

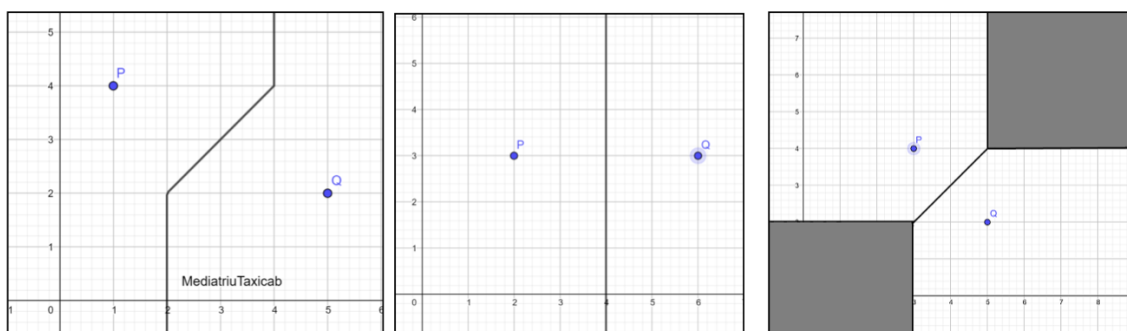


Figura 5: Mediatrices en la geometría taxicab.

3.2. Criterios de congruencia de triángulos

En este apartado veremos que los criterios de congruencia de triángulos en la geometría euclidiana fallan todos en la taxicab. Este punto es muy interesante y, como resalta Krause en su libro² [3], es la única diferencia a nivel axiomático entre las geometrías euclidiana y taxicab.

Criterio (LLL; Lado-Lado-Lado). *Si dos triángulos tienen iguales los tres lados, entonces son congruentes.*

En la figura 6 vemos un ejemplo de dos triángulos equiláteros de lado igual a 4 unidades que, sin embargo, no son congruentes, incumpliendo el criterio LLL.

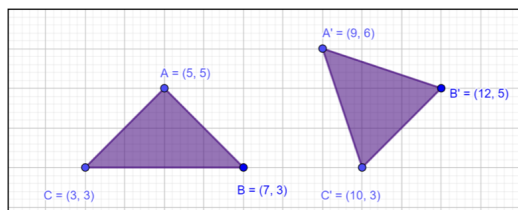


Figura 6: Violación del criterio LLL.

Criterio (LAL; Lado-Ángulo-Lado). *Si dos triángulos tienen iguales dos lados y el ángulo que determinan, entonces son congruentes.*

En el ejemplo de la figura 7, podemos observar que los lados CA , CB , $C'A'$ y $C'B'$ tienen todos la misma longitud (4 unidades) y que los ángulos que determinan son iguales (90°), pero los triángulos no son congruentes, violando el criterio LAL.

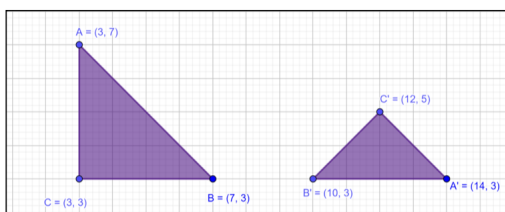


Figura 7: Violación del criterio LAL.

Criterio (ALA; Ángulo-Lado-Ángulo). *Si dos triángulos tienen iguales un lado y los ángulos adyacentes, entonces son congruentes.*

En la figura 8 tenemos el caso de dos triángulos con los lados AC y $A'C'$ de longitud 4 unidades y los ángulos adyacentes iguales a 45° y que, sin embargo, no son congruentes, en contra de lo que afirma el criterio ALA.

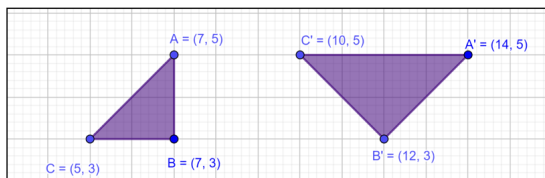


Figura 8: Violación del criterio ALA.

²El libro de Krause se trata de prácticamente el único libro específico sobre la métrica taxicab. Además, tiene un enfoque muy original basado en el estudio de la misma a partir de ejercicios propuestos.

Cabe destacar que, a diferencia de lo que sucede en la métrica euclídea, en la métrica de Manhattan la distancia no es invariante por rotaciones, y eso explica que los criterios de congruencia de triángulos que se cumplen en la geometría euclídea no se verifiquen en la geometría taxicab.

3.3. Cónicas

En la geometría euclidiana, las cónicas son curvas que se obtienen de la intersección de la superficie de un cono con un plano. Por otra parte, tienen una definición muy sencilla como lugar geométrico en términos de la función distancia, lo que las hace muy adecuadas para investigar cómo variarán cuando cambiemos de métrica.

3.3.1. Circunferencia

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado centro. La distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia se denomina radio.

En la geometría taxicab, la ecuación de circunferencia de centro $C(a, b)$ y radio r vendrá dada por la expresión

$$d((x, y), C) = |x - a| + |y - b| = r.$$

Con la ayuda de GeoGebra podemos observar que la circunferencia tiene forma cuadrada. Todos los puntos sobre el cuadrado se encuentran a distancia r del centro C .

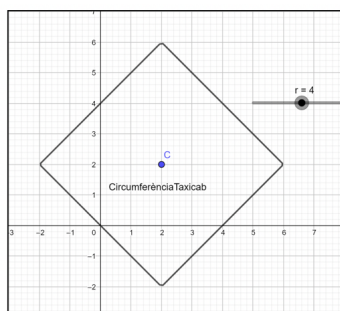


Figura 9: Circunferencia usando la métrica de Manhattan.

Observamos que la distancia entre vértices contiguos para la geometría taxicab es $2r$ o, de forma equivalente, el diámetro de la circunferencia d . En este tipo de geometría, el cociente entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro viene dado por

$$\frac{4D}{D} = 4.$$

Dicho cociente para la geometría euclidiana, el cual es una constante universal en matemáticas, recibe el nombre π y su valor es aproximadamente 3,141 59 (las primeras aproximaciones son del año 1900 a. C.). Este resultado muestra que, en cierto sentido, podríamos decir que $\pi = 4$ en la geometría taxicab.

3.3.2. Elipse

La elipse es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F y F' llamados focos es constante (e igual al eje mayor, $2a$), es decir:

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a.$$

En el caso de la métrica taxicab, la ecuación de la elipse de focos A y B viene dada por la expresión

$$|x - x(A)| + |y - y(A)| + |x - x(B)| + |y - y(B)| = 2a.$$

Después de introducir esta fórmula en el programa GeoGebra, vemos que la figura que se genera tiene forma de polígono. Concretamente, en el caso general la elipse tiene forma de octógono (véase la figura 10). Sin embargo, si movemos los focos vemos que no siempre tenemos octógonos. Cuando los dos focos están sobre una recta paralela a alguno de los ejes de coordenadas, la elipse adquiere forma de hexágono. Por otra parte, en el caso extremo en que los focos se encuentran a la distancia máxima $2a$, la elipse se convierte en un rectángulo o un cuadrado, incluyendo todos los puntos interiores (es decir, ya no sería una curva).

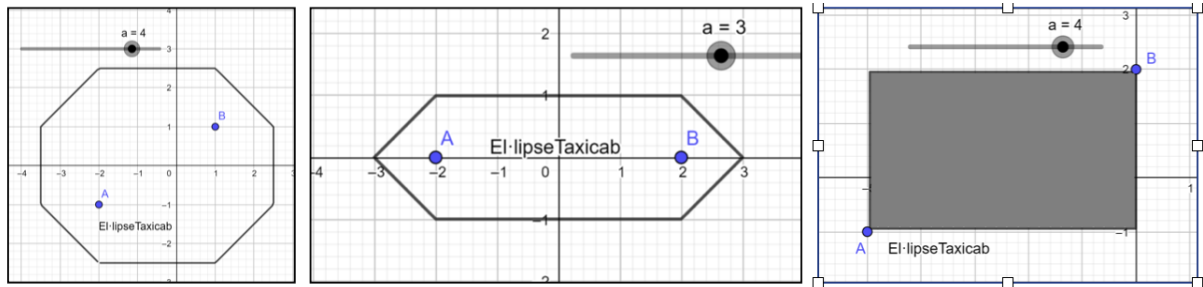


Figura 10: Elipses en la geometría taxicab.

3.3.3. Hipérbola

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia entre sus distancias (en valor absoluto) a dos puntos fijos llamados focos es constante,

$$|d(P, F) - d(P, F')| = 2a.$$

En el caso de la distancia Manhattan, la ecuación de la hipérbola de focos A y B es

$$||x - x(A)| + |y - y(A)| - |x - x(B)| - |y - y(B)|| = 2a.$$

Podemos ver el resultado habitual en la figura 11.

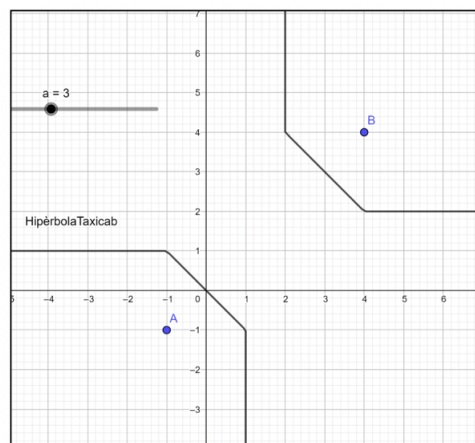


Figura 11: Hipérbola en la geometría taxicab.

Por otra parte, tenemos diferentes casos degenerados en los que la hipérbola deja de ser una curva. Dependiendo de la relación entre las distancias horizontales y verticales de los focos con el valor del parámetro $2a$ se dan varias situaciones: podemos tener líneas paralelas o cambiar parte de las curvas por todo un cuadrante infinito (ver figura 12).

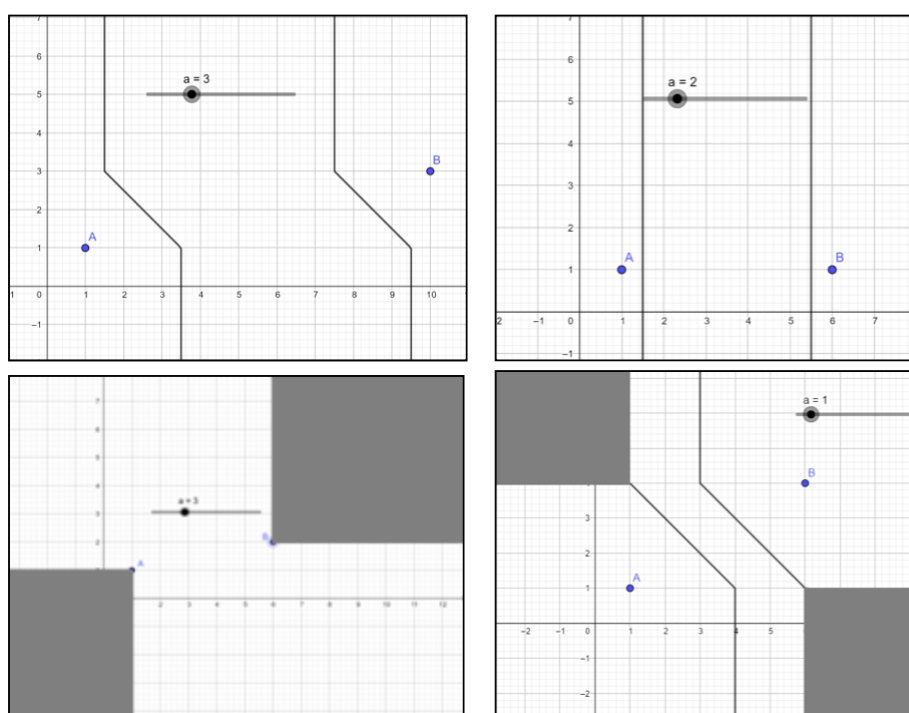


Figura 12: Casos degenerados de hipérbolas en la geometría taxicab.

3.3.4. Parábola

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta llamada directriz. Se puede ver que, para la métrica de Manhattan, la ecuación de la parábola de directriz r y foco F viene dada por la expresión

$$|x - x(F)| + |y - y(F)| = d(P, F) = d(P, r) = \min\{|x - x_r|, |y - y_r|\},$$

donde x_r es la abcisa del punto de la recta r con la misma ordenada que $P(x, y)$ y y_r es la ordenada del punto de la recta r con la misma abcisa que $P(x, y)$.

La parábola tiene diferente orientación dependiendo de la pendiente m de la directriz. En la figura 13, vemos que la parábola se abre hacia arriba en el caso $|m| < 1$ (o hacia abajo si el foco está por debajo de la directriz) y que se abre hacia la derecha cuando $|m| > 1$ (o hacia la izquierda si el foco está a la izquierda de la directriz).

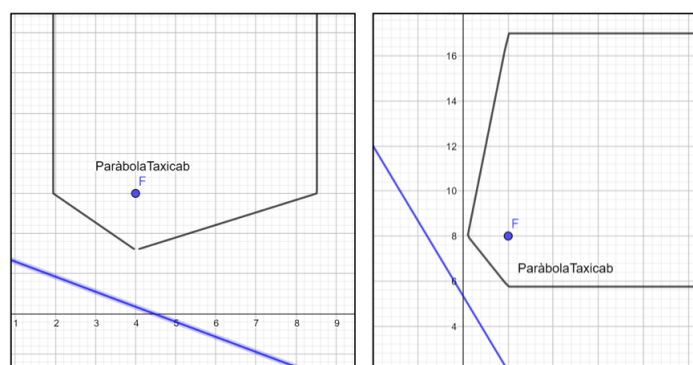


Figura 13: Parábolas en la geometría taxicab.

Finalmente, en la figura 14 vemos los casos $m = -1$, $m = 0$ (directriz horizontal) y $m = \infty$ (directriz vertical). En los casos de directrices con $|m| = 1$, las parábolas tienen tres lados en lugar de cuatro y las ramas infinitas son perpendiculares entre ellas.

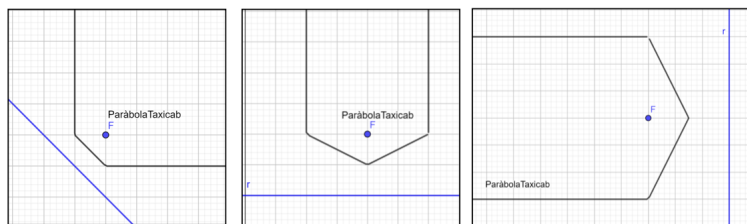


Figura 14: Parábolas en la geometría taxicab con directrices diagonal, horizontal y vertical.

4. Aplicaciones a la geometría urbana

La geometría taxicab puede ser más adecuada que la euclídea para el estudio de ciertas situaciones en la geometría urbana. Como ejemplo, analizaremos dos problemas clásicos. El primero consiste en, dados tres puntos, encontrar cuál es el lugar donde la suma de las distancias desde este lugar a los puntos es mínima. Esto sería útil a la hora de colocar un equipamiento de la manera más eficiente posible. Por ejemplo, si hay tres tiendas de una misma cadena, sería el punto donde pondríamos el almacén de distribución de los productos de las tres tiendas. El segundo consiste en dividir una región según las zonas más cercanas a ciertos puntos. Por ejemplo, si hay tres parques de bomberos en una región y hay un incendio, permitiría saber cuál de los tres parques debería encargarse de apagarlo.

4.1. El punto de Fermat

En una carta, Pierre de Fermat (1601-1665) propuso un problema como reto a E. Torricelli (1608-1647), un discípulo de Galileo: encontrar el punto tal que la suma de sus distancias a los vértices de un triángulo fuera mínima. La búsqueda de ese punto, conocido como punto de Fermat, es un problema clásico de geometría euclidiana que, sin embargo, tiene una solución bastante compleja. Veremos que en el caso de la geometría taxicab no es así.

Observemos la figura 15. Dado un triángulo cualquiera, trazamos por cada vértice las paralelas a los ejes de coordenadas. Siempre encontraremos dos de estas rectas que intersecan dentro del triángulo o, en el caso extremo, en un vértice. Este es el punto de Fermat en la geometría taxicab.

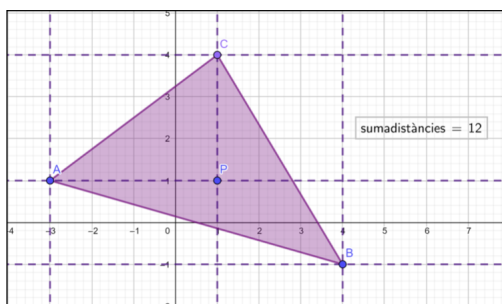


Figura 15: Punto de Fermat.

La demostración es muy intuitiva. Si nos situamos en este punto (al que llamaremos P) y hacemos un desplazamiento vertical de una unidad, nos alejamos una unidad de dos vértices y nos acercamos una al otro. Por tanto, en el cómputo global la suma de distancias se incrementa una unidad. Lo mismo ocurre para el caso horizontal. Concluimos, pues, que un movimiento en cualquier dirección incrementará la suma de distancias a los vértices, por lo cual el punto P es el que hace mínima esta suma.

Podríamos aplicar la construcción anterior al siguiente caso. Consideremos los tres centros de atención primaria (CAP) del Eixample de Barcelona: CAP Casanova, CAP Roger de Flor i CAP Passeig de Sant Joan (puntos verdes de la figura 16) y supongamos que quisiéramos situar un almacén de equipamiento médico de la manera más eficiente posible. Esto correspondería al Punto de Fermat (de color amarillo en la figura 16).

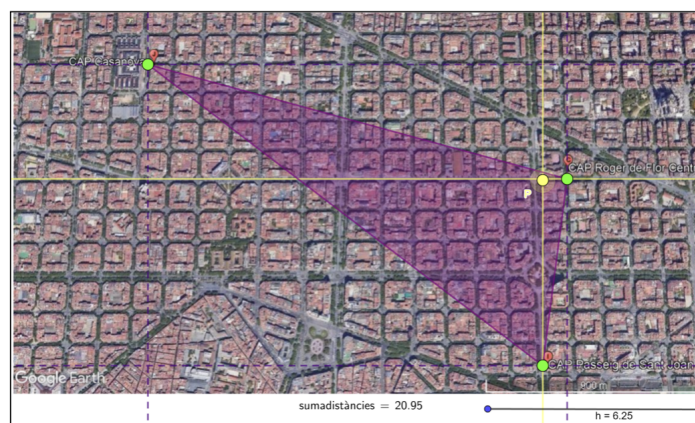


Figura 16: Punto de Fermat en una región de Barcelona.

4.2. Diagramas de Voronoi

Gueorgui Voronoi (1868-1908) fue un matemático ruso conocido por las denominadas regiones de Voronoi. Estas son unas construcciones geométricas que permiten configurar una partición del plano asociada a n puntos, de modo que a cada punto se le asigna una región formada por todos los puntos que son más cercanos a él que a los demás.

La manera de construir un diagrama de Voronoi es uniendo los puntos entre sí y trazando las mediatrices de los segmentos de la unión. Las intersecciones de estas mediatrices determinan una serie de polígonos alrededor de los puntos de manera que engloban las zonas más cercanas.

Actualmente, los diagramas de Voronoi tienen infinidad de aplicaciones en diferentes campos de estudio: gráficos por computadora, epidemiología, geofísica, meteorología... Muchas de estas aplicaciones se diseñan utilizando la métrica euclidiana, pero, como hemos visto en este trabajo, en algunos casos puede ser más adecuado el uso de otras métricas, como la de Manhattan.

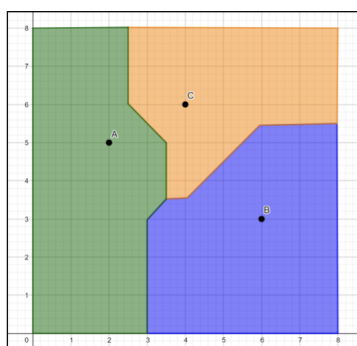


Figura 17: Diagrama de Voronoi con la métrica de Manhattan.

Para construir el diagrama de Voronoi (por ejemplo, de tres puntos) con la métrica de Manhattan, lo que tenemos que hacer es trazar las mediatrices de cada pareja de puntos. Las mediatrices dan lugar a diferentes regiones del espacio, no necesariamente disjuntas dado que una mediatriz puede no ser una

curva. Cada región representa el conjunto de coordenadas que están a menor o igual distancia de un punto que del opuesto. Una vez tenemos las regiones de esta forma, obtenemos el diagrama de Voronoi tomando sus intersecciones, lo que asegura que las coordenadas en las regiones obtenidas están a menor o igual distancia de un punto que del resto. Se puede ver un ejemplo en la figura 17.

Finalmente, consideremos un ejemplo práctico con los tres CAP del apartado anterior. Ahora se trataría de buscar qué CAP queda más cerca de cualquier punto del Eixample y dividir la región en tres zonas de influencia. El resultado lo podemos ver en la figura 18. El punto amarillo tendría los tres CAP a la misma distancia taxicab.

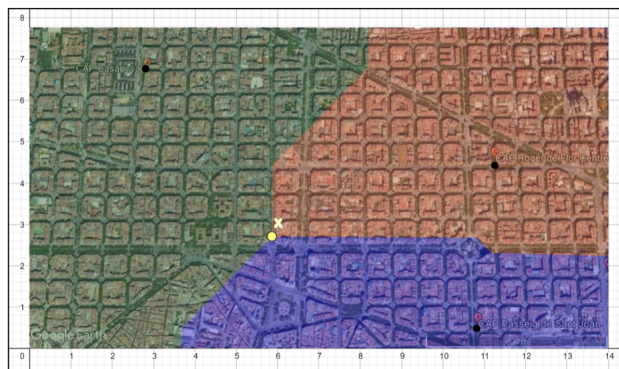


Figura 18: Diagrama de Voronoi en una región de Barcelona.

5. Generalizaciones

Finalmente, en este último apartado estudiaremos algunas generalizaciones que se pueden hacer de la métrica de Manhattan. La primera corresponde al caso tridimensional (también se podría hacer para n dimensiones, aunque la intuición geométrica desaparece). La siguiente es el caso en que nos moviéramos por el enrejado taxicab añadiendo movimientos por líneas con un ángulo de 45° , es decir, que siguiéramos los movimientos de las damas chinas. Finalmente, estudiamos la generalización por un enrejado con ángulos de 60° y toda una familia de métricas que generalizan la métrica de Manhattan por enrejados triangulares con cualquier ángulo.

5.1. Manhattan 3D

La métrica de Manhattan es muy fácil de generalizar a tres dimensiones. La fórmula para la distancia sería

$$d(P, Q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| + |p_3 - q_3|,$$

para dos puntos $P(p_1, p_2, p_3)$ y $Q(q_1, q_2, q_3)$ cualesquiera de $\mathbb{R}^3$.

Del mismo modo que la geometría taxicab se interpretaba mediante el recorrido de un taxi por las calles de Manhattan, la generalización a tres dimensiones se puede interpretar como el recorrido que haría un dron entre los rascacielos de Manhattan. Además de desplazarse a través del plano horizontal, también se podría mover en el eje vertical.

Análogamente a los apartados anteriores, entenderemos una esfera como el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de un punto fijo llamado centro. Esta distancia fija es el radio. En la geometría taxicab 3D, la ecuación de la esfera de centro $C(a, b, c)$ y radio r viene dada por la expresión

$$d((x, y, z), C) = |x - a| + |y - b| + |z - c| = r.$$

Ayudándonos de GeoGebra, podemos representar la superficie anterior y ver qué forma adopta. Como hemos visto anteriormente, la forma de la esfera dependerá de la distancia que estamos considerando y, en el caso de la métrica de Manhattan 3D, adquiere forma de octaedro, como podemos observar en la figura 19.

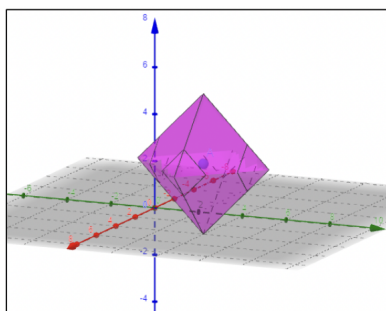


Figura 19: Esfera en la geometría taxicab 3D.

5.2. Manhattan triangular o geometría de las damas chinas

Al final de su libro [3], Krause plantea la posibilidad de estudiar nuevas métricas similares a la de Manhattan pero sobre parrillas triangulares. Más adelante se definieron y estudiaron. Concretamente, se investigó la distancia que permite movimientos diagonales además de los horizontales y verticales. Se la llamó métrica de las damas chinas. En el juego de las damas chinas, las piezas se pueden mover verticalmente (norte y sur), horizontalmente (este y oeste) y diagonalmente (nordeste, noroeste, sureste y suroeste), y de ahí el nombre de la métrica.

La definición de la métrica de las damas chinas no es muy obvia de entrada:

$$d(P, Q) = \max\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|\}.$$

El camino más corto en la métrica de las damas chinas corresponde a avanzar por la diagonal hasta llegar a la misma altura del punto donde queremos terminar y después desplazarnos horizontal o verticalmente. Examinando con un caso particular como el de la figura 20, vemos que $\max\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|\} = 5$ y corresponde al lado largo de la cuadrícula, mientras que $\min\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|\}$ corresponde al lado corto. Por lo tanto, la distancia entre P y Q en la métrica de las damas chinas sería

$$5 + (\sqrt{2} - 1) \cdot 3 = 2 + 3\sqrt{2},$$

que equivale a avanzar tres diagonales de longitud y dos unidades horizontales.

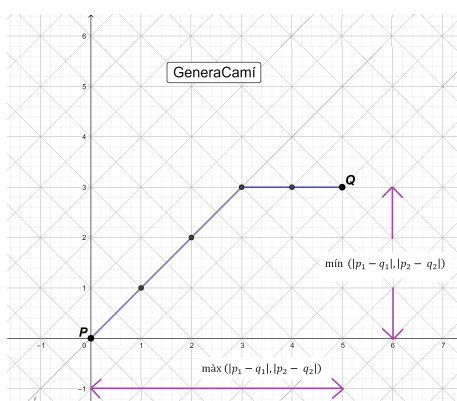


Figura 20: Ejemplo para la métrica de las damas chinas.

Para estudiar qué forma tienen las circunferencias en esta métrica, procederemos como en los apartados anteriores. En este caso, la expresión de la métrica complica la construcción. Una circunferencia de centro $C(a, b)$ y radio r en la métrica de las damas chinas vendrá dada por la expresión habitual $d(P, C) = r$, poniendo la fórmula de la distancia que estamos considerando.

En este caso la representación con GeoGebra se complica un poco y para llevarla a cabo hemos de trabajar en 8 regiones distintas. Terminada la construcción, vemos que la circunferencia con la métrica de las damas chinas es un octógono (figura 21).

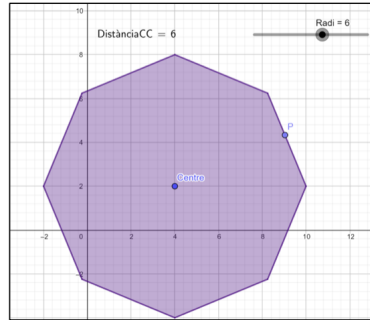


Figura 21: Circunferencia en la métrica de las damas chinas.

5.3. Alfa distancia

Tomando como ejemplo la geometría de las damas chinas, se pueden definir otras geometrías triangulares. Por ejemplo, nos podríamos mover a lo largo de la superposición de dos parrillas triangulares: una formada por triángulos con ángulos internos de 60° , y otra de iguales características pero rotada un ángulo de 90° . Podríamos hablar de este tipo de geometría como geometría del triángulo equilátero. En este caso, la fórmula de la distancia entre dos puntos sería

$$d(P, Q) = \max\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|\} + (2 - \sqrt{3}) \min\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|\}.$$

En la figura 22 podemos ver la circunferencia con la geometría del triángulo equilátero. Vemos que la circunferencia es un octógono también, pero de forma más cuadrada que la anterior.

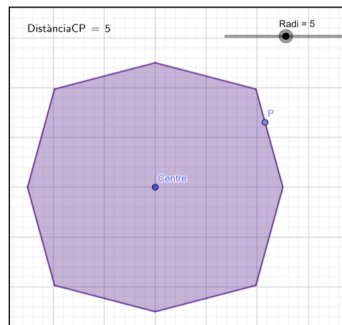


Figura 22: Circunferencia en la métrica del triángulo equilátero.

Pero aquí no acaban las generalizaciones: existen otras que constituyen todo un mundo. De hecho, se puede definir para cada valor de α una distancia (llamada α -distancia) dada por la fórmula

$$d(P, Q) = \max\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|\} + (\sec(\alpha) - \tan(\alpha)) \min\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|\}.$$

En el caso $\alpha = 0^\circ$ tenemos como caso particular la métrica de Manhattan; en el caso $\alpha = 45^\circ$ tenemos la métrica de las damas chinas, y en el caso $\alpha = 60^\circ$, la geometría del triángulo equilátero. Para los otros valores de α obtenemos una generalización de la geometría del triángulo equilátero, donde ambas parrillas ahora están formadas por triángulos isósceles de ángulos internos α , α y $180^\circ - 2\alpha$. En la figura 23, observamos que las circunferencias correspondientes son octógonos, evolucionando desde el cuadrado taxicab (que correspondería a $\alpha = 0^\circ$) y redondeándose a medida que aumenta el ángulo hasta ser prácticamente un cuadrado cuando $\alpha = 89^\circ$ (el caso $\alpha = 90^\circ$ no está bien definido). Las cuatro circunferencias corresponden a 1° , 30° , 60° y 89° , respectivamente.

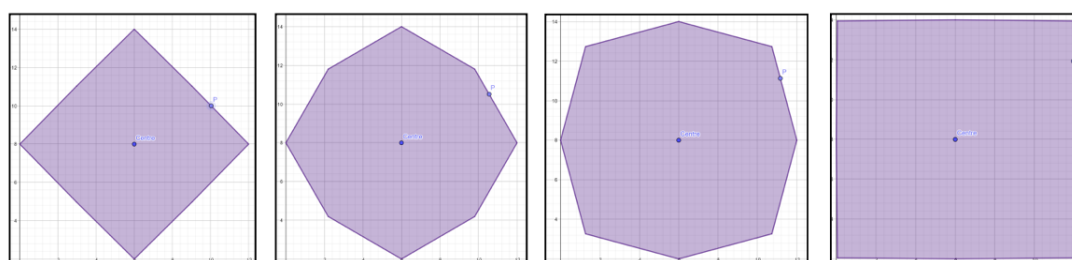


Figura 23: Circunferencias en la métrica de la alfa-distancia.

6. Conclusiones

En este trabajo hemos podido constatar cómo la geometría, que se inicia como una disciplina práctica para medir, evoluciona hasta el punto de ser una disciplina completamente abstracta. Esto conlleva la aparición de nuevas geometrías como la taxicab. Esta geometría, desde el punto de vista axiomático, se diferencia muy poco de la habitual euclidiana, y en cambio es mucho más adecuada en situaciones de geometría urbana, por ejemplo. Hemos podido ver que en esta nueva geometría la distancia más corta ya no es la línea recta y que, además, no hay solo un único camino más corto. Las circunferencias pasan a ser cuadrados, las elipses son hexágonos u octógonos, puede haber triángulos equiláteros de lados iguales pero diferentes entre ellos, el valor de π sería 4... Es una nueva geometría donde la intuición nos engaña constantemente. Como aplicación práctica de esta geometría, es muy interesante el estudio del punto de Fermat y de los diagramas de Voronoi. Muestran claramente que dentro de una ciudad con las calles cuadrículas (como Barcelona o Manhattan) la geometría taxicab es la que se debe considerar, ya que no nos movemos en línea recta atravesando edificios, sino siguiendo las calles. Finalmente, hay toda una familia de generalizaciones que son muy interesantes y dan pie a seguir investigando sobre los diferentes elementos geométricos en estas nuevas métricas.

Referencias

- [1] GÓMEZ, Joan. *Cuando las rectas se vuelven curvas. Las geometrías no euclídeas*. El mundo es matemático 4. Barcelona, ES: RBA, 2010. ISBN: 978-84-9867-856-7.
- [2] JANSSEN, Christina. *Taxicab Geometry: Not the Shortest Ride Across Town*. Creative Component. Iowa State University, 2017. URL: <https://web.archive.org/web/20111216052147/www.math.iastate.edu/thesisarchive/MSM/JanssenMSMS07.pdf>.
- [3] KRAUSE, Eugene F. *Taxicab Geometry. An Adventure in Non-Euclidean Geometry*. Nueva York, US: Dover Publications, 1986. ISBN: 978-0-486-25202-5.
- [4] SABATINI, Marco. «La geometria del taxi». En: *MATerials MATemàtics 2007* (2007), artículo 4. ISSN: 1887-1097. URL: <https://mat.uab.cat/web/matmat/wp-content/uploads/sites/23/2020/05/v2007n04.pdf>.
- [5] TIAN, Songlin. «Alpha-distance – A generalization of chinese checker distance and taxicab distance». En: *Missouri Journal of Mathematical Sciences* 17.1 (2005), págs. 35-40. ISSN: 0899-6180. <https://doi.org/10.35834/2005/1701035>.