

TEMat

Este trabajo obtuvo una mención en la edición de 2020 del Premi Poincaré, entregado por la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya.



Métodos numéricos aplicados al teorema de Gauss sobre la distribución de los números primos

✉ Ferran Arnau Segarra^a
Universitat Autònoma de Barcelona
ferran.arnau@gmail.com

Resumen: El origen de este artículo está en cuestionarse qué pasaría si aplicásemos la función inversa de una función que tuviera como expresión la fórmula de Gauss, planteada en su teorema sobre la distribución de los números primos, con el objetivo de comprobar si de esta forma se podría describir o aproximar su comportamiento. Intentar responder esta pregunta implica la utilización de métodos numéricos.

Abstract: The aim of this article is to explore the possibility of describing the behaviour of prime numbers through the inverse of a function whose expression is the formula that Gauss came up with in his theorem about the distribution of prime numbers. Addressing this question demanded the use of numerical methods.

Palabras clave: función inversa, teorema sobre la distribución de los números primos, métodos numéricos.

MSC2020: 11A41, 11Y11.

Recibido: 27 de septiembre de 2020.

Aceptado: 22 de agosto de 2021.

Agradecimientos: Quisiera agradecer a mi tutora del Trabajo de Investigación de Bachillerato por su inestimable ayuda, a mis padres por el apoyo tanto logístico como emocional y al jurado de los Premios Poincaré por darme la oportunidad de publicar mi trabajo en esta revista.

Referencia: ARNAU SEGARRA, Ferran. «Métodos numéricos aplicados al teorema de Gauss sobre la distribución de los números primos». En: *TEMat*, 6 (2022), págs. 17-30. ISSN: 2530-9633. URL: <https://temat.es/articulo/2022-p17>.

^aEste trabajo fue realizado como Trabajo de investigación de Bachillerato en el Institut d'Allella.

1. Introducción

Encontrar el siguiente número primo es algo que actualmente trae de cabeza a muchos matemáticos, pero, ¿por qué ese interés?

El comportamiento de estos números, aparentemente errático, esconde algunos patrones que parecen no ser exclusivos de estos números. Recientes descubrimientos vinculan el comportamiento de ciertos elementos a escala atómica con los números primos. Parece ser que hay ciertos patrones en los niveles energéticos de los átomos grandes que comparten propiedades muy parecidas con ciertos patrones de los números primos [2].

Además, gracias al teorema fundamental de la aritmética, sabemos que los números primos son algo semejante a un ladrillo en el edificio de los números enteros positivos, y esta última propiedad lleva quizás a las aplicaciones más destacadas. El ejemplo más relevante hoy en día es el papel de los números primos en criptografía. Cada transacción bancaria, o cualquier operación que requiera de un cifrado muy seguro, estará basada en estos números. La idea inicial es relativamente simple: si tomamos dos primos muy grandes, multiplicarlos es un trabajo relativamente sencillo, pero una vez combinados, es muy costoso determinar cuáles han sido los dos primos originales. Por ejemplo, si se tiene el número 999 962 000 357, llegar a la conclusión de que es resultado de multiplicar 999 979 y 99 983 requiere de algo más que de una calculadora. Si los dos primos anteriores fueran extremadamente grandes, ni siquiera con un ordenador muy potente sería realista intentar factorizar o «descifrar» el número resultante. Con esta idea se generan las claves de los sistemas de cifrado modernos.

Pero encontrar números primos grandes no es tarea sencilla, sobre todo porque, como se ha mencionado anteriormente, estos parecen estar repartidos sin orden aparente entre los naturales. Los estudios actuales solo hablan de aproximaciones al comportamiento de los números primos. Esto se debe a que no se conoce ninguna fórmula que pueda ser calculada eficientemente con la propiedad de que genere la sucesión de números primos.

En el siguiente apartado se estudiará una de estas aproximaciones, y se pondrá la base para los apartados siguientes, definiendo una función que aproxima el comportamiento de los números primos. En los otros apartados se tratará de encontrar una inversa de dicha función, que acabará llevando a una familia de funciones, y se estudiará cómo estas funciones pueden o no ser usadas para obtener el k -ésimo número primo. Además, se introducirá una nueva variable, $C(k)$, que indicará la calidad de dicha aproximación. En los apartados finales se contemplará la adición de un nuevo parámetro, m , en la estructura de la familia de funciones, que llevará a plantear un estudio completamente nuevo relacionado con los valores de $C(k)$.

2. La aproximación de Gauss

Uno de los intentos de aproximar el comportamiento de los números primos data del siglo XVIII y su autor es considerado uno de los mejores matemáticos de su tiempo. Johann Carl Friederich Gauss (30 de abril de 1777-23 de febrero de 1855) fue un matemático muy prolífico [5], conocido por la genialidad de sus razonamientos. Con solo 14 años planteó una conjetura en la que se basa este artículo. En dicha conjetura, Gauss propone una fórmula que aproxima la cantidad de números primos anteriores o iguales a un número dado. Dicha fórmula es $x/\ln(x)$, donde x es el número del cual se quiere conocer la cantidad de números primos anteriores a él.

Esta fórmula se obtiene a través de un proceso empírico que involucra una tabla de números primos y una tabla de logaritmos. Gauss también definió una función $\pi(x)$, a través de la cual se obtendría el número exacto de números primos anteriores a un número dado. Este estudio le llevó a proponer el cuadro 1 [3].

De esta tabla se puede observar, por ejemplo, que, de entre los cien primeros números naturales, uno de cada cuatro es primo, o que, de entre los primeros mil números naturales, uno de cada seis es primo. Esta afirmación no se ha de interpretar de manera literal, ya que se trata de una aproximación.

Pero la conclusión más importante que Gauss extrajo de esta tabla fue que los valores de la última columna, correspondientes a los valores de $x/\pi(x)$, crecían un poco más de dos unidades respecto a la fila anterior (es decir, cada vez que se multiplica por 10). Este comportamiento fue de inmediato relacionado con el número e , un número irracional ($e \approx 2,718 28$) que es la base de los logaritmos neperianos.

Cuadro 1: Valores de $\pi(x)$ y $x/\pi(x)$.

x	$\pi(x)$	$x/\pi(x)$	x	$\pi(x)$	$x/\pi(x)$
10	4	2,5	10^5	9592	10,4
10^2	25	4	10^6	78 498	12,7
10^3	168	6,0	10^7	664 579	15,0
10^4	1229	8,1	10^8	5 761 455	17,4

Así pues, se puede definir la aproximación

$$\frac{x}{\pi(x)} \approx \ln(x).$$

Si se despeja, se obtiene que

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)}.$$

Esta conjetura fue posteriormente demostrada y enunciada como un teorema.

Teorema 1. Sea $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ la función que denota la cantidad de números primos que son menores o iguales a x ,

$$\pi(x) = |\{p > 0 \text{ primo} : p \leq x\}|.$$

Entonces, se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1.$$

La demostración de este teorema es bastante compleja, y fue demostrado formalmente por dos matemáticos de forma independiente: Jacques Hadamard y Charles-Jean de la Vallée Poussin en el año 1896. La demostración completa se puede encontrar en el capítulo xxii de *Introduction à la théorie des nombres* [4]. Esta expresión se puede tomar como una aproximación de la información buscada, y la pregunta inmediata sería: ¿cómo de buena es dicha aproximación? Para responder a esta pregunta podemos utilizar el cuadro 2, que incluye la fiabilidad de la aproximación.

Cuadro 2: Error de la fórmula de Gauss para los valores estudiados.

x	$\pi(x)$	$x/\ln(x)$	Error relativo ^a de $x/\ln(x)$
10	4	4,3429	0,0857
10^2	25	21,7147	0,1314
10^3	168	144,7648	0,1383
10^4	1229	1085,7362	0,1165
10^5	9592	8685,8896	0,0944

^aEl error relativo está definido como $\left| \frac{\text{aproximación obtenida}}{\text{magnitud real}} - 1 \right|$.

A medida que x aumenta, la diferencia entre $\pi(x)$ y $x/\ln(x)$ se va haciendo cada vez mayor. Sin embargo, se sigue del teorema anterior que el error relativo tiende a cero cuando x tiende a infinito. Esta tendencia se puede observar en la figura 1.

3. Aplicación de la función inversa

Procedamos a analizar los elementos de la función $\pi(x)$, y qué es exactamente lo que representan.

Pongamos un ejemplo. Si calculásemos $\pi(8)$, el resultado tendría que ser 4, ya que hay 4 números primos anteriores a 8: 2, 3, 5 y 7. Recordemos que $\pi(x)$ nos da la cantidad de números primos menores o iguales a un número dado, por lo que, si x es un número primo, $\pi(x)$ aumentará su valor en una unidad respecto al valor de x anterior. De esta forma $\pi(2)$ sería igual a 1, $\pi(3)$ sería igual a 2, etc. En otras palabras, cuando x es un número primo, el valor de $\pi(x)$ es su posición como número primo.

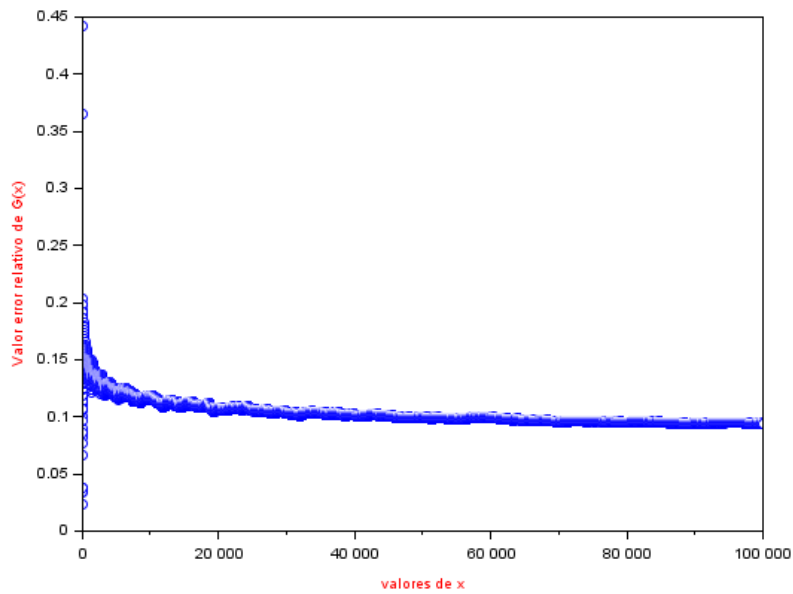


Figura 1: Comportamiento del error relativo de $G(x)$ para los primeros 100 000 valores de x .

De momento, tal y como está planteado el problema, la función $\pi(x)$ nos permite, dado un número primo, obtener la posición que este ocupa en una lista ordenada de los mismos. Pero, ¿y si invirtiéramos los papeles de x y $\pi(x)$? Es decir, si el dato fuera la posición, y el resultado fuera el número primo correspondiente a dicha posición. En otras palabras, cambiar los papeles de x y de y . Este procedimiento no tendría ningún sentido si lo aplicáramos a $\pi(x)$ directamente ya que, por ejemplo, $\pi(8)$, $\pi(9)$ y $\pi(10)$ tienen la misma imagen, y si invirtiéramos los papeles de x y de y , llegaríamos a la conclusión de que el cuarto número primo es a la vez 8, 9 y 10, cosa que es absurda. Entonces, lo ideal sería intercambiar los papeles de x y de y en la expresión de Gauss. Seguidamente se procederá a ver la viabilidad de dicha acción.

La herramienta matemática que invierte los papeles de x y de y es la función inversa, así que primero procedamos a definir una nueva función $G(x) = x/\ln(x)$. Esta función tiene una asíntota vertical en $x = 1$, luego 1 no sería del dominio. Calculando la derivada de $G(x)$, $G'(x) = (\ln(x) - 1)/\ln(x)^2$, se observa que $G(e) = e$ y $G'(e) = 0$, luego puede haber un extremo relativo en $x = e$. Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} G(x) = +\infty$, ha de decrecer hasta $x = e$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$, se deduce que es un mínimo. Además, la derivada es siempre positiva en $(e, +\infty)$, luego se puede afirmar que es absoluto. Este último hecho también demuestra la inyectividad de $G(x)$ en $(e, +\infty)$, haciendo conceptualmente posible esta inversión de papeles en dicho intervalo. Nótese que se ha excluido el 2 de este conjunto, aunque su exclusión tiene un efecto mínimo en futuros resultados. Dado que $G(e) = e$, y a partir de $x = e$, $G(x)$ es continua y creciente, la imagen de $G(x)$ será $(e, +\infty)$.

Entonces, definimos $G(x) = x/\ln(x)$, con dominio $(e, +\infty)$, para poder hablar de su inversa. Procedamos a calcular dicha inversa:

$$y = \frac{x}{\ln(x)} \implies y \cdot \ln(x) = x.$$

Se puede observar que la expresión resultante es una función implícita. Para empezar, hay dos variables. Se puede solventar este problema examinando qué representa cada una de ellas. La y es la posición del número primo y esta posición se determina *a priori*, por lo que podemos definir y como un parámetro libre, al cual se le da un valor inicial. Para evitar confusiones, substituiremos la y por el parámetro k . Por lo tanto, de los resultados anteriores, se puede deducir que $k \in (e, +\infty)$. De hecho, al representar una posición, dicho parámetro solo podría ser un valor natural por lo que, en contexto, $k \in [3, +\infty)$.

Pero de la expresión anterior no se puede despejar x . Solo se puede obtener que x es igual a otra expresión en función de x , cosa poco práctica para trabajar. Si se transforma la igualdad anterior en una expresión igualada a cero, la x que buscaríamos sería la que anula dicha expresión. Es decir,

$$k \cdot \ln(x) - x = 0.$$

Recordemos que x representaba el número del cual queremos saber la cantidad de primos anteriores a él, o en nuestro caso, el número primo del cual queremos conocer la posición que ocupa en una hipotética lista ordenada de números primos. Por lo que, en teoría, el número primo de posición k es aquel que anula la expresión encontrada.

En resumen, ahora en vez de una sola función tenemos una familia de funciones con la estructura $F_k(x) = k \cdot \ln(x) - x$, donde el supuesto número primo en la posición k será un cero de cada respectiva $F_k(x)$, de tal manera que sea x_k dicho cero, $G^{-1}(k) = x_k$ (recordemos que $k \geq 3$). Para encontrar dicho cero, es necesario recurrir a métodos numéricos para calcular ceros de funciones. Nótese que se ha utilizado el artículo «un» en vez de «el» para referirse al cero. Dicha cuestión se tratará en el siguiente apartado.

No hemos de perder de vista que estamos trabajando con aproximaciones. Obviamente, para $k = 5$, el cero de $F_5(x)$ no será exactamente el quinto número primo, por lo que aparece un error que estudiaremos más adelante.

3.1. Análisis de $F_k(x)$

3.1.1. Características generales

El dominio de $F_k(x)$ lo determina la función logarítmica, dado que los otros elementos de $F_k(x)$ son una constante y una resta del valor de x . Por lo tanto, el dominio de $F_k(x)$ será el del logaritmo neperiano, es decir, $(0, +\infty)$, y la función es continua en su dominio.

Dado que, para todo k , $\lim_{x \rightarrow 0} F_k(x) = -\infty$, podemos afirmar que todas las funciones de la familia tienen una asíntota vertical en $x = 0$. Si se estudia el otro extremo del dominio de $F_k(x)$, vemos que las imágenes tienden también a menos infinito, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_k(x) = -\infty$.

La convexidad de la función no cambia. La primera derivada de $F_k(x)$ es $k/x - 1$, cosa que indica un posible extremo relativo cuando $x = k$. Teniendo en cuenta la asíntota vertical en $x = 0$ y que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_k(x) = -\infty$, podemos asegurar que se trata de un máximo absoluto. Dicha afirmación se confirma cuando se observa que, si $x < k$, la derivada es positiva, y si $x > k$, la derivada es negativa.

La segunda derivada, $-k/x^2$, asegura que no hay ningún punto de inflexión, ya que nunca se anula (recordemos que $k \neq 0$).

3.1.2. Ceros de la función

Este es un apartado clave del análisis de $F_k(x)$, ya que nos dará la información más relevante para la investigación. En esta sección se analizará cuándo se anula $F_k(x)$, y cuántas veces lo hace.

Veamos que $F_k(x)$ tiene como máximo dos ceros.

El parámetro k tiene un efecto similar al de un factor de traslado, dado que, cuando aumenta el valor de k , los valores de $F_k(x)$ también aumentan (a partir de cierto x), y gráficamente tenemos funciones similares dispuestas como se puede observar en la figura 2. Experimentalmente se puede comprobar que el número de ceros varía entre 0 y 2 observando que $F_1(x)$ y $F_2(x)$ no cortan el eje X, pero a partir de $F_3(x)$ las gráficas ya cortan dos veces el eje X.

En efecto, si k es mayor que un determinado valor, la función ha de cortar al menos una vez el eje X para alcanzar el valor de $F_k(x)$ en $x = k$, y, tal y como nos indica el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_k(x) = -\infty$, es necesario que $F_k(x)$ vuelva a cortar el eje X. Dicho de otra forma, para $x < k$, $F_k(x)$ es creciente, en $x = k$ hay un máximo absoluto y para $x > k$ la función es decreciente. Por lo tanto, uno de los dos ceros será menor que k , y el otro será mayor. Resumiendo, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2. Sea $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Consideramos la función $F_k(x) = k \ln(x) - x$. Dicha función tiene las siguientes propiedades.

- (i) Si $k < e$, entonces $F_k(x) \neq 0$ para todo $0 \leq x$.
- (ii) Si $k = e$, $F_k(x) = 0$ si y solo si $x = e$.
- (iii) Si $k > e$, $F_k(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones $x_0, x_k \geq 0$ tales que $x_0 < e$ y $x_k > e$. Además, $G(x_k) = k$.

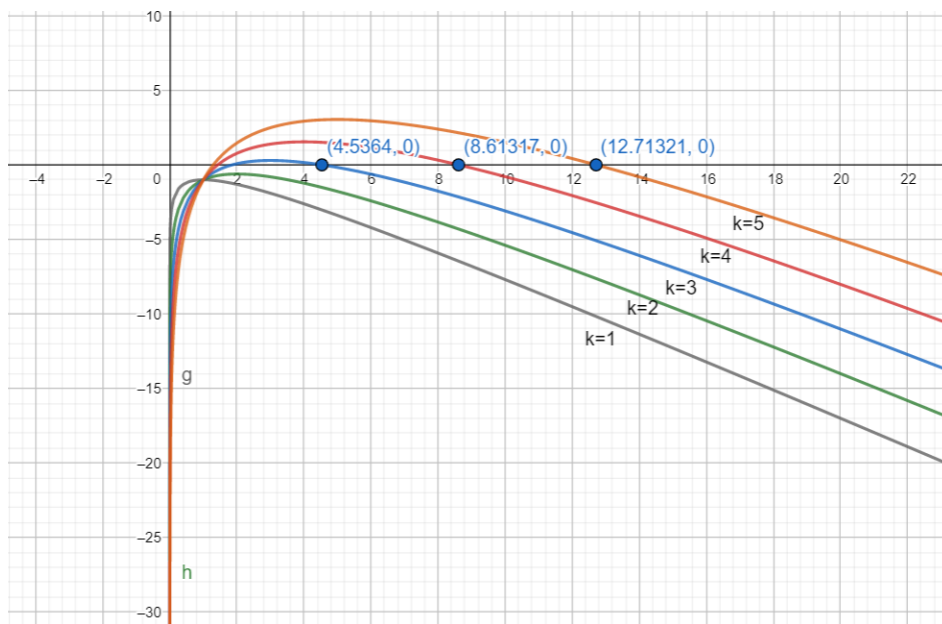


Figura 2: Ilustración de algunas de las primeras gráficas consecutivas de $F_k(x)$.

Demostración. Encontrar los ceros de $F_k(x)$ es equivalente a resolver la ecuación $k = x/\ln(x)$. Como la expresión de la derecha de la igualdad es $G(x)$, a efectos prácticos se está buscando la intersección de $y = k$ y $G(x)$. Como se ha visto que en $x = e$ hay un mínimo, automáticamente se demuestra (I). Cuando $k = e$, $y = k$ representa la tangente de $G(x)$ en $x = e$, luego solo interseca una vez $G(x)$, luego $F_e(x)$ se anula si y solo si $x = e$, demostrando así (II). Al ser $G(x)$ continua, $\lim_{x \rightarrow 1^+} G(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$, en el intervalo $(1, e)$, $G(x)$ asume todos los valores de $(e, +\infty)$, y en $(e, +\infty)$ también, pero en el primer intervalo los valores son decrecientes, y en el segundo son crecientes, luego para $k > e$, $y = k$ interseca dos veces con $G(x)$, luego $F_k(x)$ tendrá dos ceros, demostrando así (III). ■

Para las funciones que cortan dos veces al eje X, ¿cuál de los dos ceros nos da la información relevante para la solución del problema? Esta pregunta tiene una respuesta clara: el número primo será mayor o igual que la posición asignada, ya que los elementos de la sucesión de los números primos son naturales que distan como mínimo en una unidad, luego podemos deducir que el cero que nos interesa es el segundo, ya que es el que tiene el mismo comportamiento que los números primos.

3.1.3. Método óptimo a utilizar para encontrar los ceros de la función

El método óptimo es aquel que se adapta mejor a la función, o, simplemente, al entorno del cero de la función.

La función, después del máximo absoluto en $x = k$, tiene una tendencia descendente, y según la información que nos da la segunda derivada, que no presenta cambio de signo, se puede esperar que la recta tangente en un punto $x_0 > k$ aproxime muy bien la tendencia de $F_k(x)$, permitiendo que el corte de dicha tangente con el eje X sea muy cercano al cero de $F_k(x)$. El método que utiliza tangentes para poder aproximar ceros es el de Newton-Raphson, o método de la tangente [1].

El cuadro 3 muestra que, comparado con otros métodos conocidos, el método de la tangente es más efectivo para distintos valores de k (con una precisión requerida de 6 decimales).

El hecho de que los parámetros iniciales estén más o menos cerca del cero puede afectar al número de pasos necesarios para obtener la aproximación con la precisión requerida, pero en este caso estaríamos hablando de un efecto muy pequeño sobre los datos de la tabla anterior, por lo que podemos calificarlos de válidos. En las pruebas, el método de bisección [1] y el de la *regula falsi* [6] tienen los mismos intervalos; sin embargo, el de la secante [1] no, ya que para poder diferenciarlo del de la *regula falsi* se han escogido imágenes que tengan el mismo signo. Por último, el parámetro inicial del método de la tangente es el valor medio de los intervalos de la secante.

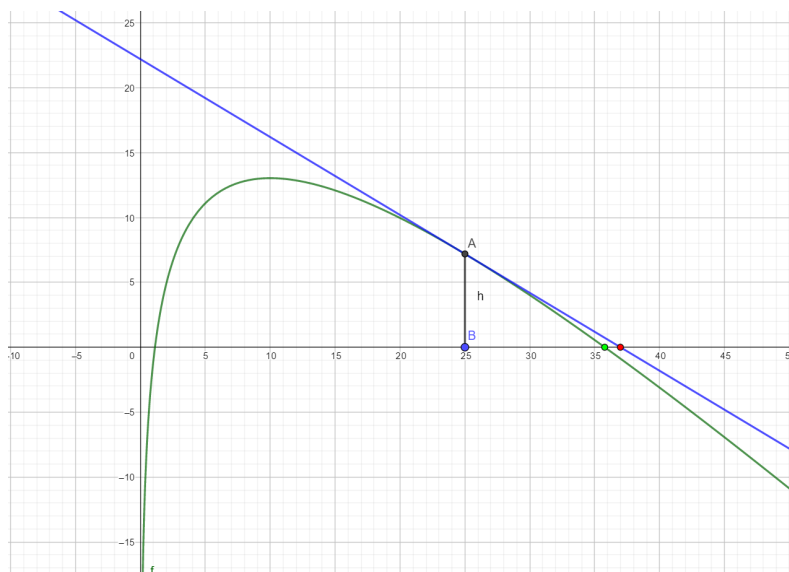


Figura 3: Ejemplo de una primera iteración del método de la tangente aplicada a $F_{10}(x)$.

Cuadro 3: Rapidez con la que algunos de los métodos más conocidos convergen hacia el cero de $F_k(x)$ en comparación con el método de la tangente.

	Bisección		Regula falsi		Secante		Tangente	
k	Parámetros iniciales	Número de pasos	Parámetros iniciales	Número de pasos	Parámetros iniciales	Número de pasos	Parámetros iniciales	Número de pasos
10	$x_0 = 20$ $x_1 = 45$	26	$x_0 = 20$ $x_1 = 45$	6	$x_0 = 11$ $x_1 = 25$	6	$x = 18$	4
10^2	$x_0 = 250$ $x_1 = 840$	30	$x_0 = 250$ $x_1 = 840$	6	$x_0 = 146$ $x_1 = 350$	6	$x = 248$	4
10^3	$x_0 = 5500$ $x_1 = 12\,000$	34	$x_0 = 5500$ $x_1 = 12\,000$	6	$x_0 = 2521$ $x_1 = 5500$	6	$x = 4010$	4
10^4	$x_0 = 60\,000$ $x_1 = 150\,000$	38	$x_0 = 60\,000$ $x_1 = 150\,000$	6	$x_0 = 28\,000$ $x_1 = 70\,000$	6	$x = 49\,000$	4

3.1.4. Sobre la implementación de los métodos numéricos en este estudio

Cada método ha sido programado en C++. El usuario necesita introducir los datos iniciales para que el programa haga la primera iteración, y el mismo programa ya va aumentando el valor de k , adecuando los parámetros iniciales cada vez que se trabaja con un nuevo valor de k .

El método escogido finalmente es el de la tangente y el programa realizado permite guardar la aproximación de cada cero en una lista para su posterior disposición y manipulación.

4. Error en las aproximaciones obtenidas con $F_k(x)$

Por comodidad, en este apartado se trabajará con las siguientes definiciones. Para $k \geq 1$, P_k será el k -ésimo número primo. Para $k \geq 3$, definimos \tilde{x}_k como la aproximación de x_k obtenida con el método de la tangente.

En este apartado, además de estudiar el error relativo cometido en la aproximación, se añadirá un nuevo elemento: una constante. Dicha constante es el valor por el que se debería multiplicar la aproximación para obtener el número primo correcto, y se la denominará $C(k)$: si $k \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$, $C(k) = P_k / \tilde{x}_k$, donde x_k está definido en la proposición 2.

Si se consiguiera modelizar estos valores, sería sencillo implementarlos en el proceso de obtención de la aproximación, y de esta forma reducir el error cometido,

$$\begin{cases} k \ln(x) - x = 0, \\ xC(k) \approx R_k. \end{cases}$$

En el cuadro 4 se puede observar el comportamiento del error y de $C(k)$ para valores comprendidos entre 3 y 16 (recordemos que, para $k = 1$ y $k = 2$, $F_k(x)$ no corta el eje X).

Cuadro 4: Comportamiento del error para ciertos valores de k .

Valor de k	\tilde{x}_k	R_k	$C(k)$	Error relativo
3	4,5364	5	1,1021	0,0927
4	8,6131	7	0,8127	0,2304
5	12,7132	11	0,8652	0,1557
6	16,9988	13	0,7647	0,3076
7	21,4649	17	0,7919	0,2626
8	26,0934	19	0,7451	0,3733
9	30,8672	23	0,7451	0,3420
10	35,7715	29	0,8107	0,2335
11	40,7938	31	0,7599	0,3159
12	45,9238	37	0,8056	0,2411
13	51,1525	41	0,8015	0,2476
14	56,4727	43	0,7614	0,3133
15	61,8773	47	0,7595	0,3165
16	67,3610	53	0,7868	0,2709

El error está relacionado con $C(k)$ de manera que si esta se va acercando a 1, el error será más pequeño, ya que si en algún momento $C(k)$ fuera 1 significaría que la aproximación misma corresponde al valor real.

El cambio de $C(k)$ y del error cada vez que k aumenta su valor en uno es muy pequeño y se puede observar que tiene un comportamiento oscilante, no tiene una progresión lineal.

Sin embargo, si se estudian los valores de $C(k)$ para valores de k grandes, se aprecia que la tendencia general es ascendente, sin llegar a alcanzar el valor 1, por lo que el error va, aparentemente, disminuyendo, tal y como se puede observar en el cuadro 5.

Cuadro 5: Comportamiento del error para ciertos valores de k .

Valor de k	\tilde{x}_k	R_k	$C(k)$	Error relativo
9987	116 505,2633	104 623	0,898 01	0,113 57
9988	116 518,0228	104 639	0,898 04	0,113 52
9989	116 530,7824	104 651	0,898 05	0,113 51
9990	116 543,5421	104 659	0,898 02	0,113 55
9991	116 556,3019	104 677	0,898 08	0,113 48
9992	116 569,0619	104 681	0,898 01	0,113 56
9993	116 581,8219	104 683	0,897 93	0,113 66
9994	116 594,5821	104 693	0,897 92	0,113 68
9995	116 607,3423	104 701	0,897 89	0,113 71
9996	116 620,1027	104 707	0,897 84	0,113 77
9997	116 632,8632	104 711	0,897 78	0,113 85
9998	116 645,6238	104 717	0,897 73	0,113 91
9999	116 658,3845	104 723	0,897 68	0,113 97
10 000	116 671,1453	104 729	0,897 64	0,114 02

Se sigue apreciando el cambio lento del error y de $C(k)$, incluso de forma más exagerada. También se conservan las oscilaciones de los valores de $C(k)$ y del error, pero son extremadamente más pequeñas.

Viendo el comportamiento de $C(k)$, es tentador pensar que este crecimiento tan lento significa que acabará convergiendo a 1, cosa que implicaría que para valores muy grandes de k el error relativo sería muy pequeño. Presentamos este resultado.

Proposición 3. *Para todo $k \geq 3$ consideramos x_k y P_k , definidos anteriormente. Entonces, se cumple que*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_k}{P_k} = 1.$$

Para demostrar este resultado se utilizará el siguiente lema.

Lema 4. *Se tiene que*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{P_k}{k \ln(k)} = 1.$$

Demostración. Por el teorema 1, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1.$$

Como $\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k = +\infty$, entonces

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi(P_k)}{P_k/\ln(P_k)} = 1.$$

Por definición de $\pi(x)$, $\pi(P_k) = k$ para todo $k \geq 1$. Por lo tanto,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k \ln(P_k)}{P_k} = 1.$$

Como $\ln(x)$ es continua, se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{k \ln(P_k)}{P_k}\right) = \ln(1) = 0.$$

Desarrollando y dividiendo por $\ln(P_k)$ se obtiene que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(k)}{\ln(P_k)} + \frac{\ln(\ln(P_k))}{\ln(P_k)} - 1 \right) = 0.$$

Usando l'Hôpital, se puede observar que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln(\ln(x))/\ln(x) = 0$ y, como $\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k = +\infty$, entonces

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(P_k))}{\ln(P_k)} = 0.$$

De aquí se deduce que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(k)}{\ln(P_k)} = 1.$$

Usando esta última igualdad y que $\lim_{k \rightarrow +\infty} k \ln(P_k)/P_k = 1$, se completa la demostración del lema. ■

Demostración de la proposición 3. Para $k \geq 3$ se tiene que

$$k = G(x_k) = \frac{x_k}{\ln(x_k)},$$

lo que implica que

$$1 = \frac{x_k}{k \ln(x_k)}.$$

Tomando logaritmos, dividiendo por $\ln(x_k)$ y tomando límite cuando k tiende a infinito se deduce que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(k)}{\ln(x_k)} = 1,$$

donde se ha usado que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_k = +\infty$. Combinando las dos últimas igualdades se obtiene que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_k}{k \ln(k)} = 1.$$

Utilizando entonces el lema 4 acaba la prueba. ■

Observación. En la investigación se ha trabajado con una aproximación de x_k dada por el método de la tangente, a la que se ha denominado \tilde{x}_k (para $k \geq 3$). Dicha aproximación se ha obtenido con un programa con un error mínimo definido, de tal forma que $|x_k - \tilde{x}_k| \leq 1 \cdot 10^{-7}$. Luego el resultado anterior también se aplica a \tilde{x}_k , ya que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{x}_k}{P_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_k \pm 10^{-7}}{P_k} = 1.$$

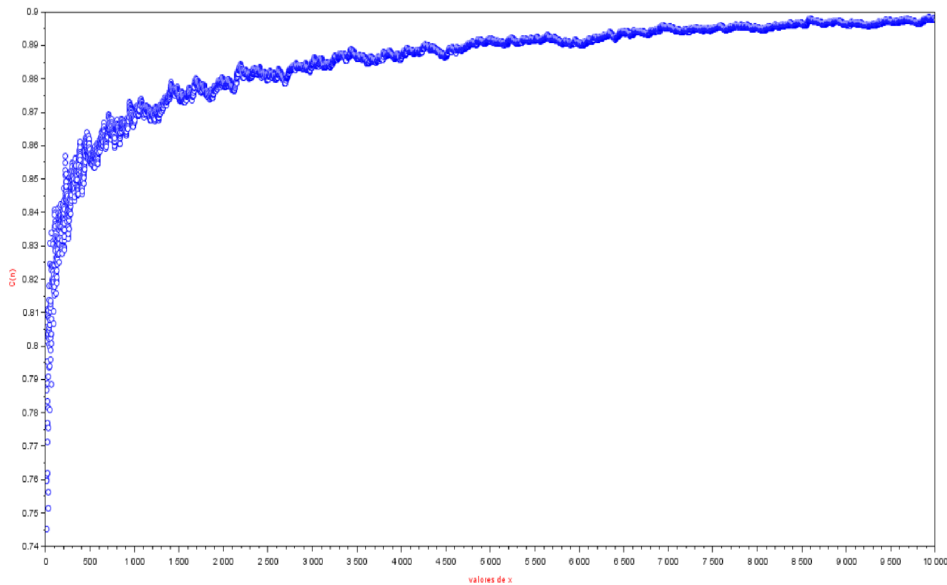


Figura 4: Comportamiento de $C(k)$ para los primeros 10 000 valores de x .

5. Conclusiones iniciales

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el apartado anterior, podemos decir que, aunque en cierto modo se haya conseguido hablar de la inversa de $G(x)$, en sí misma la aproximación obtenida con el método descrito en este artículo no es muy buena. Es verdad que el error relativo tiene una tendencia decreciente y se ha demostrado que $C(k)$ tiende a 1 (cosa que implica que el error relativo tiende a 0), pero si se mira la diferencia entre el valor obtenido y el valor real, se puede observar que dicha diferencia es muy grande y aumenta cada vez que k lo hace. Por ejemplo, para $k = 10\,000$ el número primo correspondiente a esta posición es 104 729, mientras que la parte entera de la aproximación que se obtiene es 116 671. Erro por más de 12 000 unidades. Es decir, el error relativo tiende a cero, pero el error absoluto va creciendo.

Sin embargo, sí que se generan más preguntas respecto al problema original. ¿Qué pasaría si estudiásemos los valores de $C(k)$? ¿A qué se debe su comportamiento tan reacio al crecimiento? Dichas preguntas serán la base de un nuevo estudio.

6. Planteamiento de un nuevo estudio a partir de los resultados obtenidos

Gauss no fue el único que exploró la estructura $x/\ln(x)$. Adrien-Marie Legendre, matemático francés, propuso un cambio en la fórmula de Gauss e introdujo una constante restando al logaritmo neperiano en el denominador, concretamente $-1,083\,66$ (de ahora en adelante la estructura de Legendre será referida como $L(x)$, donde $L(x) = x/(\ln(x) - 1,083\,66)$). Esta modificación aparentemente reducía el error relativo en gran medida, para los valores iniciales, como se puede apreciar en el cuadro 6.

Sin embargo, se puede apreciar que, mientras el error relativo utilizando $G(x)$ va decreciendo, el error relativo usando $L(x)$ va creciendo, luego cabe la posibilidad de que, para valores muy grandes de x , con $G(x)$ se obtengan mejores aproximaciones que con $L(x)$, aunque es algo que no sabemos.

Cuadro 6: Comparación entre las estructuras de Gauss y de Legendre.

x	$G(x)$	$L(x)$	$\pi(x)$	Error relativo de $G(x)$	Error relativo de $L(x)$
28 422 049	1 656 038,33	1 767 648,555	1 766 023	0,062 27	0,000 92
59 462 017	3 321 742,97	3 535 788,263	3 532 046	0,059 54	0,001 05
91 483 589	4 990 466,67	5 304 008,298	5 298 069	0,058 05	0,001 12
124 143 001	6 661 124,08	7 072 351,595	7 064 092	0,057 04	0,001 16
157 272 821	8 333 000,39	8 840 601,529	8 830 115	0,056 29	0,001 18
190 776 457	10 005 786,4	10 608 739,169	10 596 138	0,055 71	0,001 18
224 600 587	11 679 798,4	12 377 296,964	12 362 161	0,055 19	0,001 22
258 687 353	13 354 272,2	14 145 605,831	14 128 184	0,054 77	0,001 23
293 014 009	15 029 649,8	15 914 234,165	15 894 207	0,054 39	0,001 26
327 545 129	16 705 403,7	17 682 702,852	17 660 230	0,054 06	0,001 27
362 267 359	18 381 841,1	19 451 397,428	19 426 253	0,053 76	0,001 29
397 151 353	20 058 323,4	21 219 693,734	21 192 276	0,053 50	0,001 29
432 194 897	21 735 389,3	22 988 201,069	22 958 299	0,053 26	0,001 30
467 376 781	23 412 566,3	24 756 455,327	24 724 322	0,053 05	0,001 29
502 699 721	25 090 446,0	26 525 109,235	26 490 345	0,052 84	0,001 31
538 148 867	26 768 720,1	28 293 862,735	28 256 368	0,052 64	0,001 32
573 710 677	28 447 096,3	30 062 429,528	30 022 391	0,052 47	0,001 33

El cambio de Legendre es más interesante por lo que representa más que por lo que consigue. Legendre deja claro que un factor restando en el denominador afecta, y mucho, al resultado final. Aplicando el mismo proceso a $L(x)$ que a $G(x)$, definimos $F_k^L(x)$, y denotamos sus ceros como x_k^L , y la aproximación de sus ceros como \tilde{x}_k^L . La aproximación obtenida tendría sus propias constantes, o valores de $C(k)$. Además, el hecho de que inicialmente con $L(x)$ se obtenga un error relativo tan bajo parece indicar que las aproximaciones de $F_k^L(x)$ podrían ser, inicialmente al menos, notablemente mejores que las de $F_k(x)$. Véase, pues, la diferencia entre las dos aproximaciones para valores de x relativamente pequeños (cuadro 7), donde se confirma que para ciertos valores de x , con $F_k^L(x)$ se obtienen mejores aproximaciones. ¿Qué pasaría si definiéramos otro parámetro real libre, m , donde $L(x)$ y $G(x)$ serían casos particulares ($m = -1,083 66$ y $m = 0$, respectivamente)?.

Cuadro 7: Comparación entre las aproximaciones obtenidas con $F_k(x)$ y $F_k^L(x)$.

x	\tilde{x}_k	\tilde{x}_k^L	R_k	$C(k)$ de $F_k(x)$	$C(k)$ de $F_k^L(x)$
9987	116 505,2633	104 606,8800	104 623	0,898 01	1,000 15
9988	116 518,0228	104 618,4599	104 639	0,898 04	1,000 19
9989	116 530,7824	104 630,0400	104 651	0,898 05	1,000 20
9990	116 543,5421	104 641,6201	104 659	0,898 02	1,000 16
9991	116 556,3019	104 653,2003	104 677	0,898 08	1,000 22
9992	116 569,0619	104 664,7807	104 681	0,898 01	1,000 15
9993	116 581,8219	104 676,3611	104 683	0,897 93	1,000 06
9994	116 594,5821	104 687,9417	104 693	0,897 92	1,000 04
9995	116 607,3423	104 699,5224	104 701	0,897 89	1,000 01
9996	116 620,1027	104 711,1031	104 707	0,897 84	0,999 96
9997	116 632,8632	104 722,6840	104 711	0,897 78	0,999 88
9998	116 645,6238	104 734,2650	104 717	0,897 73	0,999 83
9999	116 658,3845	104 745,8461	104 723	0,897 68	0,999 78
10 000	116 671,1453	104 757,4274	104 729	0,897 64	0,999 72

Con el nuevo parámetro, la estructura a invertir sería $x/(\ln(x) + m)$, que denotaremos como $G_m(x)$. La función $G_m(x)$ tiene una asíntota en $x = e^{-m}$. La derivada de $G_m(x)$ es $(\ln(x) + m - 1)/(\ln(x) + m)^2$, donde se observa que e^{1-m} anula la derivada, luego en $x = e^{1-m}$ puede haber un extremo relativo, y haciendo un estudio similar al de $G(x)$ se llega a la conclusión de que es un mínimo absoluto. Por tanto, a partir de $x = e^{1-m}$ la derivada será siempre positiva, y, dado que $G_m(x)$ es continua, también aseguramos su inyectividad en el intervalo $(e^{1-m}, +\infty)$. Como $G_m(e^{1-m}) = e^{1-m}$, estableceremos el dominio y la imagen de $G_m(x)$ como $(e^{-m}, +\infty)$.

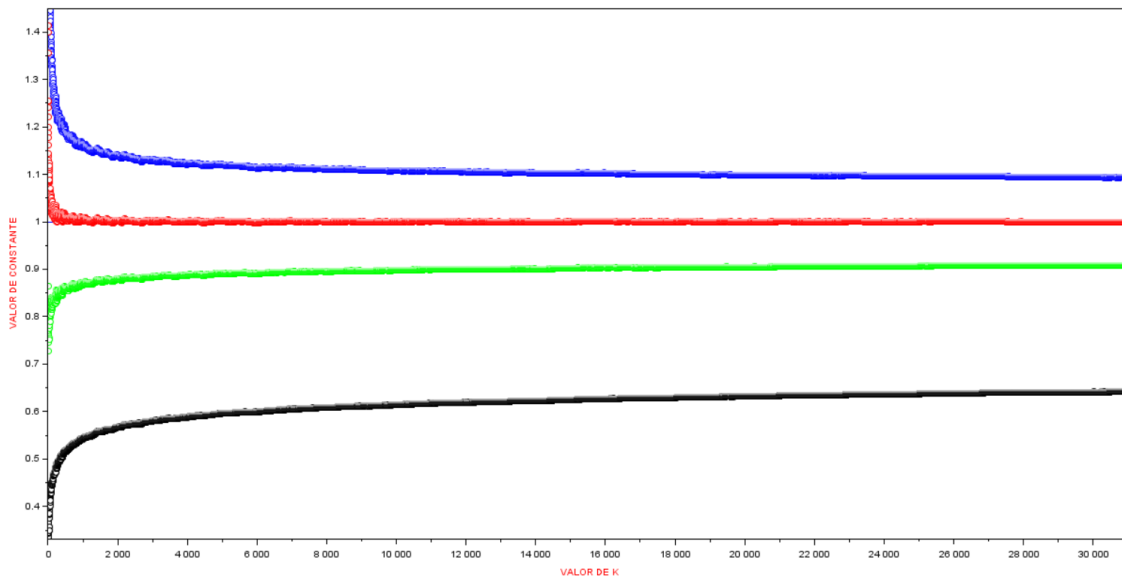


Figura 5: Representación de $C(k)$ para $m = 0$ (verde), $m = -1,08366$ (rojo), $m = -2$ (azul) y $m = 5$ (negro).

Sea entonces $F_k^m(x) = k(\ln(x) + m) - x$, donde el supuesto número primo en la posición k -ésima será un cero de cada respectiva $F_k^m(x)$, de tal manera que, si x_k^m es dicho cero, $G_m^{-1}(k) = x_k^m$. De la misma forma que con $G(x)$, $k \in (e^{1-m}, +\infty)$, donde $k \geq \lfloor e^{1-m} \rfloor + 1$ ($\lfloor x \rfloor$ representa la parte entera de x), y, al representar una posición, k será siempre natural.

Cabe destacar también que, para cada valor de m , $C(k)$ variará. La figura 5 muestra las gráficas de $C(k)$ para diferentes valores de m . Nótese como todas las gráficas tienen una tendencia aparente a acercarse hacia 1, en especial con $m = -1,08366$.

Corolario 5. Para todo $k \geq \lfloor e^{1-m} \rfloor + 1$ consideramos x_k^m y P_k definidos anteriormente. Entonces,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_k^m}{P_k} = 1.$$

Demostración. Es análoga a la de la proposición 3. Se sigue cumpliendo que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln(k)/\ln(x_k^m) = 1$, y se puede seguir aplicando el lema 4 ya que se cumplía independientemente del parámetro m . ■

Observación. Como el error para calcular las aproximaciones de x_k^m es el mismo que el de x_k , se cumple que $|x_k^m - \tilde{x}_k^m| \leq 1 \cdot 10^{-7}$, luego con el mismo razonamiento que con \tilde{x}_k , se tiene que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{x}_k^m/P_k = 1$. ◀

Si se observan a la escala de la figura 5, parece que correspondan a gráficas de una función que bien podría ser racional. Se ve una clara diferencia entre los valores de m negativos (cuyos valores iniciales son superiores a 1) y los valores de m positivos y 0 (cuyos valores iniciales son inferiores a 1). Estos últimos tienen tendencia ascendente mientras que para los primeros la tendencia es decreciente.

Si se amplía la escala, se puede observar que la apariencia continua que se tiene «desde lejos» es falsa. Nos encontramos con una distribución caótica de puntos, pero con algunas características notables como que, para distintos valores de m , los puntos tienen la misma distribución en su forma para los mismos valores de k . Por ejemplo, como muestran las figuras 6 y 7 para $m = -2$ y $m = 0$.

Este hecho se puede corroborar si se observa el cuadro 8. Se puede observar que, a medida que x va creciendo, la diferencia entre los valores de $C(k)$ de cada respectiva m tiene un cambio muy lento, como si hubiera realmente un factor de traslado.

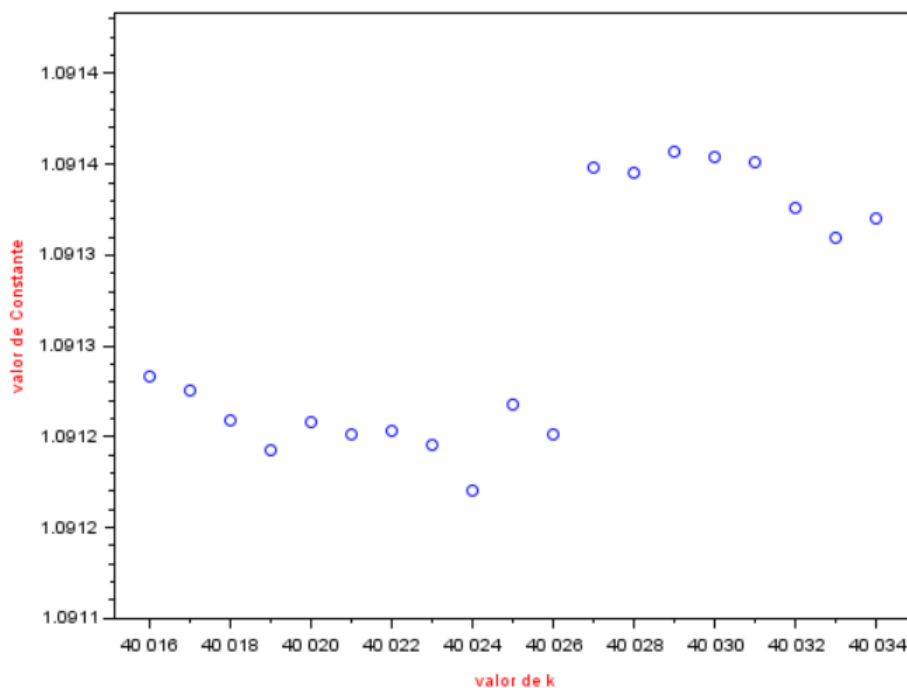


Figura 6: $C(k)$ para $m = -2$ para valores de k entre 40 016 y 40 034.

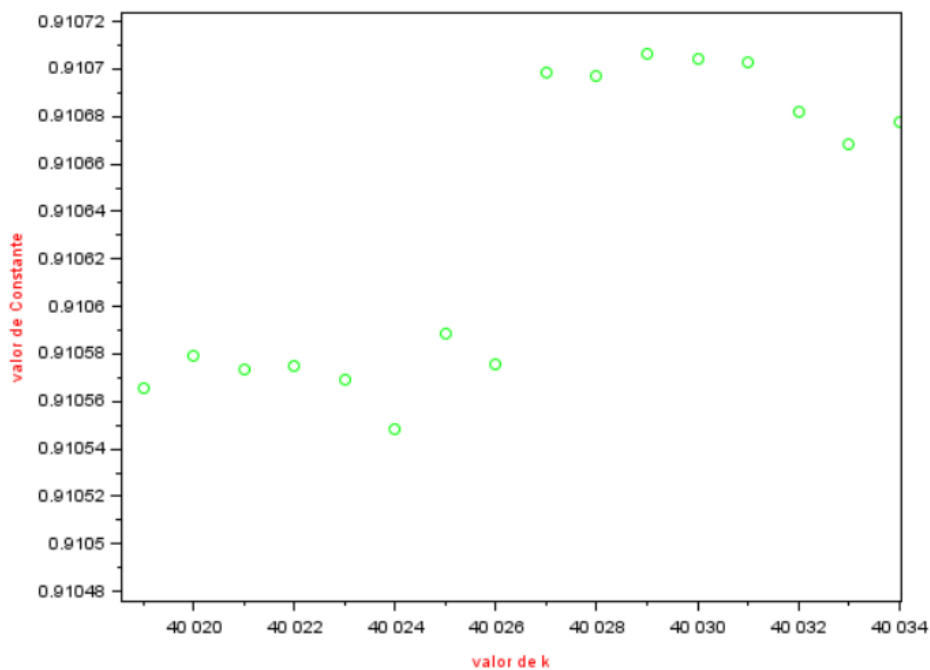


Figura 7: $C(k)$ para $m = 0$ para valores de k entre 40 020 y 40 034.

Cuadro 8: Diferencia, en valor absoluto, entre los valores respectivos de $C(k)$ para $m = -2$ y $m = 0$.

k	Diferencia entre los respectivos valores de $C(k)$	k	Diferencia entre los respectivos valores de $C(k)$
10 000	0,209 767	100 000	0,165 663
10 001	0,209 770	100 001	0,165 663
10 002	0,209 776	100 002	0,165 664
10 003	0,209 755	100 003	0,165 664
10 004	0,209 753	100 004	0,165 666
10 005	0,209 739	100 005	0,165 667
10 006	0,209 734	100 006	0,165 665

Referencias

- [1] AGUILÓ GOST, Francesc; BOADAS ELVIRA, Joan, y GARRIGA VALLE, Ernest. *Temes de càlcul*. Temes clau. Barcelona, ES: Universitat Politècnica de Catalunya. Servei de Publicacions, 1991. ISBN: 978-84-7653-116-7.
- [2] CAMACHO MEDINA, José de Jesús. «Números Primos: Enigmas y Aplicaciones». En: *MasScience* (25 de jun. de 2019). URL: <https://www.massscience.com/2019/06/25/numeros-primos-enigmas-y-aplicaciones/>.
- [3] GRACIÁN, Enrique. *Los números primos. Un largo camino al infinito*. El mundo es matemático. Barcelona, ES: RBA, 2010. ISBN: 978-84-473-6625-5.
- [4] HARDY, Godfrey Harold y WRIGHT, Edward Maitland. *Introduction à la théorie des nombres*. Trad. por Sauvageot, F Con pról. de Goldstein, Catherine. 5.ª ed. Berlín, Heidelberg, DE: Springer, 2007. ISBN: 978-3-540-64332-6.
- [5] MORENO CASTILLO, Ricardo. *Gauss. El príncipe de los matemáticos*. 1.ª ed. La matemática en sus personajes. Madrid, ES: Nivola, 2018. ISBN: 978-84-15913-38-2.
- [6] WEISSTEIN, Eric W. *Method of False Position*. MathWorld—A Wolfram Web Resource. URL: <https://mathworld.wolfram.com/MethodofFalsePosition.html> (visitado 06-2020).