TEMat

La ecuación $\bar{\partial}$ y el teorema de Runge

Melanie Fumero Padrón
Universidad de La Laguna
alu0100828764@ull.edu.es

Resumen: En este trabajo se recoge la relación que existe entre el teorema de aproximación de Runge y la llamada ecuación $\bar{\partial}$: si $\partial/\partial\bar{z} = (\partial/\partial x + \mathrm{i}\partial/\partial y)/2$ y K es un subconjunto compacto de un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, los siguientes enunciados son equivalentes:

- Toda función holomorfa en un entorno de K se puede aproximar uniformemente en K por funciones holomorfas en Ω.
- Para todo $\varepsilon > 0$ y toda función $f \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $K \cap \operatorname{sop} f = \varnothing$ existe una solución $u \in C^\infty(\Omega)$ de la ecuación $\partial u/\partial\bar{z} = f$ en Ω con $\|u\|_K < \varepsilon$.

Abstract: In this work we will show a relation between Runge's approximation theorem and the so called $\bar{\partial}$ problem: if $\partial/\partial\bar{z} = (\partial/\partial x + \mathrm{i}\partial/\partial y)/2$ and K is a compact subset of an open set $\Omega \subset \mathbb{C}$, the following are equivalent:

- Any holomorphic function in a neighborhood of K can be uniformly approximated on K by holomorphic functions in Ω.
- For any $\varepsilon > 0$ and any $f \in C_c^\infty(\Omega)$ such that $K \cap \operatorname{supp} f = \varnothing$ there exists a solution $u \in C^\infty(\Omega)$ to the equation $\partial u/\partial\bar{z} = f$ in Ω with $\|u\|_K < \varepsilon$.

Palabras clave: teorema de Runge, ecuación $\bar{\partial}$.

MSC2020: 30E10, 34M03, 35N05, 41A10, 41A20.

Recibido: 19 de abril de 2020.
Aceptado: 18 de junio de 2021.

Referencia: Fumero Padrón, Melanie. «La ecuación $\bar{\partial}$ y el teorema de Runge». En: *TEMat*, 6 (2022), págs. 49-63. ISSN: 2530-9633. URL: https://temat.es/articulo/2022-p49.

1. Introducción

Dado Ω un abierto en el plano complejo $\mathbb{C}$, denotaremos por $\mathcal{O}(\Omega)$ al espacio de funciones holomorfas en Ω. Dados dos dominios (abiertos y conexos) $\Omega \subsetneq \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}$, la restricción $\mathcal{O}(\tilde{\Omega}) \to \mathcal{O}(\Omega)$, aunque inyectiva, nunca es sobreyectiva. Basta considerar, para $a \in \tilde{\Omega} \setminus \Omega$, la función $f(z) = 1/(z-a)$: si existiera una extensión $\tilde{f}$ de f a todo $\tilde{\Omega}$, entonces, por el teorema de identidad, $(z-a)\tilde{f}(z) \equiv 1$ en $\tilde{\Omega}$, y esto es una contradicción cuando $z = a$.

Por otro lado, como consecuencia del teorema de Runge, toda función holomorfa en Ω se puede aproximar (uniformemente en compactos de Ω) por funciones holomorfas en $\tilde{\Omega}$ siempre que cualquier componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ interseque $\mathbb{C}_\infty \setminus \tilde{\Omega}$ (donde $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ denota la esfera de Riemann o plano complejo extendido). Que esta condición topológica es necesaria para la aproximación que dicta el teorema de Runge es consecuencia inmediata del ejemplo anterior atendiendo al principio del máximo. Esto significa que el teorema de Runge no se reduce a un mero corolario de un resultado de extensión para funciones holomorfas que, por otro lado, es evidentemente falso.

Para ser más precisos, si $K \subset \mathbb{C}$ es un subconjunto compacto del plano complejo y $\Lambda \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$ un subconjunto del plano extendido, el teorema de Runge establece que cualquier función holomorfa en un entorno de K se puede aproximar uniformemente en K por funciones racionales con polos en Λ[1]. En particular, si $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ es conexo, podemos tomar $\Lambda = \{\infty\}$ y concluir que toda función holomorfa en un entorno de K es límite uniforme en K de polinomios[2].

La idea de usar la ecuación $\bar{\partial}$ para probar el teorema de Runge es la siguiente. Sea f una función holomorfa en un entorno abierto Ω de un compacto $K \subset \mathbb{C}$. Si $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ es una función $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto en Ω y $\chi \equiv 1$ en algún entorno de K, entonces la función $\chi f \in C^\infty(\mathbb{C})$ coincide con f cerca de K pero no es holomorfa en Ω. Ahora se trata de encontrar una función u, pequeña en K, para la que la función $\tilde{f} = \chi f - u$ sea holomorfa en Ω. Esto lleva a considerar el problema no homogéneo para el operador $\partial/\partial\bar{z} = (\partial/\partial x + \mathrm{i}\partial/\partial y)/2$, ya que $\tilde{f}$ es holomorfa en Ω precisamente cuando $\partial u/\partial\bar{z} = f\partial\chi/\partial\bar{z}$ en Ω.

La sección 2 contiene los teoremas 1, 2 (este también conocido como desplazamiento de polos) y 5 que desglosan el teorema de Runge aludido anteriormente. De ellos presentamos sus demostraciones clásicas tal y como se suele llevar a cabo cuando se presenta el teorema de Runge en los primeros cursos de variable compleja. En principio, esta prueba no proporciona información sobre el grado de precisión en términos del grado de los polinomios aproximantes (en el caso en que el dominio sea simplemente conexo, es decir, cuando $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo). Para atacar esta cuestión normalmente se usa la teoría de aplicaciones conformes, pero en 1927 G. Szegö, usando métodos elementales (teorema 7), demostró que, si $\partial\Omega$ se reduce a una curva cerrada simple rectificable y $K \subset \Omega$ es compacto con $\operatorname{dist}(K, \partial\Omega) = \delta > 0$, entonces existen constantes $A > 0$ y $0 < \varkappa < 1$ y una sucesión de polinomios $\{p_n\}$ donde el grado de p_n es menor o igual a n tal que $\|f - p_n\|_K < A\varkappa^n$ (aquí, y en adelante, $\|f\|_K := \sup_{z \in K} |f(z)|$ denotará la norma uniforme de f). Cabe mencionar que, en este resultado, $\varkappa$ depende de δ y la geometría de $\partial\Omega$, pero A también depende de la función f.

La sección 3 recoge los preliminares relativos a la ecuación $\bar{\partial}$ y los resultados que se usarán posteriormente en la sección 5 para presentar la relación que existe entre el problema $\bar{\partial}$ y el teorema de Runge. A saber, los siguientes problemas son equivalentes.

Problema A. Aproximar uniformemente en K cualquier función holomorfa en un entorno de K por funciones holomorfas en Ω. ◂

Problema H. Dada $f \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $K \cap \operatorname{sop} f = \varnothing$ y $\varepsilon > 0$, encontrar una solución $u \in C^\infty(\Omega)$ de $\partial u/\partial\bar{z} = f$ tal que $\|u\|_K < \varepsilon$. ◂

En esta misma sección aparece el primer nexo de unión entre ellos. Haciendo uso de la fórmula de Cauchy-Green (proposición 8), el corolario 10 presenta una solución local del problema $\bar{\partial}$ que, combinado con el teorema de Runge, permite, en el teorema 11, probar la existencia de soluciones globales; es decir,

[1] Podría suceder que no se requieran todos los puntos de Λ, es decir, Λ podría contener más puntos de los necesarios para que la aproximación que dicta el teorema de Runge tenga lugar.

[2] Recuérdese que las funciones racionales con polos en el infinito son precisamente los polinomios.

en cualquier abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, la ecuación $\partial u/\partial\bar{z} = f$ admite soluciones $u \in C^1(\Omega)$ para cualquier dato $f \in C^1(\Omega)$. Para completar la exposición de la sección 5 hemos incluido una discusión sobre el teorema de Szegö basado en las estimaciones L^2 para el problema $\bar{\partial}$ debidas a Hörmander.

De nuevo basado en la fórmula de Cauchy-Green, el teorema 12 en la sección 4 presenta una generalización del teorema de Runge en la que se relaja la hipótesis sobre la función f a aproximar observando que, para ello, es suficiente que $f \in C^1$ en un entorno de K y $\partial f/\partial\bar{z} = 0$ en K. Aquí también recogemos el famoso ejemplo del queso suizo debido a Alice Roth [11], un subconjunto compacto y conexo del disco unidad cerrado con interior vacío sin la propiedad de aproximación de funciones continuas por funciones racionales.

Para finalizar, en la última sección del artículo, el teorema 20 muestra que la ecuación $\partial u/\partial\bar{z} = f \in C_c^1(\mathbb{C})$ admite soluciones $u \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ con $\operatorname{sop} u \subset \operatorname{sop} f$ si y solo si f es ortogonal a las funciones racionales con polos en un subconjunto $\Lambda \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \operatorname{sop} f$ en las mismas hipótesis que en teorema de Runge. Esto implica el teorema de Runge y cierra este círculo de relaciones.

2. El teorema de Runge

Sea f una función compleja definida en un subconjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$. ¿Cuándo podemos aproximar f uniformemente en K por polinomios (en z) o por funciones racionales (cocientes de tales polinomios)? Límites uniformes de funciones racionales con polos fuera de K deben ser continuos y holomorfos en su interior si este no es vacío (en conjuntos abiertos, el límite uniforme en compactos de funciones holomorfas es holomorfo). Así, estas condiciones resultan necesarias para la aproximación de f. El teorema de Runge proporciona condiciones suficientes.

Teorema 1 (Runge). *Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto. Entonces, toda función holomorfa en un entorno de K se puede aproximar uniformemente en K por funciones racionales con polos fuera de K.*

Demostración. La demostración se basa en aproximar la función $z \mapsto 1/(z-a)$ $(a \in \mathbb{C})$ tras descomponer f en «suma» de tales funciones. La prueba que presentamos a continuación corresponde a aquella en el libro de Gamelin [5].

Por hipótesis podemos encontrar un abierto Ω con frontera C^∞ que contiene a K tal que f es holomorfa en un entorno de $\overline{\Omega}$. Por la fórmula integral de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta, \quad z \in \Omega.$$

Ahora descomponemos $\partial\Omega$ en una unión finita de curvas γ_j tales que $\gamma_j \subset \Delta(\zeta_j, r_j)$ y $K \cap \Delta(\zeta_j, r_j) = \varnothing$. Entonces $f = \sum_j f_j$, donde

$$f_j(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta, \quad z \notin \gamma_j.$$

La función f_j es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \gamma_j$ ya que admite un desarrollo en serie de potencias decrecientes en $z - \zeta_j$ que converge uniformemente en $|z - \zeta_j| > r_j$ y, en particular, en K. Sumando estos aproximantes vemos que f se puede aproximar uniformemente en K por funciones racionales con polos fuera de K. ■

Cabe mencionar que la misma idea usada para aproximar las funciones $1/(z - \zeta_j)$ en el teorema 1 permite prescribir de antemano los polos de las funciones aproximantes (véase el trabajo de Fumero Padrón [3, Proposición 2.4]), es decir, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2. *Sea $K \subset \mathbb{C}$ un subconjunto compacto del plano complejo y $\Lambda \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$ un conjunto que contenga un punto en cada componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$. Entonces, cualquier función holomorfa en un entorno de K se puede aproximar uniformemente en K por funciones racionales con polos en Λ.*

Demostración. Utilizaremos un argumento de conexidad. Sean $U \subset \mathbb{C} \setminus K$ una componente conexa cualquiera de $\mathbb{C} \setminus K$ y $a \in U$. Veremos que cualquier función racional con polos en U se puede aproximar uniformemente en K por funciones racionales con polo en a.

Sea V el conjunto formado por aquellos $w \in U$ tales que la función $z \mapsto 1/(z-w)$ se pueda aproximar uniformemente en K por funciones racionales con polos en a. Veremos que V es abierto y cerrado en U, por lo que $V = U$ cuando $V \neq \varnothing$, ya que U es conexo. Que V es cerrado es inmediato de su propia definición: si $w_j \in V$ converge a $w \in U$, entonces $1/(z-w_j) \to 1/(z-w)$ uniformemente en K, por lo que, por definición de V, $w \in V$ también. Para ver que V es abierto hemos de probar que, si $w_0 \in V$ y $w \in U$ está suficientemente cerca de w_0, entonces $w \in V$; es decir, que $z \mapsto 1/(z-w)$ se puede aproximar uniformemente en K por funciones polinómicas en $1/(z-w_0)$. En el caso en que $w_0 = \infty$, esto significa que, si $|w|$ es grande, $z \mapsto 1/(z-w)$ se puede aproximar uniformemente en K por polinomios. Para ver esto, desarrollamos $1/(z-w)$ en serie de potencias:

$$\frac{1}{z-w} = -\frac{1}{w}\frac{1}{1-z/w} = -\frac{1}{w}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{w^k}.$$

Si $|z| \leq M$ en K y $|w| \geq 2M$, la serie anterior está dominada por la serie geométrica $\sum 2^{-k}$ en K, por lo que converge uniformemente en K. Si $w_0 \in \mathbb{C}$, la demostración es esencialmente la misma. Tomemos $0 < \delta < \operatorname{dist}(w_0, K)$. Si $|w-w_0| < \delta/2$, entonces $|w-w_0|/|z-w_0| < 1/2$ para $z \in K$, por lo que la serie geométrica

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-w_0}\frac{1}{1-\frac{w-w_0}{z-w_0}} = \frac{1}{z-w_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(w-w_0)^k}{(z-w_0)^k}$$

convergente uniformemente en K. Esto significa que el disco $\Delta(w_0, \delta/2) \subset V$ y V es abierto. Por último, por el teorema 1, $V \neq \varnothing$. ■

En particular, si $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo, cualquier función holomorfa en un entorno de K se puede aproximar uniformemente en K por polinomios[3] (en este caso basta tomar $\Lambda = \{\infty\}$).

Observación 3. Nótese que el conjunto Λ puede ser infinito; por ejemplo, si $K = \{0\} \cup \bigcup_{j\geq 1} \partial\Delta(1/j, \varepsilon_j)$ con $1/(j+1)^2 > \varepsilon_j \to 0$ (para que estas circunferencias sean disjuntas). Para este compacto, Λ debe ser del tipo $\Lambda = \{a_j : j \geq 1\} \cup \{\infty\}$ con $a_j \in \Delta(1/j, \varepsilon_j)$, por ejemplo, $a_j = 1/j$. ◂

Como corolario del teorema 2 tenemos la siguiente versión relativa del teorema de Runge.

Teorema 4. *Si $K \subset \Omega$ es un subconjunto compacto de una región $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que cualquier componente de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ interseque $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$, entonces toda función holomorfa en un entorno de K se puede aproximar uniformemente en K por funciones holomorfas en todo Ω (de hecho, por funciones racionales sin polos en Ω).*

Demostración. La hipótesis implica que cada componente de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ contiene al menos un punto en $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ y, por tanto, existe $\Lambda \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ en las hipótesis del teorema 2. Cualquier función racional con polos en Λ es, en particular, holomorfa en Ω. ■

Con esto, el siguiente teorema recoge la versión más general del teorema de Runge [2, Theorem 10.7].

Teorema 5. *Las siguientes afirmaciones sobre un subconjunto compacto $K \subset \Omega$ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ son equivalentes:*

(i) *$\Omega \setminus K$ no tiene componentes relativamente compactas en Ω.*
(ii) *Toda componente de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ interseca $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.*
(iii) *Cualquier función holomorfa en un entorno de K se puede aproximar uniformemente en K por funciones racionales sin polos en Ω.*
(iv) *Cualquier función holomorfa en un entorno de K se puede aproximar uniformemente en K por funciones holomorfas en Ω.*
(v) *Para todo $a \in \Omega \setminus K$ existe $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $|h(a)| > \|h\|_K$.*

[3] Este es el resultado de Runge de 1885. Curiosamente, ese mismo año fue probado el teorema de Weierstrass sobre aproximación polinómica en intervalos.

Demostración. Para ver que (I) implica (II), sea V una componente acotada de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$. Si $V \subset \Omega$, V sería una componente de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ con $\partial V \subset K \subset \Omega$. Que (II) implica (III) es el contenido del teorema 4. Trivialmente (III) implica (IV). Si $V \subset \Omega$ es una componente relativamente compacta de $\Omega \setminus K$ y $a \in V$, la función $f(z) = 1/(z-a)$ es holomorfa en un entorno de K pero no sería uniformemente aproximable en K por funciones holomorfas en Ω: no existe $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $\|f-g\|_K < 1/2$ en K puesto que esto implicaría (por el principio del máximo) que $|1-(z-a)g(z)| < 1/2$ para todo $z \in V$, lo que es una contradicción en $z = a$. Así, (IV) implica (I).

Por último, esta última idea permite ver que (V) es equivalente a estas cuatro afirmaciones: si $V \subset \Omega \setminus K$ es una componente de $\mathbb{C} \setminus K$ relativamente compacta en Ω y $h \in \mathcal{O}(\Omega)$, entonces, para todo $a \in V$, $|h(a)| \leq \text{máx}_{\partial V} |h| \leq \text{máx}_K |h|$ si $\overline{V} \subset \Omega$, ya que $\partial V \subset K$. Esto prueba que (V) implica (I). Por otro lado, si $a \in \Omega \setminus K$, (IV) aplicado al compacto $\tilde{K} := K \cup \{a\} \subset \Omega$ proporciona una función $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $|1-h(a)|, \|h\|_K < 1/2$ (basta aproximar la función que vale 0 en un entorno de K y 1 en otro entorno de a disjunto de K). Para esta función tenemos que $|h(a)| > 1/2 > \|h\|_K$. Así, (IV) implica (V). ∎

Si denotamos por $\widehat{K}_\Omega = \{z \in \Omega : |h(z)| \leq \|h\|_K, \text{ para toda } h \in \mathcal{O}(\Omega)\}$ la envolvente de holomorfía de K respecto a Ω, este teorema implica que $\widehat{K}_\Omega$ coincide con la unión de K y las componentes relativamente compactas de $\Omega \setminus K$ en Ω [8, Theorem 1.3.3]. Por tanto, (I) o cualquiera de las otras condiciones en este teorema equivale a que $\widehat{K}_\Omega = K$. En este caso se dice que K es $\mathcal{O}(\Omega)$-convexo.

Puesto que cualquier abierto Ω del plano admite un recubrimiento por compactos $\mathcal{O}(\Omega)$-convexos [13, Theorem 13.3], como consecuencia de este teorema tenemos el siguiente resultado [13, Theorem 13.9].

Teorema 6. *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto del plano, Λ un conjunto que interseque cualquier componente de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ y f una función holomorfa en Ω. Entonces, existe una sucesión de funciones racionales $\{r_n\}$ con polos solo en Λ tal que $r_n \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω.*

En el caso especial en el que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ sea conexo, podemos tomar $\Lambda = \{\infty\}$ para concluir que existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}$ tal que $p_n \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω[4].

Como hemos mencionado en la introducción, ahora estudiaremos el grado de precisión de la aproximación polinómica en el teorema de Runge [7, Theorem 16.6.5] (Szegö, 1927).

Teorema 7. *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio plano acotado con frontera rectificable tal que $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\Omega}$ es conexo, $K \subset \Omega$ un subconjunto compacto y $\delta = \operatorname{dist}(K, \partial\Omega) > 0$. Si f es holomorfa en Ω y continua en $\overline{\Omega}$, entonces existen constantes $A > 0$, $0 < \varkappa < 1$ y una sucesión de polinomios $\{p_n\}$ con p_n de grado a lo sumo n tales que*

$$\|f - p_n\|_K < A\varkappa^n. \tag{1}$$

Aquí, $\varkappa$ depende de Ω y δ, pero A también depende de f.

Demostración. Por la fórmula integral de Cauchy, para $z \in K$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{2}$$

Ahora, como en la demostración del teorema 1, dividimos $\partial\Omega$ en una unión finita de arcos γ_j tales que $\gamma_j \subset \Delta(\zeta_j, r_j)$, $K \cap \Delta(\zeta_j, r_j) = \varnothing$ para los que

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta_j - z} \right| < \frac{1}{4\varrho}, \quad \zeta, \zeta_j \in \gamma_j,\ z \in K, \tag{3}$$

donde $\varrho = \text{diám}\, \partial\Omega$ (el diámetro de $\partial\Omega$, que es finito porque Ω se supone acotado). Por el teorema 6 podemos, para cada j, elegir un polinomio q_j tal que

$$\left| \frac{1}{\zeta_j - z} - q_j(z) \right| < \frac{1}{4\varrho}, \quad z \in K.$$

[4] De hecho, esta propiedad de aproximación caracteriza los dominios simplemente conexos del plano [13, Theorem 13.11].

Así, por (3), para todo $\zeta \in \gamma_j$ y $z \in K$ tenemos que

$$\left|\frac{1}{\zeta - z} - q_j(z)\right| \leq \left|\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta_j - z}\right| + \left|\frac{1}{\zeta_j - z} - q_j(z)\right| < \frac{1}{2\varrho}. \tag{4}$$

Ahora definimos

$$Q_m(z) := \sum_j \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_j} \frac{1 - (1 - (\zeta - z)q_j(z))^m}{\zeta - z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta, \quad m = 1, 2, \dots \tag{5}$$

Como para todo $w \in \mathbb{C}$ tenemos que $1 - (1 - w)^m = w\sum_{k=0}^{m-1}(1 - w)^k$, la función racional que aparece en el integrando de cada sumando en (5) es realmente un polinomio en (ζ, z) cuyo grado en z es $(d_j + 1)(m - 1) + d_j = (d_j + 1)m - 1$ si el grado de q_j es d_j. Así, si $d = \max_j d_j$, Q_m es un polinomio de grado a lo sumo $(d + 1)m - 1$.

De (2) y (5), para $z \in K$ tenemos que

$$f(z) - Q_m(z) = \sum_j \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_j} \frac{\bigl(1 - (\zeta - z)q_j(z)\bigr)^m}{\zeta - z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

y, por tanto,

$$|f(z) - Q_m(z)| \leq \frac{2^{-m}}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|}|\mathrm{d}\zeta| \leq \frac{\|f\|_{\partial\Omega}\,\ell(\partial\Omega)}{2\pi\delta}\,2^{-m},$$

donde $\ell(\partial\Omega)$ denota la longitud de $\partial\Omega$, ya que, por (4), $|1 - (\zeta - z)q_j(z)| \leq 1/2$ para $\zeta \in \gamma_j$ y $z \in K$. Ahora, para $n = 1, 2, \dots$, sea $m_n = \lfloor n/(d + 1)\rfloor$ el mayor entero menor o igual que $n/(d + 1)$. Entonces, $p_n := Q_{m_n}$ es un polinomio de grado a lo sumo n para el que (1) se verifica con $A = \|f\|_{\partial\Omega}\,\ell(\partial\Omega)/(\pi\delta)$ y $\varkappa = 2^{-1/(d+1)}$. ■

Por lo general, cuando δ decrece, d normalmente crece, por lo que $A \to \infty$ y $\varkappa \to 1$ cuando $\delta \searrow 0^+$.

3. La ecuación $\overline{\partial}$

La ecuación $\overline{\partial}$ consiste en, dada $f \in C^\infty(\Omega)$ (o en cualquier otro espacio de funciones adecuado), encontrar $u \in C^\infty(\Omega)$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f \tag{6}$$

en Ω. Aquí

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\Bigr),$$

donde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial \beta}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial \beta}{\partial y}$$

si α y β denotan las partes real e imaginaria de u, respectivamente.

Obsérvese que $\partial u/\partial\bar{z} = 0$ equivale a que $\partial u/\partial x = -\mathrm{i}\partial u/\partial y$, que a su vez se puede reescribir como

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} = \dfrac{\partial \beta}{\partial y}, \\[2mm] \dfrac{\partial \alpha}{\partial y} = -\dfrac{\partial \beta}{\partial x}, \end{cases}$$

y que reconocemos como las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Así, $\partial u/\partial\bar{z} = 0$ en Ω significa que u es holomorfa en Ω.

La importancia de la ecuación no homogénea (6) radica en su uso para la construcción de funciones holomorfas que, por su rigidez (no existen «particiones de la unidad holomorfas»), hacen de ella una herramienta extremadamente útil. Tras el éxito que ha supuesto, no solo en una, sino en varias variables complejas (donde la naturaleza de (6) es, si cabe, aún mas fundamental), esta idea ha dado lugar al llamado *principio de Oka*: si podemos resolver un problema (de construcción de funciones holomorfas) en la categoría de funciones continuas, entonces también será resoluble en la categoría de funciones holomorfas. Ejemplos de esta técnica se pueden encontrar en las pruebas de los teoremas clásicos de Mittag-Leffler y Weierstrass [8, Theorem 1.4.3 y Theorem 1.5.1; 10, sección 1.4.1].

Que la ecuación $\partial u/\partial\bar{z} = f$ tiene solución en cualquier abierto Ω para cualquier dato $f \in C^\infty(\Omega)$ se puede probar usando el teorema de Runge [8, Theorem 1.4.4; 10, teorema 1.16]. La demostración es consecuencia del corolario 10, que a su vez se sigue de la proposición 16.3.1 del libro de Rudin [12].

Proposición 8 (Cauchy-Green). *Si $u \in C_c^1(\mathbb{C})$, entonces*

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial u/\partial\bar{w}(w)}{z-w}\,\mathrm{d}A(w). \tag{7}$$

Demostración. Por la regla de la cadena (ver la observación 9), en coordenadas polares tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\Big(\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{\mathrm{i}}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big). \tag{8}$$

Alternativamente, hemos de encontrar dos funciones $A = A(\varrho,\theta)$ y $B = B(\varrho,\theta)$ que cumplan la relación $\partial/\partial\bar{z} = A\partial/\partial\varrho + B\partial/\partial\theta$. Para ello, basta testar esta igualdad con las funciones u y $\bar{u}$ (la función conjugada de u), donde $u(z) = z = \varrho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$; para la primera tenemos que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}A + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\varrho B = 0$ y, para la segunda, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}A - \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\varrho B = 1$. Así,

$$\left.\begin{aligned} A + \mathrm{i}\varrho B &= 0,\\ A - \mathrm{i}\varrho B &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\end{aligned}\right\} \implies \begin{cases} A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}/2,\\ B = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}/2\varrho.\end{cases}$$

Para $z = 0$, el lado derecho de (7) es igual al límite cuando $\varepsilon \to 0^+$ de

$$-\frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^\infty \bigg(\int_0^{2\pi}\Big(\frac{\partial u}{\partial\varrho} + \frac{\mathrm{i}}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big)\mathrm{d}\theta\bigg)\mathrm{d}\varrho \tag{9}$$

y, puesto que la función $\theta \mapsto u(\varrho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ es 2π-periódica, la integral de $\partial u/\partial\theta$ es cero y (9) es, atendiendo al teorema de Fubini, igual a

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bigg(\int_\varepsilon^\infty \frac{\partial u}{\partial\varrho}\,\mathrm{d}\varrho\bigg)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} u(0),$$

ya que $u(z) = 0$ para $|z|$ suficientemente grande (u tiene soporte compacto) y $u(\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \to u(0)$ uniformemente cuando $\varepsilon \to 0^+$. Esto prueba (7) para $z = 0$.

El caso general se sigue aplicando este a las trasladadas de u: si $a \in \mathbb{C}$ y $u_a(z) = u(a+z)$, de (7) para $z = 0$ tenemos que

$$u(a) = u_a(0) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{\partial u_a/\partial\bar{w}(w)}{w}\,\mathrm{d}A(w) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{\partial u/\partial\bar{w}(a+w)}{w}\,\mathrm{d}A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{\partial u/\partial\bar{w}(w)}{a-w}\,\mathrm{d}A(w),$$

que es (7) con $z = a$. ∎

Observación 9. Como se ha dicho, (8) también se sigue de la regla de la cadena, a saber,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varrho} &= \frac{\partial x}{\partial\varrho}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\varrho}\frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial y},\\ \frac{\partial}{\partial\theta} &= \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial y} = -\varrho\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial x} + \varrho\cos\theta\frac{\partial}{\partial y},\end{aligned}$$

por lo que $\partial/\partial x = (\varrho\cos\theta\partial/\partial\varrho - \operatorname{sen}\theta\partial/\partial\theta)/\varrho$ y $\partial/\partial y = (\varrho\operatorname{sen}\theta\partial/\partial\varrho + \cos\theta\partial/\partial\theta)/\varrho$. Así,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\bar{z}} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\Big) = \frac{1}{2}\Big((\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{(-\operatorname{sen}\theta + \mathrm{i}\cos\theta)}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big((\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{\mathrm{i}}{\varrho}(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\Big(\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{\mathrm{i}}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big).\end{aligned}$$ ◂

Como consecuencia, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 10. *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f \in C^1_c(\Omega)$. Si*

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{f(w)}{z-w}\,\mathrm{d}A(w), \quad z \in \Omega, \tag{10}$$

entonces $u \in C^1(\Omega)$ y $\partial u/\partial \bar z = f$ en Ω.

Demostración. La fórmula (10) se puede escribir como

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(z-w)}{w}\,\mathrm{d}A(w)$$

y permite ver que $u \in C^1(\Omega)$ puesto que esta expresión se puede derivar bajo el signo integral, ya que la función $1/z$ es localmente integrable.

Fijemos $a \in \Omega$ y sea $\psi \in C^1_c(\Omega)$ tal que $\psi \equiv 1$ en un entorno $U \Subset \Omega$ ($\overline{U} \subset \Omega$) de a. Si reemplazamos f por $(1-\psi)f$ en (10), la función resultante es holomorfa en U y, por tanto, f se puede reemplazar por ψf para el cómputo de $\partial u/\partial \bar z(a)$. Pero derivando bajo el signo integral, de (7) tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z}(a) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial(\psi f)/\partial \bar w(a-w)}{w}\,\mathrm{d}A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial(\psi f)/\partial \bar w(w)}{a-w}\,\mathrm{d}A(w) = (\psi f)(a) = f(a). \qquad \blacksquare$$

Obsérvese que, de hecho, aquí Ω no es relevante: la función u dada en (10) es $C^\infty(\mathbb{C})$ y $\partial u/\partial \bar z = f$ en todo el plano, y la segunda parte en la demostración del corolario 10 muestra que (10) sigue siendo solución cuando el segundo miembro tenga sentido; por ejemplo, si Ω es acotado y $f \in C^1(\Omega)$ es acotada [12, Proposition 16.3.2].

Ahora estamos preparados para la demostración del teorema de existencia de soluciones para la ecuación (6) (véase el libro de Hörmander [8, Theorem 1.4.4]).

Teorema 11. *Para todo abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y toda función $f \in C^1(\Omega)$, la ecuación $\partial u/\partial \bar z = f$ tiene una solución $u \in C^1(\Omega)$.*

Demostración. Sean $K_1 \subset \mathring{K}_2 \Subset \Omega$ dos subconjuntos compactos de Ω y $\psi_1, \psi_2 \in C^\infty_c(\Omega)$ tales que, para $j = 1, 2$, $\psi_j \equiv 1$ en un entorno de K_j. Por el corolario 10, existen dos funciones $u_1, u_2 \in C^1(\Omega)$ tales que $\partial u_j/\partial \bar z = \psi_j f$ ($j = 1, 2$), pero, en general, no podemos controlar cuán cerca está u_2 de u_1 en K_1 (el menor de los compactos), aunque, ciertamente, $u_2 - u_1$ es holomorfa en un entorno de K_1. Así, si además suponemos que K_1 es $\mathcal{O}(\Omega)$-convexo y $\varepsilon > 0$, por el teorema de Runge podemos encontrar $v \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $\|u_2 - u_1 - v\|_{K_1} < \varepsilon$. Es decir, reemplazando u_1 por $u_1 + v$ podemos conseguir que $\partial u_j/\partial \bar z = \psi_j f$ para $j = 1, 2$ con $\|u_2 - u_1\|_{K_1}$ tan pequeño como se desee.

De este modo, si $\{K_j\}_{j\geq 1}$ es un recubrimiento normal de Ω [13, Theorem 13.3], es decir, un recubrimiento de Ω por compactos $\mathcal{O}(\Omega)$-convexos, podemos construir una sucesión de funciones $\{u_j\} \subset C^1(\Omega)$ tal que $\partial u_j/\partial \bar z = \psi_j f$ (en particular, $u_{j+1} - u_j$ es holomorfa en un entorno de K_{j-1}) y $\|u_{j+1} - u_j\|_{K_j} < 2^{-j}$ para todo $j = 1, 2, \ldots$ Por tanto, esta sucesión converge uniformemente en compactos a una función $u = \lim_j u_j = \sum_j (u_{j+1} - u_j) \in C^1(\Omega)$ que satisface $\partial u/\partial \bar z = f$ en Ω ya que, por las estimaciones de Cauchy [13, Theorem 10.26], $\|(u_{j+1} - u_j)'\|_K \leq C_K 2^{-j}$ para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$ si j es suficientemente grande. $\blacksquare$

Nótese que la solución así construida es $C^\infty(\Omega)$ cuando $f \in C^\infty(\Omega)$. Esto también es consecuencia de la elipticidad del operador $\bar\partial$.

4. Una generalización del teorema de Runge

Por el teorema de representación de Riesz [13, Theorem 2.14], el dual de $C(K)$ con la métrica uniforme coincide con el espacio de las medidas complejas en K. Esto quiere decir que cualquier funcional lineal acotado en $C(K)$ es de la forma

$$f \in C(K) \longrightarrow \mu[f] := \int_K f\,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{C}$$

para alguna medida compleja μ en K.

Sea $\mathcal{R}_\Lambda(K)$ el subespacio de $C(K)$ que consiste en las restricciones a K de las funciones racionales con polos en Λ. El teorema 2 afirma que, si $\Lambda \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$ contiene al menos un punto en cada componente de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$, $\mathcal{R}_\Lambda(K)$ es denso en el subespacio de $C(K)$ formado por las restricciones a K de las funciones holomorfas en un entorno de K, y, de acuerdo al teorema de Hahn-Banach [13, Theorem 5.19], esto es equivalente a probar que si una medida compleja μ es «ortogonal» a $\mathcal{R}_\Lambda(K)$ ($\mu \perp \mathcal{R}_\Lambda(K)$), es decir, tal que $\mu[r] = 0$ para toda $r \in \mathcal{R}_\Lambda(K)$, también lo es al subespacio de las restricciones a K de funciones holomorfas en un entorno de K, esto es, $\mu[f] = 0$ para toda función f holomorfa en un entorno de K.

De hecho, la prueba funcional clásica [13, Theorem 13.6] permite relajar las hipótesis en el teorema 2 [4, Theorem 1.1].

Teorema 12. *Sean $K \subset \mathbb{C}$ un subconjunto compacto del plano complejo y $\Lambda \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$ un conjunto que contenga un punto en cada componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$. Si f es C^1 en un entorno de K y $\partial f/\partial \bar{z} = 0$ en K, entonces f se puede aproximar uniformemente en K por funciones racionales con polos en Λ.*

Demostración. Sea $\mu \perp \mathcal{R}_\Lambda(K)$. Puesto que f es C^1 en un entorno de K, podemos, sin pérdida de generalidad, suponer que f es $C^1_c(\mathbb{C})$. Por (7) y el teorema de Fubini,

$$\mu[f] = \int_K f(z)\,\mathrm{d}\mu(z) = \int_K \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial f/\partial \bar{w}(w)}{z-w}\,\mathrm{d}A(w)\right)\mathrm{d}\mu(z) = \int_{\mathbb{C}\setminus K} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}(w)h(w)\,\mathrm{d}A(w), \tag{11}$$

donde

$$h(w) := \frac{1}{\pi}\int_K \frac{\mathrm{d}\mu(z)}{z-w}, \quad w \notin K.$$

La función h así definida es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus K$ y

$$h^{(n)}(w) = \frac{n!}{\pi}\int_K \frac{\mathrm{d}\mu(z)}{(z-w)^{n+1}}, \quad w \notin K,$$

para $n = 0, 1, \dots$ Puesto que para cada $a \in \Lambda$ las funciones $z \mapsto 1/(z-a)^n$ pertenecen a $\mathcal{R}_\Lambda(K)$, por hipótesis, $h^{(n)}(a) = 0$ para todo $n = 0, 1, \dots$ y, del teorema de identidad, $h \equiv 0$ en cualquier componente acotada de $\mathbb{C} \setminus K$. De igual manera, $h(\infty) = 0$ y

$$h^{(n)}(\infty) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\Big|_{w=0} h(1/w) = n\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}w^{n-1}}\Big|_{w=0} \frac{1}{\pi}\int_K \frac{\mathrm{d}\mu(z)}{zw-1} = -\frac{n!}{\pi}\int_K z^{n-1}\,\mathrm{d}\mu(z) = 0$$

para $n = 1, 2, \dots$ Con todo, $h \equiv 0$ en $\mathbb{C} \setminus K$ y $\mu[f] = 0$. ∎

Existe un teorema de aproximación polinómica debido a Mergelyan [13, Theorem 20.5] que afirma que, para compactos K con complementario $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ conexo, cualquier función continua en K y holomorfa en su interior puede ser aproximada uniformemente por polinomios. De hecho, si el complementario de K tiene un número finito de componentes, cualquier función continua en K y holomorfa en su interior se puede aproximar uniformemente en K por funciones racionales sin polos en K (esto es consecuencia del teorema 10.4 en el libro de Gamelin [4], que establece que para esto es suficiente con que los diámetros de las componentes de $\mathbb{C} \setminus K$ estén uniformemente acotados inferiormente, es decir, que exista $\delta > 0$ tal que diám $V \geq \delta$ para cualquier componente conexa V de $\mathbb{C} \setminus K$).

El resultado análogo al de Runge para funciones racionales es falso. Existen compactos K con interior vacío y una función continua f en K que no se puede aproximar uniformemente en K por funciones racionales con polos fuera de K.

Un ejemplo viene dado por el llamado *queso suizo*[5] $\mathcal{S}$ que se obtiene del disco unidad cerrado $\overline{\Delta}$ tras quitar una sucesión de discos abiertos $\{\Delta_j\}$ con clausuras mutuamente disjuntas y tales que $\overline{\Delta} \setminus \bigcup_j \Delta_j$ tiene interior vacío (figura 1).

[5] Introducido en 1938 por la matemática suiza Alice Roth en su tesis doctoral [11, pág. 96], más parece un queso gruyer que, por cierto, recibe su nombre del distrito de Gruyère del cantón de Friburgo (Suiza) donde se fabrica.

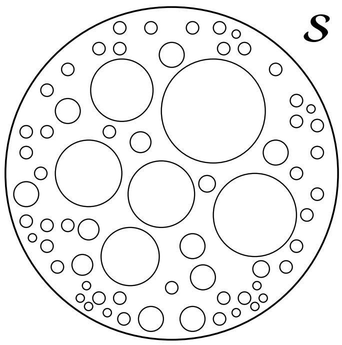

Figura 1: Queso suizo.

Para su construcción, sea $S = \{s_1, s_2, \dots\}$ una sucesión densa en el disco unidad abierto $\varDelta$ y elijamos $\varDelta_j = \varDelta(s_j, r_j) \subset \varDelta$ cuyo centro es el primer elemento de S que no esté contenido en ningún disco previo $\varDelta_k$ para $k < j$ para entonces tomar $r_j > 0$ lo suficientemente pequeño para que $\overline{\varDelta_j}$ sea disjunto con $\overline{\varDelta_k}$ si $k < j$.

Supongamos, además, que para la sucesión de radios así elegida se cumple que $\sum_j r_j^2 < 1$ y sea $\mathcal{S} = \overline{\varDelta} \setminus \bigcup_j \varDelta_j$. $\mathcal{S}$ es compacto con interior vacío (por construcción, $\mathcal{S} \cap \varDelta_j = \varnothing$ para todo j), ya que es cerrado, acotado y S es denso. Si f es cualquier función continua en $\mathcal{S}$, entonces $|\oint_{\partial\varDelta_j} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta| \le 2\pi \|f\|_{\mathcal{S}} r_j$, por lo que la serie $\sum_j \oint_{\partial\varDelta_j} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ converge absolutamente. Por el teorema de Cauchy, $\oint_{\partial\varDelta} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \sum_j \oint_{\partial\varDelta_j} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ si f es racional con polos fuera de $\mathcal{S}$ y, por tanto, también si f es límite uniforme de tales funciones. Pero

$$\oint_{\partial\varDelta_j} \overline{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = \mathrm{i}r_j \int_{-\pi}^{\pi} (\overline{s}_j + r_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}\overline{s}_j r_j \cancelto{0}{\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta} + 2\pi\mathrm{i}r_j^2 = 2\pi\mathrm{i}r_j^2$$

y $\oint_{\partial\varDelta} \overline{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}$. Puesto que $\sum_j r_j^2 < 1$, la función $f(z) = \overline{z}$ no se puede aproximar uniformemente en $\mathcal{S}$ por funciones racionales sin polos en $\mathcal{S}$. Nótese que lo anterior implica que la medida

$$\mathrm{d}\mu(z) \coloneqq \begin{cases} \mathrm{d}z & \text{en } \partial\varDelta, \\ -\,\mathrm{d}z & \text{en } \bigcup_j \partial\varDelta_j \end{cases}$$

es ortogonal al espacio $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ de todas las funciones racionales con polos fuera de $\mathcal{S}$ y, sin embargo, $\mu[\,\overline{z}\,] = 2\pi\mathrm{i}(1 - \sum_j r_j^2) \neq 0$[6].

Observación 13. Que $\mathcal{S}$ también es conexo es consecuencia de un resultado de topología general que establece que la intersección encajada de compactos conexos sigue siendo compacta y conexa. Como $\mathcal{S} = \bigcap_j \overline{\varDelta} \setminus D_k$ con $D_k = \bigcup_{j \le k} \varDelta_j$ y $\overline{\varDelta} \setminus D_k$ es conexo, $\mathcal{S}$ también lo es. La prueba de este resultado topológico va como sigue: si $\{K_j\}_{j\ge1}$ es una familia de compactos conexos encajados ($K_{j+1} \subset K_j$) en un espacio topológico X y U, V son abiertos disjuntos tales que $K = \bigcap_j K_j \subset W = U \cup V$, entonces $\bigcap_j K_j \cap X \setminus W = \varnothing$, que, por compacidad, implica que $\bigcap_{\ell \le m} K_{j_\ell} \cap X \setminus W = \varnothing$ ya que $K_j \cap X \setminus W$ es cerrado para $j \ge 1$. Así, $K_{j_m} \cap X \setminus W = \varnothing$ y, por tanto, $K_{j_m} \subset W = U \cup V$. Puesto que K_{j_m} es conexo y $U \cap V = \varnothing$, se sigue que $K_{j_m} \subset U$ o $K_{j_m} \subset V$. Esto implica que $K \subset K_{j_m} \subset U$ o $K \subset K_{j_m} \subset V$ y K es conexo. Por último, K es compacto ya que es intersección de compactos.

Para $j \ge 1$, los conjuntos $K_j \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : x^2/j^2 + y^2 \ge 1, |y| \le 1\}$ son conexos y encajados pero, sin embargo, $K = \bigcap_j K_j = \{y = \pm 1\}$ no es conexo. Así, en general, la intersección encajada de conexos no es conexa. Esto prueba que, en el resultado anterior, no se puede omitir la hipótesis de compacidad. ◂

[6]La condición $\sum_j r_j^2 < 1$ es necesaria ya que, en caso contrario, $\mathcal{S}$ tendría medida cero y cualquier función continua en $\mathcal{S}$ se podría aproximar uniformemente en $\mathcal{S}$ por funciones racionales [6].

5. Relación entre el problema $\bar\partial$ y el teorema de Runge

Anteriormente hemos visto que el teorema de Runge implica la existencia de soluciones para la ecuación $\bar\partial$. En esta sección veremos que, recíprocamente, la existencia de soluciones para el problema $\bar\partial$ con estimaciones implica el teorema de Runge.

Como antes, consideremos K un subconjunto compacto de un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Resulta interesante que los siguientes problemas[7] son equivalentes.

Problema A ((IV) en el teorema 5). Aproximar uniformemente en K cualquier función holomorfa en un entorno de K por funciones holomorfas en Ω. ◂

Problema H. Dada $f \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $K \cap \operatorname{sop} f = \varnothing$ y $\varepsilon > 0$, encontrar una solución $u \in C^\infty(\Omega)$ de $\partial u/\partial\bar z = f$ tal que $\|u\|_K < \varepsilon$. ◂

Problema A implica problema A. Sea $u_0 \in C^\infty$ cualquier solución de $\partial u_0/\partial \bar z = f$ en Ω (teorema 11). Puesto que $K \cap \operatorname{sop} f = \varnothing$, u_0 es holomorfa en $\Omega \setminus \operatorname{sop} f \supset K$ y, para $\varepsilon > 0$ dado, por hipótesis existirá $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $\|u_0 - h\|_K < \varepsilon$. La función $u := u_0 - h$ satisface que $\partial u/\partial \bar z = f$ y $\|u\|_K < \varepsilon$. ■

Problema H implica problema A. Sean $g \in \mathcal{O}(U)$ holomorfa en algún entorno $U \Subset \Omega$ de K ($K \subset U \subset \overline{U} \subset \Omega$), $\varepsilon > 0$ y consideremos $\chi \in C_c^\infty(U)$ tal que $\chi \equiv 1$ en un entorno de K. Para $f = g\partial\chi/\partial\bar z \in C_c^\infty(\Omega)$ existirá $u \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\partial u/\partial \bar z = f$ y $\|u\|_K < \varepsilon$. Entonces, la función $h := \chi g - u$ es holomorfa en Ω (ya que g es holomorfa en $U \supset \operatorname{sop}\chi$ y, por tanto, $\partial h/\partial\bar z = g\partial\chi/\partial\bar z - \partial u/\partial \bar z = 0$ en Ω) y $\|g - h\|_K = \|u\|_K < \varepsilon$. ■

Observación 14. Como sabemos, si el problema A tiene solución, entonces $\widehat{K}_\Omega = K$ (ver la discusión tras el teorema 5), es decir, cualquier componente de $\Omega \setminus K$ interseca $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Esto se puede ver directamente del problema H: si $a \in \Omega \setminus K$ y $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ es tal que $\chi \equiv 1$ en un entorno de a y $\chi \equiv 0$ en algún entorno de K, entonces, para $\widetilde{K} = K \cup \{a\}$, se tiene que $\widetilde{K} \cap \operatorname{sop} \partial\chi/\partial\bar z = \varnothing$ y, por tanto, si relativo al $\widetilde{K}$ el problema H tiene solución u con dato $f = \partial\chi/\partial\bar z$, entonces $h := \chi - u \in \mathcal{O}(\Omega)$, $|h(a) - 1| < \varepsilon$ y $|h| < \varepsilon$ en K. Así, si $\varepsilon \leq 1/2$, $|h(a)| > 1 - \varepsilon \geq \varepsilon > \|h\|_K$. Puesto que $a \in \Omega \setminus K$ es arbitrario, concluimos que $\widehat{K}_\Omega = K$. ◂

El siguiente es un ejemplo directo (trivial desde el punto de vista del problema A) donde el problema H para $\Omega = \mathbb{C}$ no tiene solución.

Ejemplo 15. Sea $\chi \in C^\infty(\mathbb{C})$ tal que $\operatorname{sop}\chi = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1/2\}$ y $\chi \equiv 1$ para $|z| \geq 3/4$. Tomando $f = z^{-1}\partial\chi/\partial\bar z \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ y $K = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, el problema H no tiene solución. Efectivamente, nótese que $K \cap \operatorname{sop} f = \varnothing$ ya que $\operatorname{sop}\partial\chi/\partial\bar z \subset \{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leq |z| \leq 3/4\}$ y que cualquier solución del problema $\partial u/\partial \bar z = f$ hace que $h = zu - \chi$ sea entera. Pero, por el principio del máximo, tenemos que $1 = |h(0) + 1| \leq \|h + 1\|_{\mathbb{T}} = \|u\|_{\mathbb{T}}$. Esto quiere decir que la solución al problema $\bar\partial$ no se puede elegir arbitrariamente pequeña en $\mathbb{T}$: el problema H no tiene solución si $\varepsilon < 1$. ◂

Tras esta discusión, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 16. *Sea K un subconjunto compacto de un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) *Cualquier función holomorfa en un entorno de K se puede aproximar uniformemente en K por funciones holomorfas en Ω.*

(b) *Para todo $\varepsilon > 0$ y toda función $f \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $K \cap \operatorname{sop} f = \varnothing$ existe una solución $u \in C^\infty(\Omega)$ de la ecuación $\partial u/\partial \bar z = f$ tal que $\|u\|_K < \varepsilon$.*

(c) $\widehat{K}_\Omega = K$.

Es decir, podemos añadir la propiedad (b) a la lista de equivalencias en el teorema 5. La relación entre (b) y (c) está implícita en la observación anterior.

Una forma de abordar el problema H es vía el siguiente teorema de Hörmander, que proporciona soluciones al problema (6) con estimaciones L^2.

[7] Las denominaciones A y H en estos problemas se refieren a *Aproximación* y *Hörmander*, respectivamente.

Teorema 17 (Hörmander [8]). *Sea $\phi \in C^2(\Omega)$ una función subarmónica en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, es decir, $\Delta\phi = 4\partial^2\phi/\partial z\partial\bar{z} \geq 0$ en Ω. Entonces, para toda $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ existe una solución*[8] *$u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ de $\partial u/\partial\bar{z} = f$ tal que*

$$\int_\Omega |u|^2 e^{-\phi}\, dA \leq \int_\Omega \frac{|f|^2}{\Delta\phi} e^{-\phi}\, dA.$$

Así, para probar (b) en el teorema 16, todo lo que hemos de hacer es encontrar «pesos» ϕ adecuados. Sirva el siguiente ejemplo como ilustración.

Ejemplo 18. Sean $r < 1$, $K = \overline{\Delta(0,r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ y $f \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ con $\overline{\Delta} \cap \operatorname{sop} f = \varnothing$, donde $\Delta = \Delta(0,1)$ denota el disco unidad. La función $\phi(z) = \ln(1+|z|^2)$ es estrictamente subarmónica en $\mathbb{C}$, ya que

$$\Delta\phi(z) = 4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}} \ln(1+|z|^2) = 4\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\bar{z}}{1+|z|^2}\right) = \frac{4}{(1+|z|^2)^2} > 0.$$

Por el teorema 17 aplicado a la función $\phi_m = m\phi$ $(m = 1,2,\dots)$, existe una solución $u = u_m \in C^\infty(\mathbb{C})$ de $\partial u/\partial\bar{z} = f$ tal que

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{|u(z)|^2}{(1+|z|^2)^m}\, dA(z) \leq \frac{1}{4m}\int_{\mathbb{C}} \frac{|f(z)|^2}{(1+|z|^2)^{m-2}}\, dA(z) \underset{\overline{\Delta}\cap \operatorname{sop} f = \varnothing}{\underset{\uparrow}{\leq}} \frac{\|f\|_{\mathbb{C}}^2 \, |\operatorname{sop} f|}{m 2^m},$$

donde $|\operatorname{sop} f|$ denota la medida de área de $\operatorname{sop} f$, y, por tanto,

$$\int_\Delta |u(z)|^2\, dA(z) \leq 2^m \int_\Delta \frac{|u(z)|^2}{(1+|z|^2)^m}\, dA(z) \leq 2^m \int_{\mathbb{C}} \frac{|u(z)|^2}{(1+|z|^2)^m}\, dA(z) \leq \frac{\|f\|_{\mathbb{C}}^2\, |\operatorname{sop} f|}{m}.$$

Puesto que u es holomorfa en Δ, por la propiedad del valor medio [5, Chapter III: §4; 10, corolario 2.5] y la desigualdad de Hölder concluimos que

$$\|u\|_K \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\delta}\left(\int_\Delta |u(z)|^2\, dA(z)\right)^{1/2} \leq \frac{\|f\|_{\mathbb{C}}\, |\operatorname{sop} f|^{1/2}}{\delta\sqrt{\pi m}} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

si $\delta = 1 - r > 0$. De hecho, $\|u\|_K < \varepsilon$ tan pronto como

$$m \geq m_\delta(\varepsilon) := \left\lfloor \frac{\|f\|_{\mathbb{C}}^2\, |\operatorname{sop} f|}{\pi\delta^2\varepsilon^2} \right\rfloor + 1.$$

◂

***Observación* 19.** Además, en este ejemplo, como u es holomorfa para $|z|$ suficientemente grande (lo es fuera del soporte de f, que es compacto), tendremos como antes

$$|u(z)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{\Delta(z,1)} |u(w)|\, dA(w) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{\Delta(z,1)} \frac{|u(w)|^2}{(1+|w|^2)^m}\, dA(w)\right)^{1/2}\left(\int_{\Delta(z,1)} (1+|w|^2)^m\, dA(w)\right)^{1/2} \lesssim |z|^m,$$

es decir, u presenta un crecimiento polinómico. Esto implica que la función aproximante $h = u - \chi g$ que se produce en el problema H es un polinomio de grado a lo sumo $m_\delta(\varepsilon)$ (h es entera con crecimiento polinómico ya que coincide con u para $|z|$ suficientemente grande). Nótese, además, que en este caso

$$|\operatorname{sop} f| = \left|\operatorname{sop} \frac{\partial\chi}{\partial\bar{z}}\right| \approx 2\pi\delta$$

y

$$\|f\|_\infty = \left\|g\frac{\partial\chi}{\partial\bar{z}}\right\|_{\mathbb{C}} \approx \|g\|_K \frac{1}{\delta},$$

[8] En sentido débil. En caso de que $f \in C^\infty$, cualquier solución de esta ecuación es automáticamente C^∞.

ya que $\operatorname{sop} \partial\chi/\partial\bar{z} \subsetneq \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$. Por tanto,

$$m_\delta(\varepsilon) \approx \left\lfloor \frac{2\|g\|_K^2}{\delta^3\varepsilon^2} \right\rfloor + 1. \tag{12}$$

Esto proporciona una estimación del grado del polinomio aproximante en términos de los datos relevantes del problema: el error de aproximación ε y el tamaño δ del entorno de K donde la función a aproximar se supone holomorfa. Como cabe esperar, esta estimación permite ver que el grado del polinomio aproximante es «inversamente» proporcional al tamaño del entorno donde la función originalmente es holomorfa. Obsérvese además que, como es natural, la expresión (12) es homogénea de grado cero en (g, ε): si un polinomio p aproxima g en K con error ε, entonces, para $\lambda > 0$, el polinomio λp aproxima λg con error $\lambda\varepsilon$ y sus grados son iguales.

Por otro lado, la estimación (12) en general no es óptima. Por ejemplo, si $|a| > 1$ y queremos aproximar $f(z) = 1/(a - z)$ sobre el disco unidad cerrado, podemos truncar el desarrollo de Taylor de f en el origen. Como

$$f(z) = \frac{1}{a}\frac{1}{1 - z/a} = \frac{1}{a}\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{a^k} + \sum_{k>m} \left(\frac{z}{a}\right)^k\right)$$

y, para $0 \leq \varrho < 1$,

$$\max_{|w|\leq\varrho} \left|\sum_{k>m} w^k\right| = \max_{|w|\leq\varrho} \frac{|w|^{m+1}}{|1 - w|} = \frac{\varrho^{m+1}}{1 - \varrho},$$

con $\varrho = 1/|a|$ se tiene que

$$\|f - p_m\|_{\overline{\Delta}} = \frac{1}{|a|}\frac{1/|a|^{m+1}}{1 - 1/|a|} = \frac{1}{(|a| - 1)|a|^{m+1}},$$

donde $p_m(z) = \sum_{k=0}^{m} z^k/a^{k+1}$. Puesto que en este caso $\delta = |a| - 1$ (f es holomorfa en el disco $\Delta(0, |a|)$), se sigue que el error al aproximar f en el disco cerrado por p_m es $\varepsilon = 1/\delta(1 + \delta)^{m+1}$ y, por tanto,

$$m = \frac{\ln(1/\varepsilon\delta)}{\ln(1 + \delta)} - 1 \approx \frac{1}{\delta}\ln(1/\varepsilon\delta)$$

cuando $\delta \to 0^+$, bastante menor que la estimación $1/\delta^3\varepsilon^2$ dada en (12).

Por otra parte, nótese que en este ejemplo no hemos usado el teorema 17 en toda su generalidad, ya que este permite, de antemano, la elección del peso ϕ. De hecho, con otra elección (adaptada a $\overline{\Delta}$), el teorema 17 proporciona la estimación $m \leq 8\log(1/\varepsilon)/\delta$ [9] (comparar con el teorema 7). Como se puede comprobar, esta estimación es bastante mejor que $m \approx 1/\delta^2\varepsilon$ obtenida anteriormente por truncación. ◂

6. Soluciones localizadas de la ecuación $\bar{\partial}$

Siguiendo la sugerencia planteada en el libro de Andersson [1, Chapter 3], en esta sección probaremos el problema 18 (que proporciona una versión funcional del teorema de Runge) allí propuesto.

Como hemos visto, por el teorema 11, la ecuación $\partial u/\partial\bar{z} = f$ admite soluciones en cualquier abierto del plano. Por otro lado, esta ecuación con dato $f \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ admite soluciones con soporte compacto si y solo si los momentos $\mu_k[f] := \int_{\mathbb{C}} z^k f(z)\,\mathrm{d}A(z) = 0$ para todo $k = 0, 1, \ldots$ [10, sección 1.4.2] (obsérvese que esta condición sobre los momentos equivale a que f sea ortogonal a los polinomios, es decir, a las funciones racionales con polo en el infinito). En tal caso, la demostración del teorema 1.27 en el trabajo de Maciá Medina [10] muestra que la solución (que es necesariamente única) se anula en la componente no acotada del complementario del $\operatorname{sop} f$. Esto significa que $\operatorname{sop} u \subset \widehat{\operatorname{sop} f}$ (la envolvente de holomorfía respecto al plano $\widehat{\operatorname{sop} f} = \widehat{\operatorname{sop} f}_{\mathbb{C}}$). A la vista de esto, una cuestión natural es la siguiente: ¿qué condiciones adicionales hay que exigir a f para que $\operatorname{sop} u \subset \operatorname{sop} f$? Como veremos, la respuesta a esta pregunta, sugerida por la demostración del teorema 12 y que a estas alturas quizás no resulte sorprendente, implica el teorema de Runge (observación 21).

Teorema 20. *Sean $f \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ y $\Lambda \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \operatorname{sop} f$ un conjunto con al menos un punto en cada componente de $\mathbb{C}_\infty \setminus \operatorname{sop} f$. Entonces, la ecuación $\partial u/\partial\bar z = f$ admite una solución con soporte en* $\operatorname{sop} f$ *(*$\operatorname{sop} u \subset \operatorname{sop} f$*) si y solo si $\int_{\mathbb{C}} r(z)f(z)\,\mathrm{d}A(z) = 0$ para toda función racional r con polos en Λ.*

Demostración. La condición es necesaria: si u es una solución de $\partial u/\partial\bar z = f$ con soporte contenido en $\operatorname{sop} f$ y r es cualquier función racional con polos en Λ, por el teorema de Green

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} r(z)f(z)\,\mathrm{d}A(z) &= \int_{\Omega} r(z)\frac{\partial u}{\partial\bar z}(z)\,\mathrm{d}A(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial\bar z}(ru)\,\mathrm{d}\bar z\wedge\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\Omega}\mathrm{d}(ru\,\mathrm{d}z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\partial\Omega} ru\,\mathrm{d}z = 0,\end{aligned}$$

donde Ω es cualquier abierto acotado con frontera C^∞ que contenga $\operatorname{sop} f$ pero no a los polos de r (basta, por ejemplo, considerar un disco lo suficientemente grande que contenga a $\operatorname{sop} f$ al que se eliminan discos centrados en los polos de r suficientemente pequeños para que sean disjuntos entre sí y con $\operatorname{sop} f$).

Recíprocamente, la solución que buscamos debe coincidir con la presentada en el teorema 1.27 del trabajo de Maciá Medina [10], es decir, la dada por (10). Por este teorema, u se anula en la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \operatorname{sop} f$. Si V es cualquier otra componente de $\mathbb{C} \setminus \operatorname{sop} f$, entonces u es holomorfa en V y, si $a \in \Lambda \cap V$,

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{f(w)}{z-w}\,\mathrm{d}A(w) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\Big(\sum_{n\ge 0}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\Big)f(w)\,\mathrm{d}A(w) = \sum_{n\ge 0}\mu_n^a[f](z-a)^n,$$

donde

$$\mu_n^a[f] = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}A(w), \quad n = 0, 1, \dots$$

si $|z-a| < \operatorname{dist}(a, \operatorname{sop} f)/2$. Puesto que la función racional $w \mapsto 1/(w-a)^{n+1}$ tiene polo en $a \in \Lambda$, por hipótesis $\mu_n^a[f] = 0$ para todo $n = 0, 1, \dots$ El principio de identidad implica que $u \equiv 0$ en V ya que, como se ha dicho, $u \in \mathcal{O}(V)$ y V es conexo (nótese el paralelismo de esta demostración con la del teorema 12, donde u juega el papel de h). ■

Observación 21. Si $K \subset \mathbb{C}$ es compacto y μ es una medida compleja soportada en K, la solución del problema $\partial u/\partial\bar z = f$ con dato μ es precisamente la función h que aparece en la demostración del teorema 12. Como se puede comprobar fácilmente, el teorema 20 (con las modificaciones necesarias) sigue siendo válido si el segundo miembro en esta ecuación es una medida (en este caso, la solución u será localmente integrable [10, teorema 1.8]). Así, el teorema 20 implica el de Runge. ◂

Referencias

[1] Andersson, Mats. *Topics in complex analysis.* Universitext: Tracts in Mathematics 3080. Nueva York, US: Springer, 1997. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4042-6.

[2] Bruna, Joaquim y Cufí, Julià. *Complex analysis.* EMS Textbooks in Mathematics. Zúrich, CH: European Mathematical Society, 2013. https://doi.org/10.4171/111.

[3] Fumero Padrón, Melanie. *Aproximación Compleja.* Trabajo de Fin de Grado. Universidad de La Laguna, 2018. url: https://riull.ull.es/xmlui/handle/915/9634.

[4] Gamelin, Theodore W. *Uniform algebras.* Prentice-Hall Series in Modern Analysis. Englewood Cliffs, US: Prentice-Hall, 1969. isbn: 978-0-13-937805-8.

[5] Gamelin, Theodore W. *Complex analysis.* Undergraduate Texts in Mathematics. Nueva York, US: Springer, 2001. https://doi.org/10.1007/978-0-387-21607-2.

[6] Hartogs, F. y Rosenthal, A. «Über Folgen analytischer Funktionen». En: *Mathematische Annalen* 104 (1931), págs. 606-610. issn: 0025-5831. https://doi.org/10.1007/BF01457959.

[7] Hille, Einar. *Analytic function theory.* Introductions to Higher Mathematics. Nueva York, US: Ginn y Company, 1962.

[8] Hörmander, Lars. *An introduction to complex analysis in several variables.* 3.ª ed. North-Holland Mathematical Library 7. Ámsterdam, NL: North-Holland, 1990. isbn: 978-0-444-88446-6.

[9] Lear, Daniel. «A quantitative Runge's theorem in Riemann surfaces». En: *Reports@SCM* 1.1 (2014), págs. 15-32. issn: 2385-4227. https://doi.org/10.2436/20.2002.02.2.

[10] Maciá Medina, Víctor J. *Análisis Complejo: la ecuación $\overline{\partial}$ y funciones armónicas en el plano.* Trabajo de Fin de Grado. Universidad de La Laguna, 2017. url: https://riull.ull.es/xmlui/handle/915/4265.

[11] Roth, Alice. «Approximationseigenschaften und Strahlengrenzwerte meromorpher und ganzer Funktionen». En: *Commentarii Mathematici Helvetici* 11 (1938), págs. 77-125. issn: 0010-2571. https://doi.org/10.1007/BF01199693.

[12] Rudin, Walter. *Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$.* Classics in Mathematics. Berlín, DE: Springer, 1980. https://doi.org/10.1007/978-3-540-68276-9.

[13] Rudin, Walter. *Real and complex analysis.* 3.ª ed. Nueva York, US: McGraw-Hill Book Co., 1987. isbn: 978-0-07-054234-1.