

TEMat

La conjetura de Collatz

✉ Alejandro Gil Asensi^a
Universidad de La Rioja
algila@unirioja.com

Resumen: La conjetura de Collatz, también llamada el problema $3x+1$, el problema de Siracusa, el problema de Kakutani, el algoritmo de Hasse o el problema de Ulam, es uno de los problemas matemáticos sin resolver cuyo enunciado es muy fácil de comprender, pero resulta harto complicado abordar una demostración. Concretamente, esta conjetura afirma que si $C(n)$ es la función de Collatz definida por $C(n) = n/2$ si n es par y por $C(n) = 3n + 1$ si n es impar, entonces tras un número finito de iteraciones de $C(n)$ se llega al valor 1 independientemente del valor entero positivo de partida.

Abstract: The Collatz conjecture, also known as the $3x + 1$ problem, the Syracuse problem, Kakutani's problem, Hasse's algorithm or Ulam's problem, is one of these unsolved mathematical problems which is easily stated but extremely difficult to prove. Specifically, the conjecture asserts that if $C(n)$ is the Collatz function defined as $C(n) = n/2$ if n is even, and $C(n) = 3n + 1$ if n is odd, then $C(n)$ reaches 1 in a finite number of iterations, independently of the starting positive integer.

Palabras clave: Collatz, conjetura de Collatz, conjetura $3x + 1$, problema de Ulam.

MSC2020: 11-37.

Recibido: 20 de marzo de 2021.

Aceptado: 13 de febrero de 2022.

Agradecimientos: Quiero agradecer a mis tutores del Trabajo de Fin de Grado, por animarme a enviar este artículo. Agradezco a la ANEM y a todos los que colaboran en esta revista para incentivar el talento matemático y divulgar las matemáticas.

Referencia: GIL ASENSI, Alejandro. «La conjetura de Collatz». En: *TEMat*, 6 (2022), págs. 65-81. ISSN: 2530-9633. URL: <https://temat.es/articulo/2022-p65>.

^aEl autor estaba afiliado a la Universidad de Alicante cuando se desarrolló la mayor parte del trabajo.

1. La conjetura de Collatz

La conjetura de Collatz, también conocida como problema de Kakutani, conjetura de Ulam, problema de Siracusa o, más genéricamente, como problema $3x + 1$ (o $3n + 1$), es un típico problema matemático fácil de enunciar cuya dificultad reside en ser capaz de demostrar sus implicaciones. El problema consiste en estudiar el comportamiento de las iteraciones de la función de Collatz $C(x)$ (con $x \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$), definida como

$$C(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \equiv 0 \pmod{2}, \\ 3x + 1 & \text{si } x \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

La conjetura está relacionada con las iteraciones de esta función, aunque en la literatura aparece con más frecuencia la función

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \equiv 0 \pmod{2}, \\ \frac{3x + 1}{2} & \text{si } x \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

De tal forma, se ahorra un paso si x es impar. Si se itera en las funciones $C(x)$ y $T(x)$ utilizando, por ejemplo, 6 como semilla, se obtienen las secuencias (6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...) y (6, 3, 5, 8, 4, 2, 1, ...), respectivamente. Se observa que estas secuencias acaban llegando al bucle (1, 4, 2) en el caso de $C(x)$ y (1, 2) en el caso de $T(x)$.

Se va a utilizar la siguiente terminología en relación con las secuencias generadas por estas funciones.

Definición 1 (trayectoria). Se llama trayectoria de $x \in \mathbb{N}$ a $\Omega(x) = (x, T(x), T^2(x), \dots)$. ◀

Definición 2 (ciclo). Se dice que $\Omega(x)$ es un ciclo de longitud k si $T^k(y) = y$ para todo $y \in \Omega(x)$. Al ciclo (1, 2) se le llama ciclo trivial. ◀

Se puede observar que para cada x solo pueden suceder tres cosas:

1. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(x) = 1$. Es decir, *su trayectoria es convergente*.
2. $\Omega(x)$ tiene un *ciclo no trivial* o una *órbita*.
3. $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(x) = +\infty$, o lo que es lo mismo, *su trayectoria es divergente*.

Los conceptos de trayectoria y ciclo se pueden definir tanto para $C(x)$ como para $T(x)$. En el caso de utilizar la función $C(x)$, se llamará ciclo trivial al ciclo (1, 4, 2).

Con esto, podemos formular la conjetura de Collatz, la cual afirma lo siguiente.

Conjetura 3. *Para todo $x \in \mathbb{N}$, existe un entero positivo k tal que $T^k(x) = 1$ y, por ende, toda trayectoria es convergente.*

Normalmente la conjetura de Collatz se formula para todo entero positivo, pero nada impide extender la función $T(x)$ a enteros. Como $T(0) = 0$ y $T(-1) = -1$, aparecen dos nuevos ciclos unipuntuales, pero también aparecen los siguientes: (-5, -7, -10) y (-17, -25, -37, -55, -82, -41, -61, -91, -136, -68, -34). En tal caso, se conjetura que cualquier trayectoria termina por entrar en el ciclo trivial (1, 2) o en alguno de los ciclos anteriores.

Este problema se le atribuye a Lothar Collatz (1910-1990), matemático alemán que realizó importantes aportaciones en análisis funcional, teoría de la aproximación, optimización y ecuaciones diferenciales, entre otros campos. Planteó el problema en la década de 1930, mientras estudiaba el comportamiento de funciones bajo iteraciones. Otros importantes matemáticos como Helmut Hasse (1898-1979), Shizuo Kakutani (1911-2004) o Stanislaw Marcin Ulam (1909-1984) también plantearon, de manera independiente, dicha conjetura y, por ello, figuran como autores en la literatura.

Que el problema lleve casi cien años sin resolverse implica preguntarse por qué la conjetura es tan difícil. Por un lado, cabe destacar que la conjetura no apareció en la literatura hasta los años 70. Por otro lado, el comportamiento bajo iteraciones de este tipo de funciones es muy impredecible. Ejemplo de ello puede verse con los iterados $C^k(27)$ (véase la figura 1).

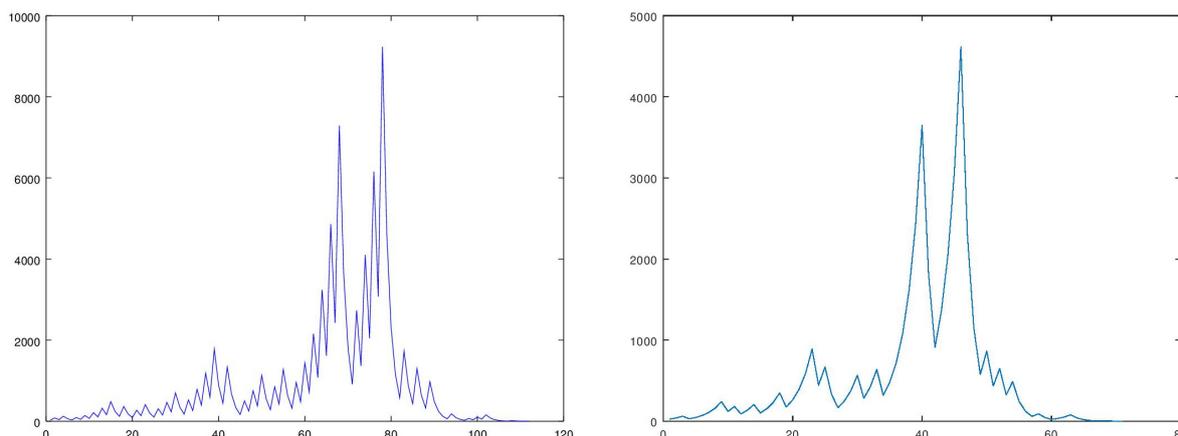


Figura 1: Trayectoria del número 27. A la izquierda, mediante la función $C(x)$ y a la derecha por $T(x)$. Como puede verse, ambas trayectorias tienen una forma parecida a pesar de que la izquierda necesita más pasos para llegar al 1 y, por eso, tiene una forma más punteada. En total, se necesitan 110 pasos con $C(x)$ (i. e., $C^{110}(27) = 1$) y 70 con $T(x)$ (i. e., $T^{70}(27) = 1$). El valor máximo de la trayectoria también es diferente, $C^{77}(27) = 9232$ a la izquierda y $T^{45}(27) = 4616$ a la derecha (justamente la mitad).

Al tratarse de un problema abierto, existen en la literatura diferentes formas de abordarlo. El objetivo a lo largo de este artículo es presentar algunas de las que se han considerado más interesantes y que más se acercan a tener una demostración de la conjetura. En primer lugar, se va a extender el problema a un tipo de funciones más general en la sección 2. En la sección 3 se procederá a presentar conceptos de teoría ergódica y su función junto a cadenas de Markov para el estudio del comportamiento de los iterados módulo m . La sección 4 introduce el concepto de tiempo de parada con la intención de presentar el teorema de Terras, el cual evidencia que la conjetura es cierta para «casi todos» los números (en un sentido de densidad natural que se presentará en la misma sección). Además, se relacionará este resultado con uno mucho más fuerte al que recientemente llegó Terence Tao¹. Finalmente, en la última sección se realizarán algunas reflexiones sobre la dificultad de la conjetura y el estado actual de la misma. También se mencionarán algunos otros avances en otras direcciones diferentes que no se han podido abordar en este artículo. Junto a esto, los lectores podrán consultar la bibliografía para acceder a más información sobre el tema.

2. Generalizaciones del problema $3x + 1$

Antes de que aparecieran, en los años 70, los primeros trabajos relacionados con el denominado problema $3x + 1$, en los años 60 ya se encontraban problemas semejantes. Por ejemplo, el problema al que llegó Murray Klamkin en 1963. Este estaba relacionado con la función $U(n)$ definida como

$$(1) \quad U(n) = \begin{cases} \frac{2n}{3} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{4n-1}{3} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{4n+1}{3} & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases}$$

donde $n \in \mathbb{N}$. El problema consistía en estudiar si los iterados a partir del valor $n = 8$ forman un conjunto infinito o no. Es decir, si la trayectoria de $n = 8$ por la función U es divergente. Este problema continúa sin ser resuelto hasta la fecha, aunque se conjetura que es cierto [10].

¹Terence Tao fue merecedor de la prestigiosa Medalla Fields en 2006, la cual recibió en la vigésima quinta edición del *Congreso Internacional de Matemáticas*, en Madrid [23].

Este hecho sirve para sospechar que la dificultad de la conjetura está muy ligada a la dificultad del estudio de las iteraciones de funciones de esta índole. En esta sección se va a dar una generalización de este tipo de funciones y a estudiar si todas ellas tienen un comportamiento parecido.

2.1. Funciones de Collatz generalizadas

Para generalizar el problema $3x + 1$ se va a recurrir a las llamadas funciones de Collatz generalizadas (véanse las definiciones 4 y 5).

Definición 4 (función admisible). Se dice que una función T es admisible si envía enteros a enteros, es decir, si es de la forma $T: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. ◀

Definición 5 (función de Collatz generalizada). Sea una función admisible T . Si existen un número natural $d \geq 2$ y enteros a_i, b_i , con $i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, tales que

$$(2) \quad T(x) = \frac{a_i x + b_i}{d} \quad \text{si } x \equiv i \pmod{d},$$

entonces se dice que T es una función de Collatz generalizada. ◀

A lo largo de este artículo se mencionarán con frecuencia enteros a_i y b_i con $i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ que siempre se referirán a los que aparecen en la definición anterior.

Proposición 6 (caracterización de admisibilidad). Sea T una función de la forma presentada en (2). Entonces, T es admisible si y solo si $ia_i + b_i \equiv 0 \pmod{d}$ para todo $0 \leq i \leq d-1$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{Z}$ con $x \equiv i \pmod{d}$, de modo que $x - i = kd$ para cierto $k \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{a_i x + b_i}{d} = t \in \mathbb{Z} &\iff a_i(i - i + x) + b_i = dt \\ &\iff ia_i + b_i = dt - (x - i)a_i = dt - dka_i = d(t - ka_i) \\ &\iff ia_i + b_i \equiv 0 \pmod{d}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplos de funciones de Collatz generalizadas son la función $T(x)$ del problema $3x + 1$, cuando se toman coeficientes $d = 2$, $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $a_1 = 3$ y $b_1 = 1$, o la función de Klamkin $U(x)$ (definida en (1)) tomando $d = 3$, $a_0 = 2$, $a_1 = a_2 = 4$, $b_0 = 0$, $b_1 = -1$ y $b_2 = 1$. La admisibilidad de $T(x)$ es fácil de ver mediante la caracterización de admisibilidad, ya que $0a_0 + b_0 = 0 \equiv 0 \pmod{2}$ y $1a_1 + b_1 = 4 \equiv 0 \pmod{2}$. Análogamente se puede comprobar la admisibilidad de $U(x)$.

2.2. Funciones de tipo relativamente primo

Dentro de las funciones generalizadas de Collatz están las llamadas de *tipo relativamente primo*, que han sido objeto especial de estudio.

Definición 7 (función de tipo relativamente primo). Una función generalizada de Collatz se dice que es de tipo relativamente primo si se da que

$$(3) \quad \text{mcd}(a_0 a_1 \cdots a_{d-1}, d) = 1. \quad \blacktriangleleft$$

La función $T(x)$ del problema $3x + 1$ tiene $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $a_1 = 3$ y $b_1 = 1$, luego, como $\text{mcd}(1 \cdot 3, 2) = 1$, pertenece a la familia de funciones de tipo relativamente primo. Sin embargo, para la función de Collatz, $C(x)$, $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $a_1 = 6$ y $b_1 = 2$, luego $\text{mcd}(1 \cdot 6, 2) = 2 \neq 1$ y, por tanto, no pertenece a este tipo.

Por otro lado, en cuanto a la función del problema análogo $5x + 1$ definida como

$$T_5(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \equiv 0 \pmod{2}, \\ \frac{5x + 1}{2} & \text{si } x \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

también es una función de tipo relativamente primo. Sin embargo, parece que el comportamiento de esta función es diferente, ya que se conjetura que existen trayectorias divergentes [10]. Por tanto, todo apunta a que algunas funciones generalizadas de Collatz van a tener trayectorias divergentes y otras no. La siguiente conjetura fue realizada por Matthews y Watts [17, conjeturas (i), (ii) y (iv)]. Indica cuándo va a darse cada casuística.

Conjetura 8 (conjetura sobre los ciclos y las trayectorias divergentes). *En lo referente a las funciones de Collatz generalizadas de tipo relativamente primo, se ha conjeturado lo siguiente.*

- (i) Si $|a_0 a_1 \cdots a_{d-1}| < d^d$, entonces en algún momento todas las trayectorias llegan a un ciclo (y, por tanto, siempre existirá al menos un ciclo).
- (ii) Si $|a_0 a_1 \cdots a_{d-1}| > d^d$, entonces existen trayectorias divergentes.
- (iii) Si la trayectoria $(T^k(n))_{k \geq 0}$, $n \in \mathbb{Z}$, no entra nunca en un ciclo, entonces las iteraciones se distribuyen uniformemente (mód d^α) para todo $\alpha \geq 1$, es decir,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \text{Card}\{k \leq N \mid T^k(n) \equiv j \pmod{d^\alpha}\} = \frac{1}{d^\alpha}, \quad \text{para todo } 0 \leq j \leq d^\alpha - 1,$$

donde $\text{Card}\{\cdot\}$ denota el cardinal del conjunto.

El caso $|a_0 a_1 \cdots a_{d-1}| = d^d$ no hace falta cubrirlo puesto que, por la condición (3), esto nunca puede darse. Esta conjetura va acorde a lo mencionado antes (en el problema $3x + 1$). Se obtiene que $|a_0 a_1| = 3 < 2^2$, luego la conjetura nos dice que todas las trayectorias serán cíclicas en algún momento. En cambio, para la conjetura $5x + 1$ se tiene que $|a_0 a_1| = 5 > 2^2$ y, por tanto, deben existir trayectorias divergentes. También cabe resaltar que esta conjetura no depende de los valores que tengan los b_i . Esta conjetura también parece ser un problema intratable [17].

3. Estudio de los iterados

El estudio de los iterados es interesante para una mayor comprensión del comportamiento de $T(x)$. En esta sección se estudiará no solo cómo poder dar una fórmula para el K -ésimo iterado, sino también cómo estos iterados se distribuyen módulo m . Para ello, resulta muy útil plantear modelos de Markov [16].

Para un x cualquiera, se puede dar una fórmula del K -ésimo iterado, pero es más laboriosa. Consideremos el caso más genérico: el de funciones de Collatz generalizadas definidas en (2). Siguiendo la misma notación anterior, definimos $a_K(x) = a_i$ y $b_K(x) = b_i$ si $T^K(x) \equiv i \pmod{d}$ para $0 \leq i < d$, de tal forma que

$$T^{K+1}(x) = \frac{a_K(x)T^K(x) - b_K(x)}{d}.$$

Teorema 9 (expresión del K -ésimo iterado). *Para una función generalizada de Collatz, $T(x)$, el K -ésimo iterado se puede expresar como*

$$(4) \quad T^K(x) = \frac{a_0(x) \cdots a_{K-1}(x)}{d^K} \left(x - \sum_{i=0}^{K-1} \frac{b_i(x)d^i}{a_0(x) \cdots a_i(x)} \right).$$

Si $T^i(x) \neq 0$ para todo $i \geq 0$, también se verifica que

$$(5) \quad T^K(x) = \frac{a_0(x) \cdots a_{K-1}(x)}{d^K} x \prod_{i=0}^{K-1} \left(1 - \frac{b_i(x)}{a_i(x)T^i(x)} \right).$$

Demostración. Se va a demostrar (4) por inducción. En primer lugar, para el caso $K = 1$, se tiene que

$$T(x) = \frac{a_0(x)}{d} \left(x - \frac{b_0(x)}{a_0(x)} \right) = \frac{a_0(x)x - b_0(x)}{d}.$$

Como $a_0(x) = a_i$ y $b_0(x) = b_i$ si $x \equiv i \pmod{d}$, se llega a que

$$T(x) = \frac{a_i x - b_i}{d} \quad \text{si } x \equiv i \pmod{d}.$$

Ahora, supongamos que se da la igualdad (4) para todo $K \leq N$. Veamos que se cumple para $K = N + 1$. Tenemos que

$$T^{N+1}(x) = T(T^N(x)) = \frac{a_0(T^N(x))}{d} \left(T^N(x) - \frac{b_0(T^N(x))}{a_0(T^N(x))} \right).$$

Se puede ver fácilmente de la definición de $a_i(x)$ y $b_i(x)$ que $a_0(T^k(x)) = a_k(x)$ y $b_0(T^k(x)) = b_k(x)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} T^{N+1}(x) &= \frac{a_k(x)}{d} \left(\frac{a_0(x) \cdots a_{k-1}(x)}{d^k} \left(x - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{b_i(x)d^i}{a_0(x) \cdots a_i(x)} \right) - \frac{b_k(x)}{a_k(x)} \right) \\ &= \frac{a_0(x) \cdots a_{k-1}(x)a_k(x)}{d^{k+1}} \left(x - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{b_i(x)d^i}{a_0(x) \cdots a_i(x)} \right) - \frac{b_k(x)}{d} \\ &= \frac{a_0(x) \cdots a_{k-1}(x)a_k(x)}{d^{k+1}} \left(x - \sum_{i=0}^k \frac{b_i(x)d^i}{a_0(x) \cdots a_i(x)} \right). \end{aligned}$$

Con esto, queda demostrado (4). La demostración de (5) se omite por ser similar. ■

Con el objetivo de conocer mejor las iteraciones, se va a estudiar cómo se comportan los iterados módulo m . La idea es conocer cuánto tiempo permanece la función $T(x)$ en la clase de elementos congruentes con i (mód m). Cuando $m = d$, puede estimarse que

$$(6) \quad T^K(x) \sim \frac{1}{d} \left(\prod_{i=0}^{d-1} a_i^{f_i} \right) x,$$

donde $f_i \in [0, 1]$ es la frecuencia con la que los iterados permanecen en la clase de los elementos congruentes con i (mód d) (a la que en la definición 10 denotaremos como $B(i, d)$). En el teorema 14 se dará la expresión de estas frecuencias límites cuando $T(x)$ sea una función de Collatz de tipo relativamente primo. Por (6), cabe esperar que los iterados $T^K(x)$ crezcan o decrezcan geométricamente en base a estas frecuencias.

A pesar de que los iterados $T^K(x)$ quedan determinados por x , se han empleado en la bibliografía muchas ideas propias de la estadística y la probabilidad. Por ejemplo, se puede considerar la sucesión de los iterados $x, T(x), T^2(x), \dots, T^K(x), \dots$ como un proceso estocástico [16], esto es, una sucesión de variables aleatorias. En nuestro caso, se observa que la clase de congruencia del iterado $T^{K+1}(x)$ solo está determinada por la clase en que está la iteración anterior, $T^K(x)$. Esto corresponde a procesos muy concretos conocidos como cadenas de Markov, los cuales se introducirán más adelante. Por tanto, con el objetivo de estudiar las clases de congruencias módulo m de los iterados para órbitas largas, se construirá, a partir de las cadenas de Markov, lo que se conoce como matriz de transición. Esta matriz aporta mucha información del comportamiento de los iterados cuando $K \rightarrow \infty$.

Definición 10. Definimos la clase j (mód m), donde $j \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, como

$$B(j, m) := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv j \pmod{m}\}. \quad \blacktriangleleft$$

Definición 11 (conjunto ergódico). Diremos que $S \subseteq \mathbb{Z}$ es un conjunto T -invariante módulo m si $T(S) \subseteq S$ y se cumple que $S = B(i_1, m) \cup B(i_2, m) \cup \dots \cup B(i_t, m)$, es decir, que es una unión de t clases de congruencias módulo m . Diremos que S es un conjunto ergódico módulo m si $S \neq \emptyset$ y S es un conjunto T -invariante módulo m minimal. La condición de minimalidad implica que, si existe otro conjunto ergódico módulo m , R , tal que $R \subseteq S$, entonces $R = S$. ◀

El motivo por el que tiene interés estudiar los conjuntos ergódicos módulo m es que la aplicación inversa de una función de Collatz generalizada T , aplicada sobre una clase de congruencias módulo m , resulta ser una unión de clases de congruencias módulo md [3]. Por ejemplo, si T es la función de Collatz del problema $3x + 1$, entonces su aplicación inversa, T^{-1} , satisface que

$$T^{-1}(B(j, m)) = \begin{cases} B(2j, 2m) \cup B\left(\frac{2j-1}{3}\right) & \text{si } m \not\equiv 0 \pmod{3}, \\ B(2j, 2m) & \text{si } m \equiv 0 \pmod{3} \text{ y } j \not\equiv 2 \pmod{3}, \\ B(2j, 2m) \cup B\left(\frac{2j-1}{3}, \frac{2m}{3}\right) & \text{si } m \equiv 0 \pmod{3} \text{ y } j \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

De esta forma, solo es necesario estudiar separadamente los conjuntos tales que $T(S) \subseteq S$ (es decir, los conjuntos ergódicos) para obtener una idea del comportamiento de la función T .

Observación 12. Cada conjunto ergódico módulo m , $S_i^{(m)}$, con $i \geq 1$, tiene intersección vacía con cualquier otro conjunto ergódico. Para verlo, tomemos dos conjuntos ergódicos $S_1^{(m)}$ y $S_2^{(m)}$ diferentes. Como ambos son uniones de clases de congruencias módulo m , la intersección $S_1^{(m)} \cap S_2^{(m)}$ también lo es. Además

$$\begin{aligned} T(S_1^{(m)} \cap S_2^{(m)}) &\subseteq S_1^{(m)}, \\ T(S_1^{(m)} \cap S_2^{(m)}) &\subseteq S_2^{(m)}. \end{aligned}$$

Luego $T(S_1^{(m)} \cap S_2^{(m)}) \subseteq S_1^{(m)} \cap S_2^{(m)}$ y, por tanto, es un conjunto ergódico. Sin embargo, por la condición de minimalidad de $S_1^{(m)}$ y de $S_2^{(m)}$, como $S_1^{(m)} \cap S_2^{(m)} \subseteq S_i^{(m)}$ ($i = 1, 2$), se tiene que

$$S_1^{(m)} = S_1^{(m)} \cap S_2^{(m)} = S_2^{(m)}.$$

Luego los conjuntos ergódicos módulo m son disjuntos. Además, si suponemos que tenemos r de ellos en total, entonces se cumple que

$$\mathbb{Z} = S_0^{(m)} \cup S_1^{(m)} \cup \dots \cup S_r^{(m)},$$

donde $S_1^{(m)}, S_2^{(m)}, \dots, S_r^{(m)}$ son los diferentes conjuntos ergódicos módulo m y $S_0^{(m)}$ es la unión de las clases de congruencias restantes, a veces llamada clases de transición pues representa a aquellas clases que en alguna iteración pueden abandonarla. ◀

Ejemplo 13. Consideremos la función de Collatz $T(x)$ del problema $3x + 1$. Para $m = 2$ solo tenemos las clases de congruencias $B(0, 2)$ y $B(1, 2)$. Para números de la forma $2n$ se tiene que $T(2n) = n$, luego $T(B(0, 2)) = \mathbb{Z}$, así que $T(B(0, 2)) \not\subseteq B(0, 2)$. Por tanto, $B(0, 2)$ no es ergódico por no ser T -invariante. También se puede comprobar que $B(1, 2)$ no es ergódico puesto que $T(B(1, 2)) \not\subseteq B(1, 2)$. Como ni $B(0, 2)$ ni $B(1, 2)$ son ergódicos, el único conjunto que puede serlo es $\mathbb{Z} = B(0, 2) \cup B(1, 2)$.

Consideremos ahora el caso $m = 3$. Las clases de congruencias son $B(0, 3), B(1, 3)$ y $B(2, 3)$. Por tanto, los posibles conjuntos ergódicos serán alguna de estas clases de congruencias, o unión de algunas de ellas. Se puede comprobar que $T(B(i, 3)) \not\subseteq B(i, 3)$ para todo $i \in \{0, 1, 2\}$. Sin embargo, se observa que la unión $S_1^{(3)} = B(1, 3) \cup B(2, 3)$ está formada por los números de la forma $3k + 1$ y $3k + 2$. Estos números pueden tener imágenes $(3k + 1)/2, (3k + 2)/2$ si son pares o $(9k + 4)/2, (9k + 7)/2$ si son impares, que en cualquier caso no son un múltiplo de 3. Luego $T(S_1^{(3)}) \subseteq S_1^{(3)}$ y, por tanto, es un conjunto ergódico (mód 3). Como la intersección de conjuntos ergódicos diferentes tiene que ser vacía, el otro conjunto ergódico posible es $B(0, 3)$, pero no lo es por no ser T -invariante, luego no existe otro conjunto ergódico. Finalmente,

$$\mathbb{Z} = S_0^{(3)} \cup S_1^{(3)},$$

donde $S_0^{(3)} = B(0, 3)$ es el conjunto de clases de transición.

En general, si $3 \nmid m$, el único conjunto ergódico es \mathbb{Z} y, si $3 \mid m$, $\mathbb{Z} - 3\mathbb{Z}$ [3, ejemplo 1.1]. ◀

El siguiente resultado fue obtenido por Matthews y Watts [18] para estimar las frecuencias límites de las clases de congruencias $B(j, m)$.

Teorema 14. Sea $T(x)$ una función de Collatz generalizada de tipo relativamente primo. Sea

$$S = B(i_1, m) \cup B(i_2, m) \cup \dots \cup B(i_t, m)$$

un conjunto ergódico módulo m y llamemos $S' = (B(i_1, m), B(i_2, m), \dots, B(i_t, m))$. Entonces, la frecuencia límite de la componente $B(j, m)$ (con $j \in \{i_1, \dots, i_t\}$) viene dada por

$$(7) \quad \mu_{S'}(B(j, m)) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Card} \{K \leq N \mid T^k(n) \in B(j, m)\}.$$

Se sabe que esto es cierto en el caso de funciones de tipo relativamente primo, pero permanece sin probarse en el resto de casos, aunque hay evidencia computacional que afirma que esto se sigue dando. Un algoritmo para calcular las frecuencias límite puede encontrarse en el trabajo de Leigh [14].

Para estudiar la distribución de los iterados módulo m es útil utilizar procesos de Markov (o cadenas de Markov). Se trata de procesos estocásticos discretos con m posibles estados, E_1, \dots, E_m , en los que la probabilidad de que se dé un estado depende únicamente del estado anterior. En nuestro caso, cada una de las observaciones $T^K(x)$, con $K = 0, 1, 2, \dots$, estará en el estado i si $T^K(x)$ pertenece a $B(i, m)$. La intención es estudiar cuál es la probabilidad de pasar de un estado a otro en cada una de las iteraciones (a la probabilidad de pasar del estado j al estado i la denotaremos por q_{ij}) y así construir una matriz de transición (o matriz de Markov) que nos permitirá estudiar el comportamiento de los iterados en el límite.

Definición 15 (matriz de Markov). Sea $p_{ij}(m)$ el número de clases de congruencias módulo md en el conjunto $T^{-1}(B(i, m)) \cap B(j, m)$ y sea $q_{ij}(m) = p_{ij}(m)/d$. La matriz $m \times m$

$$Q_T(m) = [q_{ij}(m)] = \begin{pmatrix} q_{00}(m) & q_{01}(m) & \cdots & q_{0(m-1)}(m) \\ q_{10}(m) & q_{11}(m) & \cdots & q_{1(m-1)}(m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{(m-1)0}(m) & q_{(m-1)1}(m) & \cdots & q_{(m-1)(m-1)}(m) \end{pmatrix}$$

se llama matriz de Markov. Los q_{ij} representan la probabilidad de transición del estado j al estado i . ◀

Teorema 16. La matriz de Markov $Q_T(m)$ es una matriz estocástica. Esto es, $q_{ij} \geq 0$ para todo $0 \leq i, j \leq m-1$ y los valores de cada columna suman 1 (algunos autores trabajan con filas en vez de columnas).

Demostración. Claramente, $q_{ij} \geq 0$ por definición. Además,

$$B(j, m) = \mathbb{Z} \cap B(j, m) = T^{-1}(\mathbb{Z}) \cap B(j, m) = \bigcup_{i=0}^{m-1} [T^{-1}(B(i, m)) \cap B(j, m)].$$

Por lo tanto, $B(j, m)$ es unión disjunta de $\sum_{i=0}^{m-1} p_{ij}(m)$ clases de congruencias módulo md . Por otro lado, como

$$B(j, m) = \bigcup_{k=0}^{d-1} [B(j + km, md)],$$

se tiene que $B(j, m)$ es unión de d clases de congruencias (mód md). Luego se sigue que $\sum_{i=0}^{m-1} p_{ij}(m) = d$ y, finalmente, $\sum_{i=0}^{m-1} q_{ij}(m) = 1$. ■

Observación 17. Si $d \mid m$, entonces

$$q_{ij}(m) = \begin{cases} \frac{1}{d} & \text{si } T(i) \equiv j \pmod{\frac{m}{d}}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En caso contrario, el cálculo de los $q_{ij}(m)$ resulta complicado de hallar. ◀

Por ejemplo, para $T(x)$ del problema $3x + 1$ y $m = 3$ se tiene que los estados posibles son $B(0, 3)$, $B(1, 3)$ y $B(2, 3)$. Consideremos $\{0, 3, 6, \dots\}$ los elementos de $B(0, 3)$. Entonces,

$$T(\{0, 3, 6, \dots\}) = \{0, 3, 6, \dots\} \cup \{5, 14, 23, \dots\} = B(0, 3) \cup B(5, 9)$$

y, como $B(5, 9) \subset B(2, 3)$, intuitivamente podemos afirmar que el estado $B(0, 3)$ pasa al estado $B(0, 3)$ con probabilidad $1/2$ o al estado $B(2, 3)$ con la misma probabilidad. Esto puede verificarse computacionalmente. Para $B(1, 3)$,

$$T(\{1, 4, 7, \dots\}) = \{2, 5, 8, \dots\} \cup \{2, 11, 20, \dots\} \subset B(2, 3),$$

luego del estado $B(1, 3)$ siempre se pasa al estado $B(2, 3)$. Por último,

$$T(\{2, 5, 8, \dots\}) = \{1, 4, 7, \dots\} \cup \{8, 17, \dots\},$$

luego el estado $B(2, 3)$ pasa al estado $B(1, 3)$ o $B(2, 3)$ con misma probabilidad. Por tanto,

$$Q_T(3) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Hasta ahora se ha trabajado con matrices de transición de un paso (una iteración). El objetivo es conocer la matriz de transición en el límite, es decir, calcular $(Q_T(m))^K$ y hacer $K \rightarrow \infty$.

Teorema 18. Sea p_{Kij} el número de clases de congruencias módulo md^K en $T^{-K}(B(i, m)) \cap B(j, m)$. Entonces,

$$[p_{ij}]^K = [p_{Kij}].$$

Además, se satisface que

$$(Q_T(m))^K = \left[\frac{p_{Kij}}{md^K} \right].$$

Continuando con el ejemplo anterior, para el problema $3x + 1$ y $m = 3$ se tiene que

$$(Q_T(3))^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} \left(1 + \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} \right) - \frac{1}{2^{k+1}} & \frac{1}{3} \left(1 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \right) & \frac{1}{3} \left(1 - \frac{(-1)^k}{2^k} \right) \\ \frac{1}{3} \left(2 - \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} \right) - \frac{1}{2^{k+1}} & \frac{1}{3} \left(2 - \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \right) & \frac{1}{3} \left(2 + \frac{(-1)^k}{2^k} \right) \end{bmatrix},$$

luego cuando $k \rightarrow \infty$

$$(Q_T(3))^k \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Luego el único conjunto ergódico (mód 3) es $S = \mathbb{Z} - 3\mathbb{Z}$, como ya fue mencionado anteriormente. Esto implica el curioso hecho de que, una vez se llega a un número que no es múltiplo de 3, la trayectoria nunca vuelve a pasar por un número múltiplo de 3 [16].

4. Tiempo de parada

La conjetura $3x + 1$ se ha formulado en la literatura de diversas formas como, por ejemplo, la que presentamos como conjetura 3. En esta sección, se va a reformular la conjetura en términos de un concepto muy importante denominado tiempo de parada. Este concepto, junto a otros que se introducen en esta sección, se pueden definir para una función generalizada de Collatz cualquiera. Sin embargo, durante esta sección denotaremos por $T(x)$ a la función de Collatz del problema $3x + 1$.

Definición 19 (tiempo de parada). Se conoce a $\sigma(n)$ como el tiempo de parada de $n \in \mathbb{N}$ y se define como

$$\sigma(n) := \inf\{k \in \mathbb{N} \mid T^k(n) < n\}.$$

Por convenio, se define $\sigma(n) = +\infty$ si ningún entero positivo k verifica que $T^k(n) < n$. ◀

Por ejemplo, para $n = 7$, se tiene la trayectoria $\Omega(7) = (7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1)$. Observamos que $k = 7$ es el menor entero positivo que verifica que $T^7(7) = 5 < 7$. Por tanto, $\sigma(7) = 7$.

Definición 20. Llamaremos

$$S(k) := \{n \mid \sigma(n) < k\}$$

al conjunto de naturales con tiempo de parada inferior a k . ◀

Con esto, se puede redefinir la conjetura en términos de tiempos de parada de la siguiente forma [8].

Conjetura 21. *Cualquier número natural tiene tiempo de parada finito.*

La equivalencia de esta conjetura con la conjetura 3 es evidente. Si todo número $n \in \mathbb{N}$ satisface que $T^i(n) = 1$ para cierto i , necesariamente su tiempo de parada debe ser finito. El recíproco puede comprobarse por inducción. Supongamos que la conjetura 3 es cierta para todo número menor o igual que n . Ahora, como todo número tiene tiempo de parada finito, el número $n + 1$ va a llegar a un número x menor o igual que n en $\sigma(n + 1)$ de iteraciones. Aplicando la hipótesis de inducción a este $x \leq n$, se tiene que existe un entero positivo i tal que $T^i(x) = 1$. Por tanto, $T^{\sigma(n+1)+i}(n + 1) = 1$, terminando así de demostrar la equivalencia de las conjeturas.

En lo relativo a este concepto, el resultado más importante es el teorema de Terras [24] (que se verá en el teorema 37). Este teorema presenta una prueba de que el conjunto de números que satisfacen la conjetura es denso en el sentido de densidad natural, que se define a continuación. También mencionaremos brevemente un resultado similar (véase el teorema 38), pero mucho más potente, al que se ha llegado recientemente.

Definición 22 (densidad asintótica o densidad natural). Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ tiene densidad asintótica α si $\text{Card}(A \cap [1, n])/\text{Card}([1, n]) \rightarrow \alpha$ cuando $n \rightarrow \infty$, donde $[1, n] = \{1, \dots, n\}$. Dicho de otra forma, tiene densidad asintótica α si existe el límite

$$\mathbb{D}(A) := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \text{Card}\{n \in A \mid n \leq x\}$$

y es finito con valor α . ◀

El concepto de densidad asintótica o densidad natural de un conjunto se refiere a la proporción de elementos de ese conjunto en el intervalo $[1, n]$ a medida que este intervalo se hace grande. Los siguientes resultados nos conducirán al teorema de Terras (teorema 37), donde se muestra que el conjunto de elementos con tiempo de parada finito tiene densidad asintótica 1; en otras palabras, se prueba que

$$\mathbb{D}(S(k)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \text{Card}\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x \text{ y } \sigma(n) < k\} \rightarrow 1$$

cuando $k \rightarrow +\infty$. Para probar el teorema de Terras es necesario definir previamente el siguiente concepto.

Definición 23 (vector de paridad). Se define como el vector de paridad de n a $v(n) := (x_0(n), x_1(n), \dots)$, donde, para cada $0 \leq i < \infty$, se tiene $x_i(n) \in \{0, 1\}$ con $x_i(n) \equiv T^i(n) \pmod{2}$. Se define el vector de paridad k -truncado como $v_k(n) := (x_0(n), x_1(n), \dots, x_{k-1}(n))$. ◀

Por ejemplo, observando $\Omega(7)$, tenemos que $v(7) = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \dots)$ y $v_4(7) = (1, 1, 1, 0)$. Similarmente a la representación de los iterados que se dio en el teorema 9, podemos expresar los iterados en función de los vectores de paridad de la siguiente forma.

Teorema 24 (representación de los iterados). *Se satisface la siguiente igualdad para el k -ésimo iterado de n :*

$$T^k(n) = \lambda_k(n)n + \rho_k(n),$$

donde

$$\lambda_k(n) = \frac{3^{x_0(n)+x_1(n)+\dots+x_{k-1}(n)}}{2^k}$$

y

$$\rho_k(n) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i(n) \frac{3^{x_{i+1}(n)+\dots+x_{k-1}(n)}}{2^{k-i}},$$

donde los $x_i(n)$ denotan los elementos del vector de paridad de n .

Demostración. Para $k = 1$ tenemos que $\lambda_1 = 3^{x_0(n)}/2$ y $\rho_1(n) = x_0(n)/2$. Entonces, si n es par, $x_0(n) = 0$ y, en tal caso, $T(n) = n/2$. Si, en cambio, n es impar, se tiene que $x_0(n) = 1$ y, por tanto, $T(n) = (3n + 1)/2$. De esta forma se obtiene la definición de T . Ahora, supongamos que la igualdad es cierta hasta $k - 1$.

Caso 1. $T^{k-1}(n) \equiv x_{k-1}(n) \equiv 0 \pmod{2}$. Entonces,

$$T^k(n) = T(T^{k-1}(n)) = \frac{\lambda_{k-1}(n)n + \rho_{k-1}(n)}{2},$$

y, como $x_{k-1}(n) = 0$, se tiene que

$$\frac{\lambda_{k-1}(n)}{2} = \lambda_k(n)$$

y

$$\frac{\rho_{k-1}(n)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-2} x_i(n) \frac{3^{x_{i+1}(n)+\dots+x_{k-2}(n)}}{2^{k-1-i}} = \sum_{i=0}^{k-1} x_i(n) \frac{3^{x_{i+1}(n)+\dots+x_{k-1}(n)}}{2^{k-i}} = \rho_k(n).$$

Con todo esto, se llega a que

$$T^k(n) = \lambda_k(n)n + \rho_k(n).$$

Caso 2. $T^{k-1}(n) \equiv x_{k-1}(n) \equiv 1$ (mód 2). Entonces,

$$T^k(n) = T(T^{k-1}(n)) = \frac{3\lambda_{k-1}(n)n + 3\rho_{k-1}(n) + 1}{2}.$$

Y ahora, como $x_{k-1}(n) = 1$,

$$\frac{3\lambda_{k-1}}{2} = \lambda_k(n)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{3\rho_{k-1}(n) + 1}{2} &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^{k-2} x_i(n) \frac{3^{x_{i+1}(n)+\dots+x_{k-2}(n)}}{2^{k-1-i}} \right] 3^{x_{k-1}(n)} + \frac{1}{2} \\ &= \sum_{i=0}^{k-2} x_i(n) \frac{3^{x_{i+1}(n)+\dots+x_{k-1}(n)}}{2^{k-i}} + x_{k-1}(n) \frac{1}{2} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} x_i(n) \frac{3^{x_{i+1}(n)+\dots+x_{k-1}(n)}}{2^{k-i}} = \rho_k(n), \end{aligned}$$

y de nuevo se llega a que $T^k(n) = \lambda_k(n)n + \rho_k(n)$. ■

Con esta representación de los iterados se observa que una condición indispensable para que $T^k(n) < n$ se cumpla para cierto k es que $\lambda_k(n) < 1$, debido a que $\rho_k(n)$ nunca es negativo. Este hecho motiva la siguiente definición.

Definición 25 (coeficiente del tiempo de parada). Se llama coeficiente del tiempo de parada, $\omega(n)$, al menor k tal que $\lambda_k(n) < 1$. ◀

Proposición 26. Se cumple que $\omega(n) \leq \sigma(n)$.

Demostración. Si $\sigma(n) = +\infty$, la desigualdad se cumple trivialmente, así que supongamos que $\sigma(n) = k$. Entonces, por el comentario anterior, $\lambda_k(n) < 1$, luego $\omega(n) \leq k = \sigma(n)$. ■

Proposición 27. Se satisface que $T^k(n) < n$ si y solo si $\rho_k(n)/(1 - \lambda_k(n)) < n$.

Demostración. Inmediato por el teorema 24. ■

Teorema 28 (periodicidad). Sea $v_k(n)$ un vector de paridad k -truncado. Entonces, se cumple que $v_k(n) = v_k(m)$ si y solo si $n \equiv m$ (mód 2^k).

Demostración. Supongamos que $v_k(n) = v_k(m)$. Notemos que, en ese caso, $\lambda_k(n) = \lambda_k(m)$ y $\rho_k(n) = \rho_k(m)$. Entonces,

$$T^k(n) - T^k(m) = \lambda(n)(n - m) = \frac{3^{x_0(n)+x_1(n)+\dots+x_{k-1}(n)}}{2^k} (n - m)$$

y, como esta expresión tiene que ser un entero, se debe cumplir que $2^k \mid (n - m)$.

Por otro lado, si $n \equiv m$ (mód 2^k), veamos que se cumple que $x_i(m) = x_i(n)$ para todo $i = 0, 1, \dots, k$. El caso $i = 0$ es inmediato por hipótesis. Supongamos que se cumple hasta j y veamos que se cumple para $j + 1$. Como $x_{j+1}(n) \equiv T^{j+1}(n)$ y tanto en la expresión de $\lambda_{j+1}(n)$ como la de $\rho_{j+1}(n)$ solo aparece hasta el término $x_j(n)$, se tiene que $x_{j+1}(n) - x_{j+1}(m) \equiv T^{j+1}(n) - T^{j+1}(m) = \lambda_{j+1}(n)(n - m) \equiv 0$ (mód 2^k). ■

Cabe destacar que este hecho también implica la periodicidad de las funciones $\lambda_k(n)$ y $\rho_k(n)$. Esta propiedad motiva a definir al conjunto

$$[n : k] := \{m \in \mathbb{N} \mid m \equiv n \pmod{2^k}\}$$

y centrarse en el estudio de los elementos de este conjunto.

Teorema 29. *Supongamos que $\omega(n) = k$ y sea $m \in [n : k]$. Entonces, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq M$ se satisface que $\sigma(m) = k$.*

Demostración. Como $\rho_k(n)$ y $\lambda_k(n)$ son periódicas con periodo 2^k , entonces $t(n) = \rho_k(n)/(1 - \lambda_k(n))$ también lo es. Sea R verificando que $t(n) < n + R2^k$. Entonces, para $r \geq R$ se cumple que

$$t(n + r2^k) = t(n) < n + R2^k \leq n + r2^k,$$

y, por la proposición 27, esto implica que $T^k(n + r2^k) < n + r2^k$. Llamando $m = n + r2^k \geq n + R2^k = M$, se concluye, por tanto, que $\sigma(m) \leq k$. Finalmente, como siempre se verifica que $\sigma(m) \geq \omega(m) = \omega(n) = k$, entonces $\sigma(m) = k$. ■

Definición 30. Se define $P[\omega = k] := \text{Card}\{n \in [1, 2^k] \mid \omega(n) = k\}/2^k$ como la proporción de enteros del intervalo $[1, 2^k]$ con coeficiente de parada igual a k . Análogamente se definen $P[\omega \leq k]$, $P[\omega \geq k]$, $P[\omega < k]$ y $P[\omega > k]$. ◀

Teorema 31. *El límite*

$$F(k) := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \text{Card}\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x \text{ y } \sigma(n) \geq k\}$$

existe y vale $P[\omega \geq k]$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por la periodicidad del coeficiente de parada se satisface que

$$P[\omega = k] = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \text{Card}\{n \leq m \mid \omega(n) = k\}.$$

Por el teorema 29, el conjunto de los números con coeficiente de parada igual a k es igual al de los números con tiempo de parada k salvo, a lo sumo, un conjunto finito de números. Por tanto,

$$P[\omega = k] = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \text{Card}\{n \leq m \mid \sigma(n) = k\}$$

y se sigue que

$$P[\omega \geq k] = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \text{Card}\{n \leq m \mid \sigma(n) \geq k\} = F(k). \quad \blacksquare$$

Se observa que

$$\mathbb{D}(S(k)) = 1 - F(k) = 1 - P[\omega \geq k] = P[\omega < k]$$

cuando $k \rightarrow \infty$. El objetivo de los resultados siguientes es probar que $F(k) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ para concluir que el conjunto $\mathbb{D}(S(k))$ de los números con tiempo de parada finito tiene densidad asintótica 1.

Para hallar $F(k)$ vamos a utilizar que

$$(8) \quad P[\omega \geq k] = \frac{1}{2^k} \text{Card}\{n \in [1, 2^k] \mid \lambda_i(n) > 1 \text{ para todo } 1 \leq i \leq k-1\}.$$

Como $\lambda_i(n) > 1$ para todo $0 \leq i \leq k-1$, se sigue que

$$\begin{aligned} \lambda_i(n) = \frac{3^{x_0(n)+x_1(n)+\dots+x_{i-1}(n)}}{2^i} > 1 &\iff 3^{x_0(n)+x_1(n)+\dots+x_{i-1}(n)} > 2^i \\ &\iff (x_0(n) + x_1(n) + \dots + x_{i-1}(n)) \log(3) > i \log(2) \\ &\iff x_0(n) + x_1(n) + \dots + x_{i-1}(n) > i \frac{\log(2)}{\log(3)}. \end{aligned}$$

Con esto, se observa que una forma posible para hallar $P[\omega \geq k]$ es hallar cuántos vectores $v_i(n)$ de longitud $i \leq k-1$ satisfacen que $\lambda_i(n) > 1$. Por ello, vamos a definir los siguientes conceptos.

Definición 32 (vector admisible). Sea $\gamma = \log(2)/\log(3)$. Un vector $v_k = (v_0, v_1, \dots, v_{k-1})$, con $v_i \in \{0, 1\}$, es admisible si

$$v_0 + v_1 + \dots + v_{i-1} > i\gamma, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq k-1.$$

Si, además, se verifica que

$$v_0 + v_1 + \dots + v_{k-1} > k\gamma,$$

se dice que el vector admisible es activo, y en otro caso se le llama terminal. ◀

Definición 33. Se definen

$$n(a, k) = \begin{cases} \text{número de vectores admisibles de longitud } k \text{ con } a \text{ ceros} & \text{si } a \in [0, k], \\ 0 & \text{si } a \notin [0, k], \end{cases}$$

y

$$c(a, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } a < k(1 - \gamma), \\ 0 & \text{si } a \geq k(1 - \gamma). \end{cases}$$

A $n(a, k)$ se le conoce como el coeficiente binomial modificado. ◀

Se observa que, si a es el número de ceros de un vector v_k de longitud k cuyas componentes toman valores 0 o 1, entonces la condición $a < k(1 - \gamma)$ equivale a $b > k\gamma$, siendo $b = k - a$ el número de unos de v_k . Además, si un vector admisible es terminal, entonces $c(a, k) = 0$ pero $c(a, k - 1) = 1$.

Teorema 34. Se cumple que $P[\omega \geq k] = 2^{-k} \sum_{a=0}^k n(a, k) = F(k)$.

Demostración. Trivial, partiendo de la definición de $n(a, k)$ y de la expresión de $P[\omega \geq k]$ dada en (8). ■

Teorema 35. Sean $n(0, 1) = 0, n(1, 1) = 0$. Entonces, se satisface la recurrencia

$$n(a, k + 1) = c(a, k)n(a, k) + c(a - 1, k)n(a - 1, k).$$

Demostración. Basta observar que $c(a, k)n(a, k)$ denota el número de vectores admisibles y activos de longitud k con a ceros, y análogamente para $c(a - 1, k)n(a - 1, k)$. Si tenemos un vector admisible de longitud $k + 1$ con a ceros, eliminando la última componente, será un vector activo con a o $a - 1$ ceros. Por otro lado, los vectores de longitud k activos pueden extenderse añadiendo una componente a vectores admisibles. ■

Corolario 36. Se tiene que $n(a, k) \leq \binom{k}{a}$.

Demostración. Utilizando el hecho de que $c(a, k)$ es una función booleana, por la fórmula de recursión anterior se tiene que $n(a, k + 1) \leq n(a, k) + n(a - 1, k)$ y ahora se puede probar la desigualdad por inducción simplemente del hecho de que $\binom{k+1}{a} = \binom{k}{a} + \binom{k}{a-1}$. ■

Teorema 37 (Terras, 1976). Se satisface que $\lim_{k \rightarrow \infty} F(k) = 0$.

Demostración. Por el teorema 34 se cumple que

$$P[\omega \geq k] = \sum_{a=0}^k \frac{n(a, k)}{2^k} = F(k).$$

Sea v_k un vector admisible de longitud k y sea a el número de ceros y $b = k - a$ el número de unos. Si v_k es activo, entonces $3^b/2^k > 1$, donde $a < k(1 - \gamma)$. En cambio, si es terminal se tiene que $3^b/2^k < 1$, pero $3^b/2^{k-1} < 1$ y entonces $a < (k - 1)(1 - \gamma)$. Juntando todo se tiene que $n(a, k) = 0$ cuando $a > \lfloor k(1 - \gamma) \rfloor$, y con esto y el corolario 36 se llega a que

$$P[\omega \leq k] = \sum_{a=0}^{\lfloor k(1-\gamma) \rfloor} \frac{n(a, k)}{2^k} \leq \sum_{a=0}^{\lfloor k(1-\gamma) \rfloor} \binom{k}{a} \frac{1}{2^k}.$$

Esta última expresión corresponde a $P[S_k \leq \lfloor k(1 - \gamma) \rfloor]$, donde $S_k \sim \text{Bin}(k, 1/2)$ (es decir, sigue una distribución binomial²) puesto que es la suma de k variables independientes que se distribuyen como una Bernoulli con $p = 1/2$. Entonces, normalizando, se tiene que

$$(9) \quad \sum_{a=0}^{\lfloor k(1-\gamma) \rfloor} \binom{k}{a} \frac{1}{2^k} = P[S_k \leq k(1 - \gamma)] = P\left[\frac{S_k - k/2}{\sqrt{k}/2} \leq \frac{k(1 - \gamma) - k/2}{\sqrt{k}/2} = \sqrt{k}(1 - 2\gamma)\right].$$

Aplicando el teorema central del límite [22] se obtiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P\left[\frac{S_k - k/2}{\sqrt{k}/2} \leq x\right] = \Phi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Dado un $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $\Phi(x) < \varepsilon$ y, como $1 - 2\gamma < 0$, también podemos encontrar un $K > 0$, suficientemente grande, que cumpla que

$$\sqrt{k}(1 - 2\gamma) < x \quad \text{para todo } k \geq K$$

y

$$\frac{S_k - k/2}{\sqrt{k}/2} \leq x \quad \text{para todo } k \geq K.$$

Por lo tanto, finalmente se tiene que

$$P[\omega \leq k] \leq \sum_{a=0}^{\lfloor k(1-\gamma) \rfloor} \binom{k}{a} \frac{1}{2^k} = P\left[\frac{S_k - k/2}{\sqrt{k}/2} \leq \sqrt{k}(1 - 2\gamma)\right] < \varepsilon, \quad \text{para todo } k \geq K,$$

luego

$$F(k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \text{Card}\{n \mid n \leq x \text{ y } \sigma(n) \geq k\} \rightarrow 0$$

cuando $k \rightarrow \infty$. ■

En conclusión,

$$1 - F(k) = D(S(k)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \text{Card}\{n \leq x \mid \sigma(n) < k\}$$

existe y $D(S(k)) \rightarrow 1$ cuando $k \rightarrow \infty$. Esto nos indica de que «casi todos» los enteros positivos (en un sentido de densidad asintótica) cumplen la conjetura de Collatz.

Recientemente se han realizado avances en un sentido similar al resultado anterior. El célebre matemático Terence Tao demostró en 2019 una versión más fuerte del teorema de Terras. En primer lugar, reemplazó el sentido que antes se ha dado al término de «casi todos», aludiendo a la densidad asintótica, por otro basado en la densidad logarítmica. La densidad logarítmica de un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ se define como el siguiente límite (si existe):

$$\delta(A) := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log x} \sum_{\substack{n \in A \\ n \leq x}} \frac{1}{n}.$$

En su artículo, Tao [21] prueba lo siguiente.

Teorema 38 (Terence Tao, 2019). *Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función cualquiera con $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = +\infty$ y sea $C_{\min}(n) = \min\{C^k(n) \mid k \in \mathbb{N}\}$ el valor mínimo de la trayectoria de n mediante la función de Collatz $C(x)$. Entonces, se tiene que*

$$C_{\min}(n) < f(n),$$

para «casi todo» $n \in \mathbb{N}$ (en el sentido de densidad logarítmica).

²Si $X \sim \text{Bin}(n, p)$, entonces la expresión de una binomial $P[X \leq k]$ viene dada por $P[X \leq k] = \sum_{x=0}^k \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$.

5. Conclusiones

En este artículo se ha pretendido presentar algunos de los conceptos más importantes en relación a la conjetura $3x + 1$ y algunos de los resultados parciales más importantes. Otros campos de estudio no han podido tratarse en este artículo. Por tal motivo se proporciona bibliografía a la que el lector con interés en profundizar en este tema pueda acudir si desea conocer más sobre la conjetura.

- Lagarias [8, 10, 12] presenta una introducción al problema $3x + 1$ tratando su contexto histórico y resultados más relevantes. También recopila en su libro *The ultimate challenge: the $3x + 1$ problem* [11] todas las investigaciones más recientes y relevantes que se han realizado sobre la conjetura.
- Varios autores han tratado de estudiar la conjetura hacia atrás mediante el estudio de la función inversa, $T^{-1}(x)$. A esto se le ha llamado árboles de Collatz y para información al respecto es recomendable consultar el artículo de Applegate y Lagarias [1]. En este aspecto, también se ha tratado el problema desde el punto de vista del álgebra mediante el llamado «semigrupo $3x + 1$ » [2] y se ha llegado a resultados interesantes.
- Se ha tratado de estudiar modelos estocásticos que puedan permitir predecir el comportamiento de los iterados, por ejemplo, en el artículo de Lagarias y Weiss [13].
- Evidencia computacional de la conjetura puede verse en el trabajo de Oliveira e Silva [19], donde se ha comprobado la conjetura hasta $20 \times 2^{58} \approx 5,7646 \times 10^{18}$.
- Avances importantes en el estudio de ciclos se han realizado en el trabajo de Eliahou [5], donde el resultado principal demuestra que, si existen ciclos no triviales, estos deben ser de longitud al menos 17 087 915. A pesar de esto, debemos mencionar que no se conoce ninguna prueba de que deba existir un número finito de ciclos, aunque se cree que esto es cierto.
- Otros autores también han extendido la conjetura a otros espacios como \mathbb{Q} [9], \mathbb{R} [7] o incluso \mathbb{C} [15].
- Por último, debemos hacer mención al trabajo de Conway [4] en cuanto a la indecidibilidad de la conjetura.

La conjetura de Collatz es todavía un problema de actualidad. Es interesante tanto para aficionados a las matemáticas como para expertos debido a su sencillez y su dificultad al mismo tiempo. Todavía hay matemáticos que continúan trabajando en ella. Por citar uno de los últimos intentos realizados, Peter Schorer [20] dio a conocer una nueva vía de demostración en septiembre de 2019, pero desgraciadamente se le encontró un error insalvable. El avance más importante, quizás, sea el realizado por Terence Tao en 2019 [21], el cual presentamos en el teorema 38, y parece que establece una nueva conexión de la conjetura con el área de ecuaciones en derivadas parciales [6].

¿Por qué se trata de un problema tan difícil a pesar de que es muy fácil de enunciar? Lagarias [10] reflexiona sobre la complejidad del problema. Por un lado, los iterados tienen un comportamiento «pseudoaleatorio», es decir, aunque estén perfectamente definidos, parecen comportarse aleatoriamente. Esto hace que, como hemos visto, el problema se conecte con teoría ergódica y sistemas dinámicos; resulta, por tanto, difícil de abordar. Destaca, por otro lado, la indecidibilidad del problema. De hecho, el resultado de Conway [4, teorema 1] nos indica que no existe ningún algoritmo con parámetro de entrada la función $T(x)$ y un $n \in \mathbb{N}$ capaz de decidir en un número finito de pasos si existe i tal que $T^i(n) = 1$ o no. Se puede observar que, construyendo un algoritmo que calcule las iteraciones, en el caso de que en algún momento $T^i(n) = 1$, el algoritmo podría devolver «sí». Sin embargo, si algún entero entrara en una trayectoria divergente, nuestro algoritmo no tendría forma de devolver «no».

En cuanto a la dificultad del problema, el prolífico matemático Paul Erdős (1913-1996) decía que «las matemáticas aún no están preparadas para tales problemas» [8].

Referencias

- [1] APPLGATE, David y LAGARIAS, Jeffrey C. «The distribution of $3x + 1$ trees». En: *Experimental Mathematics* 4.3 (1995), págs. 193-209. ISSN: 1058-6458. <https://doi.org/10.1080/10586458.1995.10504321>.

- [2] APPLGATE, David y LAGARIAS, Jeffrey C. «The $3x + 1$ semigroup». En: *Journal of Number Theory* 117.1 (2006), págs. 146-159. ISSN: 0022-314X. <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2005.06.010>.
- [3] BUTTSWORTH, Robert N. y MATTHEWS, Keith R. «On some Markov matrices arising from the generalized Collatz mapping». En: *Acta Arithmetica* 55.1 (1990), págs. 43-57. ISSN: 0065-1036. <https://doi.org/10.4064/aa-55-1-43-57>.
- [4] CONWAY, John Horton. «Unpredictable iterations». En: *The ultimate challenge: the $3x + 1$ problem*. Ed. por Lagarias, Jeffrey C. Providence, US: American Mathematical Society, 2010, págs. 219-224. ISBN: 978-0-8218-4940-8.
- [5] ELIAHOV, Shalom. «The $3x + 1$ problem: new lower bounds on nontrivial cycle lengths». En: *Discrete Mathematics* 118 (1993), págs. 45-56. ISSN: 0012-365X. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(93\)90052-U](https://doi.org/10.1016/0012-365X(93)90052-U).
- [6] HARTNETT, Kevin. «Un gran resultado matemático para un “problema peligroso”». En: *Investigación y ciencia* (18 de dic. de 2019). URL: <https://www.investigacionyciencia.es/noticias/un-gran-resultado-matematico-para-un-problema-peligroso-18125>.
- [7] KONSTADINIDIS, Pavlos. «The real $3x + 1$ problem». En: *Acta Arithmetica* 122 (2004), págs. 35-44. ISSN: 0065-1036. <https://doi.org/10.4064/aa122-1-3>.
- [8] LAGARIAS, Jeffrey C. «The $3x + 1$ problem and its generalizations». En: *The American Mathematical Monthly* 92.1 (1985), págs. 3-23. ISSN: 0002-9890. <https://doi.org/10.2307/2322189>.
- [9] LAGARIAS, Jeffrey C. «The set of rational cycles for the $3x + 1$ problem». En: *Acta Arithmetica* 56.1 (1990), págs. 33-53. ISSN: 0065-1036. <https://doi.org/10.4064/aa-56-1-33-53>.
- [10] LAGARIAS, Jeffrey C. «The $3x + 1$ problem: an overview». En: *The ultimate challenge: the $3x + 1$ problem*. Ed. por Lagarias, Jeffrey C. Providence, US: American Mathematical Society, 2010, págs. 3-30. ISBN: 978-0-8218-4940-8.
- [11] LAGARIAS, Jeffrey C., ed. *The ultimate challenge: the $3x + 1$ problem*. Providence, US: American Mathematical Society, 2010. ISBN: 978-0-8218-4940-8.
- [12] LAGARIAS, Jeffrey C. «Erdős, Klarner, and the $3x + 1$ problem». En: *The American Mathematical Monthly* 123.8 (2016), págs. 753-776. ISSN: 0002-9890. <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.123.8.753>.
- [13] LAGARIAS, Jeffrey C. y WEISS, Alan. «The $3x + 1$ problem: two stochastic models». En: *The Annals of Applied Probability* 2.1 (1992), págs. 229-261. ISSN: 1050-5164. <https://doi.org/10.1214/aop/1177005779>.
- [14] LEIGH, George M. «A Markov process underlying the generalized Syracuse algorithm». En: *Acta Arithmetica* 46.2 (1986), págs. 125-143. ISSN: 0065-1036. <https://doi.org/10.4064/aa-46-2-125-143>.
- [15] LETHERMAN, Simon; SCHLEICHER, Dierk, y WOOD, Reg. «The $3n + l$ -problem and holomorphic dynamics». En: *Experimental Mathematics* 8.3 (1999), págs. 241-251. ISSN: 1058-6458. <https://doi.org/10.1080/10586458.1999.10504402>.
- [16] MATTHEWS, Keith R. «Generalized $3x + 1$ mappings: Markov chains and ergodic theory». En: *The ultimate challenge: the $3x + 1$ problem*. Ed. por Lagarias, Jeffrey C. Providence, US: American Mathematical Society, 2010, págs. 79-104. ISBN: 978-0-8218-4940-8.
- [17] MATTHEWS, Keith R. y WATTS, Anthony M. «A generalization of Hasse’s generalization of the Syracuse algorithm». En: *Acta Arithmetica* 43.2 (1984), págs. 167-175. ISSN: 0065-1036. <https://doi.org/10.4064/aa-43-2-167-175>.
- [18] MATTHEWS, Keith R. y WATTS, Anthony M. «A Markov approach to the generalized Syracuse algorithm». En: *Acta Arithmetica* 45.1 (1985), págs. 29-42. ISSN: 0065-1036. <https://doi.org/10.4064/aa-45-1-29-42>.
- [19] OLIVEIRA E SILVA, Tomás. «Empirical verification of the $3x + 1$ conjecture and related conjectures». En: *The ultimate challenge: the $3x + 1$ problem*. Ed. por Lagarias, Jeffrey C. Providence, US: American Mathematical Society, 2010, págs. 189-207. ISBN: 978-0-8218-4940-8.

-
- [20] SCHORER, Peter. *A solution to the $3x + 1$ problem*. Technical report. Palo Alto, US: Hewlett-Packard Laboratories.
- [21] TAO, Terence. «Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values». En: *arXiv e-prints* (2021). arXiv: 1909.03562v4 [math.PR].
- [22] «Teorema del límite central». En: *Wikipedia*. URL: https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_l%C3%ADmite_central.
- [23] «Terence Tao». En: *Wikipedia*. URL: https://es.wikipedia.org/wiki/Terence_Tao.
- [24] TERRAS, Riho. «A stopping time problem on the positive integers». En: *Acta Arithmetica* 30.3 (1976), págs. 241-252. ISSN: 0065-1036. <https://doi.org/10.4064/aa-30-3-241-252>.