TEMat

Este trabajo colaboró con una microcharla durante el XVII *Encuentro Nacional de Estudiantes de Matemáticas*, celebrado en Barcelona en julio de 2016.

Aritmética y barajas de cartas

Francisco Albuquerque Picado
Universidade de Lisboa
fmapic@gmail.com

Resumen: A partir del siglo XVIII, con la difusión de las barajas de cartas, se han creado trucos y efectos «mágicos» con estos objetos. Con la llegada del siglo XX, las barajas de cartas se convierten en un accesorio habitual, hasta esencial, para los ilusionistas. Uno de los magos de esta época fue Si Stebbins, quien, durante sus espectáculos, divulgó trucos con una ordenación de la baraja de cartas de póquer (52 cartas, 4 palos) que hoy en día recibe su nombre.

En este artículo, se introduce la ordenación de Si Stebbins y se explora otra ordenación que la precede en más de 350 años, presente en un libro del siglo XVII, escrito por el matemático portugués Gaspar Cardozo de Sequeira. Como conclusión, se estudian las matemáticas que hay detrás de cada una de estas ordenaciones, determinando el caso general, aplicable a un conjunto de n objetos.

Abstract: From the 18th century onwards, with the dissemination of playing cards, “magic” tricks and effects have been created using them. In the 20th century, playing cards became a customary accessory, perhaps even essential, for magicians. One of them, during this time, was Si Stebbins, who during his shows performed tricks with a deck of poker playing cards (52 cards, 4 suits) pre-arranged in a specific order which is now named in his honor.

In this article, we expose Si Stebbins’s order and we explore a different arrangement preceding it by more than 350 years, present in a 17th century book written by the Portuguese mathematician Gaspar Cardozo de Sequeira. Concluding the article, we study what mathematical rules allow us to explain how any of both arrangements work in order to have the desired effect, ending with the determination of the general case which is applicable to a set of n objects.

Palabras clave: matemática, matemática recreativa, magia, ilusionismo, álgebra abstracta.

MSC2020: 00A08.

Recibido: 3 de marzo de 2017.
Aceptado: 28 de octubre de 2021.

Agradecimientos: Agradezco a la ANEM por la oportunidad de poder participar con este artículo en *TEMat* y agradezco igualmente a la organización del XVII ENEM por haberme dado a conocer el proyecto y haber aceptado mi charla sobre esta temática.

Por sus sugerencias, agradezco a André Sintra, Anne Elorza Deias, Francisco Clemente García, Joaquim Brugués Mora, Lia Malato Leite, Manuel Cotero, Marta Chmielewska, Pedro J. Freitas y Rui Baptista Moura.

Los agradecimientos finales van para mi familia por su apoyo permanente y para la Associação Ludus que, a través del Circo Matemático, me ha enseñado que la Matemática puede tener una vertiente lúdica y divertida utilizando conceptos fundamentales para cualquier matemático.

Referencia: Albuquerque Picado, Francisco. «Aritmética y barajas de cartas». En: *TEMat*, 6 (2022), págs. 83-96. ISSN: 2530-9633. URL: https://temat.es/articulo/2022-p83.

1. Introducción

«Aquí tengo una baraja de cartas. La voy a cortar y barajar cuantas veces quieras. Cuando estés satisfecho, ¡eliges una carta y yo adivinaré cuál es tu carta, a través del uso de las ondas cosmopsicobiológicas!»

Probablemente, en algún punto de nuestras vidas, ya todos habremos escuchado esta conversación o conversaciones parecidas (tal vez sin las citadas ondas) por parte de un familiar, un amigo u otro. Es normal. La magia atrae a la humanidad desde hace milenios. Existen relatos de un truco utilizando bolas y vasos en el Antiguo Egipto, el cual, casi 5000 años después, sigue teniendo éxito hoy en día. Con el paso del tiempo, esta atracción por la magia llevó a que siempre se buscaran nuevas formas y objetos para nuevos efectos, aparentemente, mágicos. Se han creado trucos con cuerdas, con aros metálicos, con animales vivos, y, por fin, con cartas de juego.

Las cartas se destacan, hoy en día, porque muchos de nosotros no conseguiríamos imaginar la magia sin ellas. Pero lo más curioso es que no sabemos ni cómo fueron inventadas ni la historia de su utilización. Sabemos que llegaron a Europa en el siglo xiv (Alemania, Francia, España) y 200 años después, en 1593, se publicó el primer libro sobre juegos de cartas, llamado *Giocchi di carte bellissimi di regola e di memoria*, de Oratio Galazzo. Le siguió otro libro en 1612 llamado *Thesouro de Prudentes* [7], donde el tercer capítulo está dedicado al ilusionismo y muchos de los efectos descritos utilizan cartas.

En el siglo xix, la magia, hasta entonces solo vista en ferias y eventos privados, pasó a ser parte de actos en grandes salas y auditorios donde se montaron grandes espectáculos llenos de *glamour* y fantasía. A partir del siglo xx, las barajas de cartas se volvieron populares de tal forma que se publicaron y popularizaron innumerables trucos de magia utilizando cartas, popularidad que sigue atrayendo a la gente a este mundo fantástico a día de hoy [3, 4].

2. ¡Orden! ¡Orden en la baraja!

Volvamos a nuestra situación inicial. Un voluntario elige una carta de una baraja de cara hacia abajo, abierta en abanico por un mago. Guarda su carta, no se la enseña a nadie. ¡Pasados unos segundos, el mago consigue adivinar la carta elegida! *¿Cómo lo ha hecho?*

En trucos de magia usando cartas, es común que la baraja esté ordenada de una forma particular. En lenguaje especializado, llamamos *stack* a una ordenación particular de la baraja de cartas. Hay varios tipos de *stacks*, pero el caso que veremos ahora es, simultáneamente, una *full stack*, ya que necesita todas las cartas de la baraja, y una *sequential stack*, porque el conjunto de cartas ordenadas forma una secuencia donde cada carta en la baraja nos informa de cuál es la carta siguiente, formando un ciclo [4].

2.1. Métodos de preparación

Ante todo, para clarificar, estudiaremos ordenaciones solo en *barajas de póquer*. Cada carta tiene dos características que la definen totalmente: su palo y su valor. Para nuestros métodos, querremos tener una secuencia de palos y una secuencia de valores cuya conjugación permita recorrer la baraja entera. Como si la baraja entera fuera un circuito cerrado.

2.2. Si Stebbins

Uno de los grandes magos en popularizar una ordenación de la baraja de cartas para sus trucos fue el mago estadounidense Si Stebbins, fotografiado en la figura 1, en su libro *Card Tricks And The Way They Are Performed* [10].

No se conoce mucho sobre su vida. Sabemos que nació en 1867, fue acróbata y payaso de circo, bajo el nombre artístico *Vino*, pero adoptó el nombre Si Stebbins en 1892. Hizo espectáculos en ferias de muestras, una gira con una empresa de automóviles y también tuvo un espectáculo itinerante con el apoyo de su panadería local. Murió a los 83 años [8].

Figura 1: Si Stebbins.

2.2.1. Método de preparación de Si Stebbins

A continuación, se muestra el método de ordenación de Si Stebbins. Primero explicaremos como ordenar la secuencia de palos, seguidamente la secuencia de valores y, al final, describiremos como conseguir la ordenación de toda la baraja.

En cuanto a la secuencia de palos, a lo largo de nuestra *stack*, los palos se repiten cada cuatro naipes y cambian entre Tréboles [♣], Corazones [♡], Picas [♠] y Rombos [♢], siempre por este orden:

♣ ♡ ♠ ♢ ♣ ♡ ♠ ♢ ♣ ♡ ♠ ♢

A este orden, en lenguaje técnico, los ilusionistas lo llaman el orden «CHaSeD» (*Clubs* [♣], *Hearts* [♡], *Spades* [♠], *Diamonds* [♢]).

En cuanto a la secuencia de valores, los valores describen una progresión aritmética. Al haber 13 cartas por palo, estaremos ordenando los 13 valores de cada una de ellas. O sea, ordenando los números naturales entre 1 y 13. Por convención, asignemos los valores de esta forma:

A	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**J**	**Q**	**K**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Ahora, por tener una progresión aritmética, para describir esta secuencia de valores es suficiente decir que la diferencia de la progresión es 3. Aclarando, al empezar con 1, le sumamos 3 y le sigue el 4, después le sumamos 3 y tenemos el 7, 10 ($7+3$), 13 ($10+3$), 16 ($13+3$)… Aquí paramos porque llegamos a un obstáculo: 16 no estaba en el conjunto a ordenar. Como procedimiento (adelante será explicado), al llegar a un valor más grande que 13, le sustraemos 13 y el resultado será el valor deseado. Por lo tanto, 16 menos 13 es igual a 3 y podemos seguir la secuencia: sumando 3 a 3 llegamos a 6, y así en adelante. En este caso obtenemos la secuencia

1	4	7	10	13	3	6	9	12	2	5	8	11

en la cual nos surgen los 13 valores por orden en un ciclo único. Ahora sustituimos los valores por las cartas correspondientes y obtenemos la siguiente secuencia:

1	4	7	10	13	3	6	9	12	2	5	8	11
A	**4**	**7**	**10**	**K**	**3**	**6**	**9**	**Q**	**2**	**5**	**8**	**J**

Ahora, teniendo una secuencia de palos y una secuencia de valores, solo nos queda emparejarlas término a término y tendremos el orden final de la baraja.

Orden final:

A ♣	4 ♡	7 ♠	10 ♢	K ♣	3 ♡	6 ♠	9 ♢	Q ♣	2 ♡	5 ♠	8 ♢	J ♣
A ♡	4 ♠	7 ♢	10 ♣	K ♡	3 ♠	6 ♢	9 ♣	Q ♡	2 ♠	5 ♢	8 ♣	J ♡
A ♠	4 ♢	7 ♣	10 ♡	K ♠	3 ♢	6 ♣	9 ♡	Q ♠	2 ♢	5 ♣	8 ♡	J ♠
A ♢	4 ♣	7 ♡	10 ♠	K ♢	3 ♣	6 ♡	9 ♠	Q ♢	2 ♣	5 ♡	8 ♠	J ♢

En el caso de que el lector quiera apilar las cartas para poder utilizar la baraja más cómodamente, en este diagrama, una carta está por debajo de otra carta si se encuentra a su izquierda. Es decir, A♣ está por debajo de 4♡, 4♡ está por debajo de 7♠, etc. Al llegar al final de una fila, se pasa a la fila de debajo y las cartas anteriormente apiladas se colocan por debajo de la primera carta de esta nueva fila, empezando a contar a partir de la izquierda.

2.3. Gaspar Cardozo de Sequeira

En 1612, el matemático portugués Gaspar Cardozo de Sequeira publicó el libro *Thesouro de Prudentes* [7], mostrado en la figura 2, considerado uno de los primeros libros en abordar el ilusionismo.

Tampoco se sabe mucho sobre Gaspar Cardozo de Sequeira. Nació en el norte de Portugal, en la villa de Murça [7]. Fue Mestre de Artes por la Universidad de Alcalá (actual Universidad Complutense de Madrid) y fue profesor de Matemática en las ciudades de Lisboa, Coimbra y Porto, habiendo enseñado también en España [5, 6].

La siguiente *stack* aparece en el truco de abertura del capítulo de ilusionismo del libro *Thesouro de Prudentes*.

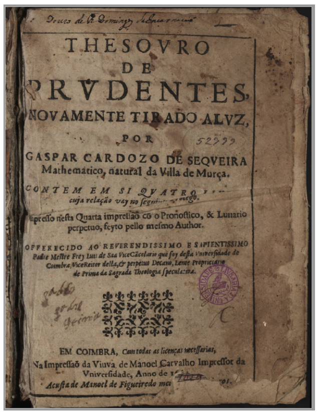

Figura 2: El libro *Thesouro de Prudentes*.

2.3.1. Método de ordenación de Sequeira

El texto original de Sequeira utiliza una baraja de 48 cartas, sin la carta 10. Quitando esta carta de la baraja usual, nos quedamos con la siguiente asignación de valores:

A	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**J**	**Q**	**K**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Para preparar esta *stack*, será más sencillo empezar por la secuencia de valores. En este caso, la diferencia de la progresión aritmética es 5. Empezando con 1, le siguen 6 $(1+5)$, 11 $(6+5)$, 16 $(11+5)$... Una vez más, 16 no aparece en el conjunto de valores considerado. Para seguir con la secuencia, es suficiente sustraer 12 a 16. De este modo, 16 menos 12 es igual a 4, y recomenzamos el procedimiento hasta que todos los valores hayan sido utilizados. En números, tenemos

1	6	11	4	9	2	7	12	5	10	3	8

Esta secuencia se convierte en cartas de la manera siguiente:

1	6	11	4	9	2	7	12	5	10	3	8
A	**6**	**Q**	**4**	**9**	**2**	**7**	**K**	**5**	**J**	**3**	**8**

En el texto original de Sequeira, la secuencia de los cuatro palos es un poco diferente. Empezamos con Tréboles (♣), Diamantes (♢), Picas (♠) y Corazones (♡) y, conforme pasan las cartas, los palos cambian por este orden junto a la secuencia de valores, como en la ordenación de Si Stebbins. Sin embargo, hay un detalle. La única excepción a la regla es que en el paso de la K al 5 no se cambia el palo.

Orden final:

A	6	Q	4	9	2	7	K	5	J	3	8
♣	♢	♠	♡	♣	♢	♠	♡	♡	♣	♢	♠
A	6	Q	4	9	2	7	K	5	J	3	8
♡	♣	♢	♠	♡	♣	♢	♠	♠	♡	♣	♢
A	6	Q	4	9	2	7	K	5	J	3	8
♠	♡	♣	♢	♠	♡	♣	♢	♢	♠	♡	♣
A	6	Q	4	9	2	7	K	5	J	3	8
♢	♠	♡	♣	♢	♠	♡	♣	♣	♢	♠	♡

La forma de apilar las cartas para utilizar la baraja más cómodamente es igual a la forma de apilar las cartas en la ordenación de Stebbins. Podemos poner en práctica nuestras ordenaciones en la próxima sección.

3. Un pequeño truco

El próximo truco se llama *Adivinhação de Sequeira* (Adivinación de Sequeira) y aparece en el libro *Matemagia* [9] de la Associação Ludus.

Efecto:

Un voluntario elige una carta de una baraja de cara hacia abajo, dispuesta en forma de abanico por un mago. Guarda su carta, no la enseña a nadie. ¡Pasados unos segundos, el mago adivina la carta elegida!

Método:

Para poder hacer este truco, es suficiente tener la baraja de cartas preparada usando una de las dos *stacks* que hemos visto arriba.

El mago presenta al voluntario la baraja dispuesta como un abanico (figura 3a). El voluntario retira una carta y el mago corta la baraja en el sitio de la carta elegida, colocando al fondo de la baraja el conjunto de cartas que queda a la derecha de la carta elegida desde la perspectiva del mago (figura 3b).

Observación 1. En la figura 3c, al revés, se enseña la baraja unida nuevamente. La pila azul representa el conjunto de cartas a la derecha de la carta elegida. La pila roja representa las restantes. ◂

¡Así, la carta al fondo de la baraja es la carta anterior a la carta elegida por el voluntario! Al saber cómo se construye la secuencia, sumamos lo que tengamos que sumar al valor de esta carta y pensamos cuál es el palo siguiente, para saber cuál es la carta del voluntario. Se aclara que barajar las cartas puede desordenar la baraja y se debe evitar para que el truco funcione.

Ejemplos:

1. Supongamos que la baraja está ordenada *à la* Si Stebbins: avanzando de 3 en 3 para los valores y ♣, ♡, ♠, ◇ para los palos. Al fondo de la baraja, está un «3♠». Ahora, miramos el valor. Sumamos 3 al valor 3 y nos quedamos con 6. Además, sabemos que ◇ sigue a ♠. Por lo tanto, la carta del voluntario es el 6◇, como aparece en la figura 3d.
2. Supongamos que la baraja está ordenada *à la* Sequeira, es decir, de 5 en 5 para los valores y ♣, ◇, ♠, ♡ para los palos. Al fondo de la baraja, está una «Q♣». Ahora, miramos el valor. La Q vale 11 y sumándole 5 llegamos a 16. 16 es más grande que 12. Sustrayéndole 12, nos quedamos con 4. Este es el valor de la carta elegida. En esta ordenación, el palo de ◇ sigue a ♣. Por lo tanto, la carta elegida es el 4◇.
3. Supongamos que la baraja está ordenada *à la* Sequeira, como en el punto anterior. Al fondo de la baraja, está una «K♠». La K vale 12 y sumándole 5 llegamos a 17. Sustrayéndole 12, nos quedamos con 5. Este es el valor de la carta elegida. En esta ordenación, el palo no cambia en el paso de la K al 5, por lo que seguimos con el palo ♠. Por lo tanto, la carta elegida es el 5♠.

(a) El abanico. **(b)** Carta elegida. **(c)** Baraja completa. **(d)** Carta adivinada.

Figura 3: Distintas fotografías de la baraja.

4. ¿Y las matemáticas? ¡¿Dónde están?!

Ante todo, los siguientes resultados matemáticos se encuentran en cualquier libro introductorio de álgebra abstracta. El texto abajo seguirá el libro *Criptografia e Segurança* de Almeida y Napp [2].

Consideramos $\mathbb{Z}$, el conjunto de los números enteros, y en él definimos dos relaciones binarias que funcionarán como nuestras herramientas más importantes.

Definición 2 (división). Sean $a \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Decimos que «$n$ divide a» si $a = nb$ para cierto $b \in \mathbb{Z}$. Lo denotamos como $n \mid a$. ◂

Para aclarar esta definición, veamos un ejemplo sencillo. Como $15 = 3 \cdot 5$, existe un entero b tal que $15 = 3b$. Por lo tanto, $3 \mid 15$.

Definición 3 (congruencia). Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Decimos que «$a$ es congruente con b módulo n», si $n \mid a - b$. Es decir, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = cn + b$. Lo denotamos como $a \equiv b \pmod{n}$. ◂

Con el fin de clarificar esta definición, volvamos a ver algo que hemos usado sin definirlo cuando presentábamos las ordenaciones:

$$16 = 13 \cdot 1 + 3 \iff 16 \equiv 3 \pmod{13}, \qquad 16 = 12 \cdot 1 + 4 \iff 16 \equiv 4 \pmod{12}.$$

Estos últimos ejemplos nos dan un primer indicio de como explicar las sustracciones. En realidad, correspondían con hacer congruencias módulo 13 (Stebbins) o módulo 12 (Sequeira). Vemos que, en ambos casos, la congruencia nos indica cómo continuar las progresiones aritméticas al llegar a un valor no considerado.

Proposición 4. *Para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, la relación de congruencia módulo n es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$. Las clases de equivalencia de esta relación son las clases de congruencia.*

Definición 5. Dado $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}_n$ es el conjunto formado por las clases de congruencia módulo n, que suelen ser representadas como $\{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$. Sin embargo, es una formulación equivalente y nos será más provechoso considerarlas como $\{\overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n}\}$.

Este conjunto es, de manera natural, un anillo. Definimos la suma y la multiplicación de clases como

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \qquad \text{y} \qquad \overline{a}\,\overline{b} = \overline{ab}.$$ ◂

Con esto presente, veamos dos pequeñas historias. Estas historias sirven como guía visual para lo que se está haciendo con las ordenaciones, así enseñando que hay más aplicaciones que las barajas de cartas.

Primera historia:

Un piso de un museo tiene tres cuartos llenos de esculturas y cuadros. Hay un guardia de seguridad encargado de vigilarlos en turnos de doce horas. Su ronda va de la siguiente forma. En cada cuarto, el vigilante se queda una hora. Empieza en el primer cuarto, sigue al segundo cuarto y acaba en el tercer cuarto. Al acabar su hora en el tercer cuarto, vuelve al primero y todo recomienza. Representamos esta historia con un reloj cuadrangular muy colorido. Definamos que

1. En los cuadrados azules, tenemos las horas en las que el vigilante está vigilando el primer cuarto.
2. En los cuadrados rojos, tenemos las horas en las que el vigilante está observando el segundo cuarto.
3. En los cuadrados naranjas, tenemos las horas en las que el vigilante está guardando el tercer cuarto.

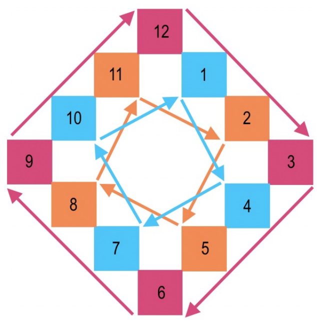

Figura 4: Un reloj cuadrangular esquematizando nuestra historia.

Lo más importante es que *tenemos tres ciclos disjuntos*. Esto es, por ejemplo, hay horas en las que el vigilante nunca está en el segundo cuarto.

Segunda historia:

Supongamos que nos gustan las flores y, entonces, compramos una rosa cada tres días. Representemos los días de la semana con el diagrama numérico de la figura 5.

Además, la florista tiene su tienda abierta todos los días y, por convención, el domingo es el día 1, el lunes es el día 2… y el sábado es el día 7. Las flechas nos indican cuál es la sucesión de días en los que compraremos una rosa.

Ahora vemos que, al comprar una rosa cada tres días, las flechas nos indican solamente un ciclo conexo.

Lo más importante aquí es que *hay un único ciclo disjunto*. Esto es, no hay día de la semana en el que no compremos una flor alguna vez.

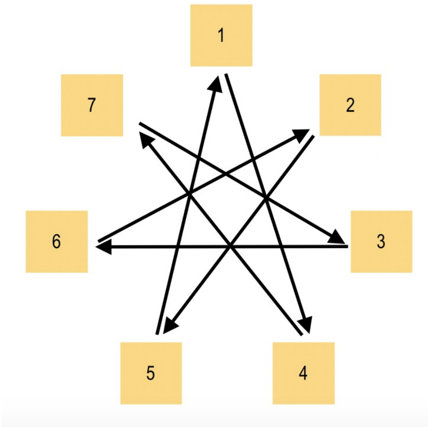

Figura 5: Una representación cíclica de una semana.

Tenemos aquí dos casos cuyos comportamientos distintos se pueden explicar por la teoría de las ecuaciones diofánticas. Empecemos por dos lemas que, al solo servir para demostrar las proposiciones y teoremas que les siguen, también se presentan sin una prueba.

Lema 6 (Bézout). *Sean $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Entonces, existen $u, v \in \mathbb{Z}$ tales que*

$$au + bv = \operatorname{mcd}(a, b).$$

Lema 7 (Euclides). *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Si $\operatorname{mcd}(a, n) = 1$ y $n \mid ab$, entonces $n \mid b$.*

En este punto, ya hemos visto todas las definiciones y resultados introductorios necesarios para entender lo fundamental de este artículo. Podemos, por fin, presentar y demostrar los resultados clave con el fin de explicar las historias y las ordenaciones de las barajas.

Proposición 8. *Sean $a, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $c \in \mathbb{Z}$. La ecuación $ax + ny = c$ es resoluble para $x, y \in \mathbb{Z}$ si y solo si $\operatorname{mcd}(a, n) \mid c$.*

Demostración. Consideremos $S = \{ax + ny : x, y \in \mathbb{Z}\}$ como el conjunto de las combinaciones lineales de a y n. Denotemos $d \coloneqq \operatorname{mcd}(a, n)$.

- ($\Rightarrow$) Por el lema de Bézout (lema 6), d es combinación lineal de a y n; por lo tanto, $d \in S$. De este modo, tomemos $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tales que $ax_0 + ny_0 = d$. Multiplicando esta ecuación por $k \in \mathbb{Z}$, tenemos que $a(kx_0) + n(ky_0) = kd$. Por lo tanto, $kd \in S$, es decir, los múltiplos de d están en S.
- ($\Leftarrow$) Recíprocamente, sea $c \in S$. Entonces, $c = ax + ny$ para ciertos $x, y \in \mathbb{Z}$. Como $d \mid a$ y $d \mid n$, tenemos que $d \mid c = ax + ny$. Por lo tanto, c es múltiplo de d.

Por lo tanto, las combinaciones lineales de a y n corresponden a los múltiplos de $\operatorname{mcd}(a, n)$. ∎

Teorema 9. *Sean $a, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tales que $d = \operatorname{mcd}(a, n)$. Sea $c \in \mathbb{Z}$ tal que $d \mid c$. Tomemos la ecuación $ax + ny = c$, para $x, y \in \mathbb{Z}$. Supongamos que (x_0, y_0) es una solución particular de la ecuación. Entonces, sus soluciones enteras son exactamente*

$$x = x_0 + t\,\frac{n}{d}, \qquad y = y_0 - t\,\frac{a}{d},$$

donde $t \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sean (x_0, y_0) y (x_1, y_1) soluciones enteras de la ecuación $ax + ny = c$. Entonces,

$$(ax_1 + ny_1) - (ax_0 + ny_0) = a(x_1 - x_0) + n(y_1 - y_0) = c - c = 0.$$

Por lo tanto, $a(x_1 - x_0) = -n(y_1 - y_0)$ y se deduce que

$$\frac{a}{d}(x_1 - x_0) = -\frac{n}{d}(y_1 - y_0), \tag{1}$$

de donde se concluye que

$$\frac{n}{d} \mid \frac{a}{d}(x_1 - x_0).$$

Como $\operatorname{mcd}(a/d, n/d) = 1$, por el lema de Euclides (lema 7), $n/d \mid (x_1 - x_0)$. Así que existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(x_1 - x_0) = t\,\frac{n}{d} \iff x_1 = x_0 + t\,\frac{n}{d}.$$

Sustituyendo en la ecuación (1), obtenemos que

$$\frac{a}{d}\left(t\,\frac{n}{d}\right) = -\frac{n}{d}(y_1 - y_0) \iff \left(\frac{a}{d}\,t\right)\frac{n}{d} = -\frac{n}{d}(y_1 - y_0) \iff \frac{a}{d}\,t = -(y_1 - y_0),$$

de lo que se deduce que

$$y_1 = y_0 - t\,\frac{a}{d}.$$

Por lo tanto, cualquier solución (x, y) tiene la forma

$$x = x_0 + t\,\frac{n}{d}, \qquad y = y_0 - t\,\frac{a}{d}.$$ ∎

Los próximos teoremas serán los más importantes. Nuestra idea es reformular los resultados anteriores a modo de puente entre las congruencias y las progresiones aritméticas.

Teorema 10. *Sean $a, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $b \in \mathbb{Z}$. Denotamos $d \coloneqq \operatorname{mcd}(a, n)$.*

1. *La congruencia $ax \equiv b \pmod{n}$ tiene soluciones, para $x \in \mathbb{Z}$, si y solo si $d \mid b$.*
2. *Si $d \mid b$, la solución es única módulo n/d.*

Demostración. Esta demostración seguirá principalmente lo que hemos estado haciendo hasta ahora, pero reformulado en el lenguaje de las congruencias.

1. La ecuación $ax \equiv b \pmod{n}$ tiene solución si y solo si existe $x_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $ax_0 = b + ny_0$, para $y_0 \in \mathbb{Z}$. Por la proposición 8, esto es equivalente a que $d \mid b$, como queremos probar.
2. Supongamos ahora que $ax - ny = b$ es posible y tomemos una solución particular (x_0, y_0). Por el teorema 9, cualquier solución (x, y) es de la forma

   $$x = x_0 + t\,\frac{n}{d}, \qquad y = y_0 - t\,\frac{a}{d}.$$

   Es decir, toda solución x de $ax \equiv b \pmod{n}$ se obtiene como

   $$x = x_0 + t\,\frac{n}{d}.$$

   Como

   $$x_0 + t\,\frac{n}{d} \equiv x_0 \pmod{\frac{n}{d}},$$

   entonces, cualquier solución es congruente con x_0 módulo n/d y la solución es única módulo n/d. ∎

Este corolario, aunque se obtenga de todo lo que hemos deducido hasta ahora, es bastante útil para explicar las mencionadas historias, y también las ordenaciones de la baraja de póquer ya detalladas.

Corolario 11. *Sean $a, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $b \in \mathbb{Z}$. La congruencia $ax \equiv b \pmod{n}$ tiene una solución única módulo n, para $x \in \mathbb{Z}$, si y solo si $\operatorname{mcd}(a, n) = 1$.*

En particular, si $\text{mcd}(a,n) = 1$, $ax \equiv 1 \pmod{n}$ tiene solución y es única módulo n. A esta solución, a^{-1}, que cumple que $aa^{-1} \equiv 1 \pmod{n}$ la llamamos «inverso módulo n» y decimos que a es «invertible». Por ejemplo, $3 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{7}$, por lo que $5 \equiv 3^{-1} \pmod{7}$. El inverso módulo 7 de 3 es 5.

En adelante, relajaremos el formalismo y nos referiremos a las classes $\overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n}$ por los números $1, 2, \dots, n$. Antes de hacer la última conexión, veamos una concreción de este corolario similar a las tablas de las ordenaciones de la baraja. Considerando la congruencia $3x$ módulo 7, tenemos lo siguiente:

x	1	2	3	4	5	6	7
$3x \pmod{7}$	3	6	2	5	1	4	7

Esta correspondencia es inyectiva, *i. e.*, cada imagen de $3x$ solo tiene un argumento que le corresponde. O sea, para todo b elegido, $3x \equiv b \pmod{7}$ tiene solución única. Podemos representar las imágenes en un ciclo como $(3, 6, 2, 5, 1, 4, 7)$ y se puede comprobar que es el mismo ciclo de la figura 5. No obstante, si examinamos la congruencia $3x$ módulo 12, tendremos la tabla siguiente:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$3x \pmod{12}$	3	6	9	12	3	6	9	12	3	6	9	12

Aquí pasan dos cosas indeseadas:

1. No todo valor de $\{1, 2, \dots, 12\}$ es imagen de $3x$. Representando las imágenes en un diagrama, solo se tendrá el ciclo $(3, 6, 9, 12)$, el cual corresponde al ciclo rojo de la figura 4.
2. No hay soluciones únicas: $3 \cdot 3 \equiv 3 \cdot 7 \equiv 9 \pmod{12}$.

En la congruencia $3x \equiv b \pmod{12}$, $\text{mcd}(3, 12) = 3 \neq 1$, por lo que el comportamiento descrito en los dos ítems anteriores queda justificado. Sin embargo, podemos explicar mejor este fenómeno con el próximo teorema, un teorema fundamental para ordenar una secuencia de valores periódicamente, y al cual hemos llamado «teorema de dibujo de estrellas simples». A tal efecto, trabajaremos con $\mathbb{Z}_n$, donde la relación de congruencia introducida antes en $\mathbb{Z}$ se convierte en una relación de igualdad, *i. e.*, en vez de escribir $a \equiv b \pmod{n}$, escribimos $a = b$ en $\mathbb{Z}_n$.

Teorema 12 (dibujo de estrellas simples). *Consideremos $q, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $x \in \mathbb{Z}$. La aplicación $\theta\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $\theta(x) = qx$, es una biyección si y solo si* $\text{mcd}(q, n) = 1$.

Demostración. Sean $q \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\text{mcd}(q, n) = 1$. Queremos ver que θ es una biyección.

Para ver que es inyectiva, sean $c, d \in \mathbb{Z}$ y supongamos $\theta(c) = \theta(d)$. De este modo, $qc = qd$, lo que equivale a que $qc \equiv qd \pmod{n}$. Como $\text{mcd}(q, n) = 1$, la congruencia $qx \equiv 1 \pmod{n}$ tendrá solución única (corolario 11). Sea y_0 ($\not\equiv 0$) esta solución. Multiplicando $qc \equiv qd \pmod{n}$ por y_0 resulta

$$y_0(qc) \equiv y_0(qd) \pmod{n} \iff (y_0 q)c \equiv (y_0 q)d \pmod{n} \iff c \equiv d \pmod{n}.$$

O sea, en $\mathbb{Z}_n$, $c = d$. Por lo tanto, θ es inyectiva. Debido a que el tamaño del dominio es igual al tamaño del codominio, por el principio del palomar, θ será biyectiva.

($\Rightarrow$) Supongamos que θ es una biyección. Queremos ver que $\text{mcd}(q, n) = 1$.

En particular, existe $x \in \mathbb{Z}_n$ tal que $qx = 1$, *i.e.*, $qx \equiv 1 \pmod{n}$. Así, q es invertible y, por lo tanto, $\text{mcd}(q, n) = 1$. ■

A fin de visualizar las implicaciones de este teorema, definimos un objeto inspirado por la teoría de grafos.

Definición 13 (estrella). Consideremos un polígono de n lados. Al unir sus vértices cada q vértices sucesivamente hasta alcanzar el vértice inicial, se obtendrá una **estrella**. Esta será **simple** si recorremos todo vértice antes de regresar al vértice inicial, y **múltiple** en el caso contrario. Independientemente, diremos que q es la fase de la estrella. ◂

Observación 14. Aunque este nombre pueda parecer confuso, ya que *estrella* se refiere a un concepto muy similar en teoría de grafos, veremos que es apropiado por su visualización. ◂

Como el propósito de esta definición es puramente visual y geométrico, consideremos un polígono de ocho lados y, en él, dos estrellas de fases 3 y 2, respectivamente.

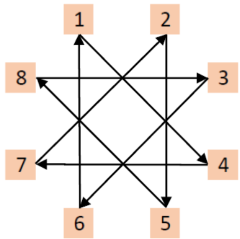

Figura 6: Estrella simple de fase 3.

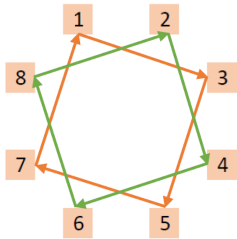

Figura 7: Estrella múltiple de fase 2.

Estos ejemplos muestran que no todas las fases en un conjunto de n puntos generan una estrella simple. En la figura 6, la fase es 3 y nuestra figura nos revela una estrella simple, cosa que no ocurre en la figura 7, en la cual la fase es 2. Así, podemos afirmar algo central que explica el nombre del teorema 12.

Observación 15 (estrellas y aplicaciones). El recorrido de una estrella simple de n puntos y fase q es lo mismo que el trayecto de las imágenes de $\theta\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $\theta(x) = qx$, con θ siendo una aplicación biyectiva. Dados $q \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{Z}_n$, definimos qx como $\overline{q}x$, donde $\overline{q}$ es el representante de q en $\mathbb{Z}_n$. ◂

Con un cálculo rápido, se ve que imágenes sucesivas de θ tendrán diferencia q, como los puntos sucesivos de nuestras estrellas. Igualmente, al ser biyectiva, a cada elemento de $\mathbb{Z}_n$ le asignamos un valor distinto, sin olvidar ningún valor. Esto también ocurre cuando intentamos dibujar una estrella: no queremos olvidar puntos y no queremos que haya más de una flecha saliendo de cada punto.

Observación 16. Utilizando el resultado del teorema 12 y la observación 15, tenemos una estrella simple en la figura 6, porque $\operatorname{mcd}(3, 8) = 1$. Pero, como $\operatorname{mcd}(2, 8) \neq 1$, la estrella de la figura 7 no es simple. ◂

En este momento del artículo, ya tenemos las herramientas para entender por qué en algunos diagramas tenemos solo un ciclo y en otros no. Pero esto no es suficiente para analizar las ordenaciones de las barajas.

Como una carta tiene dos características fundamentales (valor y palo), analizaremos pares de secuencias simultáneamente a lo largo del texto. Así, necesitaremos tener presente un teorema famoso en álgebra abstracta, el teorema del resto chino. A continuación, generalizamos este teorema a módulos no coprimos, al cual hemos llamado «pequeño teorema del resto chino» [1, p. 53-54].

Teorema 17 (del resto chino). *Sean $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ y $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ coprimos dos a dos. Entonces, el sistema de congruencias*

$$\begin{cases} x \equiv a_1 & (\text{mód } n_1), \\ x \equiv a_2 & (\text{mód } n_2), \\ \quad\vdots & \\ x \equiv a_k & (\text{mód } n_k). \end{cases}$$

tiene una solución única módulo $N = n_1 \cdots n_k$.

Teorema 18 (pequeño teorema del resto chino). *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $k, p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Podemos denotar $D \coloneqq \operatorname{mcd}(k, p)$ y $M \coloneqq \operatorname{mcm}(k, p)$. Entonces, si $a \equiv b \pmod{D}$, el sistema de congruencias*

$$S = \begin{cases} x \equiv a & (\text{mód } k), \\ x \equiv b & (\text{mód } p). \end{cases}$$

tiene una solución única módulo M.

Demostración. Supongamos que $a \equiv b \pmod{D}$, es decir, que $D \mid a - b$. Utilizando el lema de Bézout (lema 6), podemos escribir D como combinación lineal de k y p. Para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$D := \operatorname{mcd}(k, p) = k\alpha + p\beta. \tag{2}$$

Multiplicando la ecuación (2) por $\gamma = (a - b)/\operatorname{mcd}(k, p)$, obtenemos que

$$a - b = k(\alpha\gamma) + p(\beta\gamma).$$

Así, construimos x, una solución del sistema S,

$$x = a + k(-\alpha\gamma) = b + p(\beta\gamma).$$

Para comprobar que esta solución es única módulo M, podemos tomar x_0, una solución alternativa del sistema S. De este modo, tenemos que

$$x_0 = a + k\alpha_0 = b + p\beta_0.$$

Por lo tanto, se produce que

$$x - x_0 = k(-\alpha\gamma - \alpha_0) = p(\beta\gamma - \beta_0).$$

Por consiguiente, $x - x_0$ es, simultáneamente, un múltiplo de k y de p. En consecuencia, también será un múltiplo de $\operatorname{mcm}(k, p)$. En conclusión, esta solución es única módulo M. ■

4.1. ¿Y las barajas? ¿Y las historias?

Ahora que sabemos lo que hace falta para tener una biyección, es necesario entender su utilidad. Una biyección en un conjunto finito se llama *permutación* porque su efecto es *reordenar* sus elementos.

Lo que se tiene en la segunda historia es una reordenación. Después de atribuir valor numérico a los días de la semana $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, recorremos sus días según un orden específico y obtenemos la estrella simple $(3, 6, 2, 5, 1, 4, 7)$, como se puede seguir por las flechas en la figura 5.

En las barajas, con nuestras ordenaciones, tenemos una reordenación. Por ejemplo, en la *stack* de Stebbins, después de atribuir valores a las cartas, del ciclo de valores $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)$ pasamos al ciclo de valores $(3, 6, 9, 12, 2, 5, 8, 11, 1, 4, 7, 10, 13)$. Como representa un ciclo, empezando por 1, también puede ser leído como $(1, 4, 7, 10, 13, 3, 6, 9, 12, 2, 5, 8, 11)$ y, volviendo al apartado 2.2.1, podemos comprobar que este ciclo corresponde a los valores en cada línea. Esto se debe al teorema 12, ya que $\operatorname{mcd}(3, 13) = 1$, donde 3 corresponde a la diferencia de la progresión y 13 corresponde a las posiciones. O sea, $\theta : \mathbb{Z}_{13} \to \mathbb{Z}_{13}$, $\theta(x) = 3x$, es una biyección. Estudiando la progresión de Sequeira, el razonamiento es igual: $\operatorname{mcd}(5, 12) = 1$ y, por lo tanto, $\theta : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$, $\theta(x) = 5x$, es una biyección.

Para cada *stack*, para los palos, no es difícil formalizar una secuencia con progresiones aritméticas no repitiendo un palo sin haber pasado por todos los anteriores. Sin pérdida de generalidad, asignemos los valores $(1, 2, 3, 4)$ a los palos (Tréboles [♣], Corazones [♡], Picas [♠], Rombos [♢]), respectivamente. Entonces, en la *stack* de Stebbins, nuestra progresión aritmética será la progresión de diferencia 1 en $\mathbb{Z}_4$ (es decir, $\{1, 2, 3, 4, 1, 2, \dots\}$) y será una biyección ya que $\operatorname{mcd}(1, 4) = 1$. En la *stack* de Sequeira, nuestra progresión aritmética será la progresión de diferencia 3 en $\mathbb{Z}_4$ (es decir, $\{3, 2, 1, 4, 3, 2, \dots\}$), y será una biyección ya que $\operatorname{mcd}(3, 4) = 1$. O sea, siguiendo esto, tendremos una reordenación de cada conjunto de cuatro palos.

Observación 19. Los más atentos ya habréis notado que en esta formulación la secuencia de palos de Sequeira nos da el ciclo $(3, 2, 1, 4)$ en vez de $(1, 4, 3, 2)$ (si hay dudas, basta volver al apartado 2.3.1 y convertir los palos en números). Como se trata de un ciclo, solo hace falta empezar el ciclo por 1. ◂

4.1.1. Casi finalizando…

En lo que respecta a las barajas, hay algo más que añadir. Hemos creado una reordenación de valores y una reordenación de palos independientes entre sí. Lo importante ahora es conjugarlo todo, para entender el motivo de haber recorrido la baraja entera.

Como hemos comentado antes, una carta tiene dos características que la definen totalmente: su valor y su palo. Es decir, podemos ver una carta como un par ordenado $(valor, palo)$, *i. e.*, un elemento de $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_p$, en el que k es el número de valores y p es el número de palos. A cada posición de la baraja le corresponde una carta, y así, en cada posición esperamos ver un elemento de la secuencia de valores y un elemento de la secuencia de palos.

Observación 20. Mediante el contexto, puede ser necesario especificar el módulo de cada secuencia. Así, también denotamos el par ordenado $(valor, palo)$ por $(valor \pmod{k}, palo \pmod{p})$. ◂

Por ejemplo, supongamos que tenemos una baraja ordenada con la *stack* de Si Stebbins y queremos la posición de la carta 7♠. En esta ordenación, nuestra progresión de valores tiene diferencia 3 y nuestra progresión de palos tiene diferencia 1. Tenemos 13 valores por 4 palos. Como par ordenado, esta carta tiene la representación $(7, 3)$, y es un elemento de $\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_4$. Así, para descubrir su posición, utilizando el pequeño teorema del resto chino (teorema 18), es necesario resolver

$$S_0 = \begin{cases} 3 \cdot x \equiv 7 \pmod{13} & [\text{VALORES}], \\ 1 \cdot x \equiv 3 \pmod{4} & [\text{PALOS}]. \end{cases}$$

Esto es equivalente a

$$S_1 = \begin{cases} x \equiv 11 \pmod{13} & [\text{VALORES}], \\ x \equiv 3 \pmod{4} & [\text{PALOS}], \end{cases}$$

ya que $3^{-1} \equiv 9 \pmod{13}$ y $3^{-1} \cdot 7 \equiv 9 \cdot 7 \equiv 11 \pmod{13}$. Aplicando el teorema 18, se ve que

$$x \equiv 11 \pmod{52}.$$

Es decir, presuntamente, la carta en cuestión está en la posición 11. Ahora, si vamos a la tabla del apartado 2.2.1, vemos que eso no es verdad. ¿Que ha pasado?

Cuando conjugamos las progresiones aritméticas de diferencia 3 módulo 13 y de diferencia 1 módulo 4, buscamos pares ordenados $(3x \pmod{13}, x \pmod{4})$. Esto significa que en la primera posición, $x = 1$, tenemos el par ordenado $(3 \pmod{13}, 1 \pmod{4})$ correspondiendo a la carta 3♣. Sin embargo, con la baraja ordenada cara arriba, esta carta está en la octava posición. Esto significa que la *stack* de Stebbins va ocho términos por delante con respecto a las progresiones aritméticas. Así, si sustraemos estos ocho términos, sigue que

$$x - 8 \equiv 11 - 8 \equiv 3 \pmod{52},$$

y así la carta estará en la tercera posición. Podemos comprobar en la tabla del apartado 2.2.1 que la carta 7♠ es la tercera carta en nuestra *stack*.

Aunque podamos calcular la posición de una carta con respecto al principio de la ordenación, lo más importante a tener en cuenta es que *la solución es única en toda la baraja* y lo será independientemente de por dónde empecemos a contar. El teorema 18 aplicado a la baraja de póquer nos dice que cada posición calculada será única módulo $\operatorname{mcm}(13, 4)$, el cual es 52, que es el número de cartas de nuestra baraja.

En el caso de Sequeira, hay un detalle que se explica fácilmente utilizando el teorema 18. A título de ejemplo, consideremos la ordenación de Sequeira, sin hacer la excepción de no cambiar el palo de la K a la 5.

Para simplificar nuestros cálculos y no tener que sustraer términos, empezamos la secuencia de Sequeira con la carta 5♠, la cual está en la primera posición $(x = 1)$ entre los pares $(5x \pmod{12}, 3x \pmod{4})$.

VALORES	5	10	3	8	A	6	Q	4	9	2	7	K
(en $\mathbb{Z}_{12}$)	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	12
PALOS	♠	♡	♣	◇	♠	♡	♣	◇	♠	♡	♣	◇
(en $\mathbb{Z}_4$)	3	2	1	4	3	2	1	4	3	2	1	4

¿Cual es la 13.ª carta? El próximo término de la secuencia de los valores es 5, el próximo término de la secuencia de los palos es 3. Pero esto corresponde a la carta inicial, y aún no hemos visto la baraja entera. ¿Qué pasa aquí?

Si queremos calcular la posición de una carta en esta ordenación similar a la ordenación de Sequeira, utilizamos la técnica anterior. Supongamos que queremos calcular la posición de la carta 5♠. En la ordenación de Sequeira, la progresión de valores tiene diferencia 5 y la progresión de los palos tiene diferencia 3. La carta deseada tiene la representación $(5,3)$ como un par ordenado de $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_4$.

Calculamos su posición resolviendo el sistema

$$S_2 = \begin{cases} 5x \equiv 5 \pmod{12} & [\textsc{valores}], \\ 3x \equiv 3 \pmod{4} & [\textsc{palos}]. \end{cases}$$

Después de manipulaciones algebraicas, podemos aplicar el teorema 18 y vemos que

$$x \equiv 1 \pmod{12}.$$

Nuestra carta se encuentra en la primera posición, pero la solución es única módulo $\operatorname{mcm}(12,4)$, el cual es 12. Es decir, la decimotercera carta será igual a la primera, porque $13 \equiv 1 \pmod{12}$, como hemos comprobado. No obstante, nuestra baraja tiene 48 cartas. Esta secuencia de cartas no recorre la baraja entera. Por esta razón, Sequeira necesitó el paso artificial de eliminar cuatro cambios de palo.

Antes de nuestro último teorema, es necesario mencionar que, en los sistemas de congruencias estudiados, cada congruencia es posible y tiene solución única, debido a los teoremas 11 y 12.

El lema siguiente es un resultado intermedio para ayudar a entender en qué circunstancias no tendríamos el problema de Sequeira.

Lema 21. *Sean $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Entonces,*

$$\operatorname{mcm}(a,b)\operatorname{mcd}(a,b) = ab.$$

Para nuestro trabajo, la posición de cada carta tiene que ser única en toda la baraja. Es decir, queremos que las secuencias de valores y palos solo recomiencen simultáneamente en el final de la baraja. O sea, hace falta que el mínimo común múltiplo del número de elementos en cada secuencia sea igual al número de cartas de la baraja. Por el lema 21, esto solo pasa si

$$\operatorname{mcm}(k,p) = kp \iff \operatorname{mcd}(k,p) = 1.$$

En resumen, para que sepamos cómo ordenar una baraja como Si Stebbins o Gaspar Cardozo de Sequeira, presentamos el último teorema cuya demostración se deducirá de todo lo que hemos visto hasta ahora.

Teorema 22 (teorema de ordenación de barajas). *Sean $k, p, d, d' \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Consideremos una baraja con p palos distintos de k valores distintos cada uno (o sea, de kp cartas distintas).*

- *Podemos ordenar los valores en progresión aritmética de diferencia d cuando* $\operatorname{mcd}(k,d) = 1$, *y*
- *podemos ordenar los palos en progresión aritmética de diferencia d' cuando* $\operatorname{mcd}(p,d') = 1$.

La secuencia de cartas recorrerá la baraja completamente cuando $\operatorname{mcd}(k,p) = 1$.

Observación 23 (nota personal). Las características y dificultades de la ordenación de Sequeira son importantes hoy en día. La baraja española viene en 40 (10 valores por palo) o 48 cartas (12 valores por palo). Si consideramos una baraja con 4 palos y nuestra regla es solamente alternar el palo a cada carta como en la *stack* de Stebbins, tendremos el mismo problema. En caso de que consideremos 10 valores por palo, tenemos que $\operatorname{mcd}(4,10) = 2$ y, por lo tanto, $\operatorname{mcm}(4,10) = 20 < 40$. Y al considerar 12 valores por palo, volvemos al problema de Sequeira. ◂

Con el último teorema, el teorema de ordenación de barajas, podemos generalizar las preparaciones al respecto del número de cartas, periodo entre cartas y palos, valores a ordenar... ¡Podéis crear incluso las vuestras! Además, este truco puede hacerse con cualquier baraja de cartas. Solo hay que asignar valores adecuadamente a las cartas.

Observación 24. Generalizando el teorema del resto chino (teorema 17) de forma semejante al teorema 18, se pueden incluso contemplar barajas con más que las dos características de valor y palo. Adaptando el teorema de ordenación de barajas, se pueden encontrar más criterios para ordenar estas nuevas barajas. ◂

5. Conclusiones

En conclusión, es importante destacar que aún faltaban casi 200 años para que Gauss publicara su obra *Disquisitiones Arithmeticae* donde se empezó a estudiar con rigor los fundamentos de la teoría de números, la cual explica todo lo que hemos visto en este artículo. Sin embargo, el tema ya era utilizado comúnmente para maravillar a otros.

En este artículo, al tener el ejemplo de dos *stacks*, hemos podido utilizar su «mecanismo base» matemático para entenderlas mejor e incluso generalizarlas. Lo bueno de las matemáticas es que cada teorema, proposición o creación de base matemática trae consigo nuevas cuestiones, nuevos retos: la búsqueda del conocimiento se presenta fructífera.

Nuestro teorema central nos permite tomar cualquier baraja existente y, asignando valores a las cartas, ordenarlas utilizando cada carta en una secuencia única. Esto nos servirá comenzando por poder estudiar y comprender ordenaciones existentes y sus trucos asociados hasta crear nuevas ordenaciones, pensar en nuevas barajas, adaptar trucos existentes e incluso inventar nuevos.

Pero también nos enseña lo que necesitamos para poder dibujar estrellas simples. Esto puede ser útil para cuando se está aburrido. La imaginación no tiene límites, y todo se debe a ver secuencias desde un punto de vista más elevado.

Esta es la importancia de la matemática recreativa: sencillamente, del mismo modo puede motivar a alguien a ser un matemático (es suficiente pensar en el efecto de la columna editorial de Martin Gardner, *Mathematical Games*, en el siglo xx), como puede ayudarnos a visualizar algo que no nos parece trivial, o incluso puede ocultar el próximo teorema a revolucionar el mundo.

Al final, solo nos queda jugar y aprender.

Referencias

[1] Albuquerque Picado, Francisco. *Formas Quadráticas e Testes de Primalidade em "Disquisitiones Arithmeticae"*. Tese de mestrado. Universidade de Lisboa, 2021. url: http://hdl.handle.net/10451/48855.

[2] Almeida, Paulo J. y Napp, Diego. *Criptografia e Segurança*. Engebook. Oporto, PT: Publindústria, Edições Técnicas, 2017. isbn: 978-989-723-210-7.

[3] Bridger, Darren. *The history of magic and the mind*. 10 de abr. de 2010. url: http://www.darrenbridger.net/articles/the-history-of-magic-and-the-mind/.

[4] Dyment, Doug. «An Introduction to Full-Deck Stacks». En: *The Deceptionary*. url: http://www.deceptionary.com/aboutstacks.html (visitado 12-01-2020).

[5] «Gaspar Cardoso de Sequeira». En: *Wikipedia*. url: https://pt.wikipedia.org/wiki/Gaspar_Cardoso_de_Sequeira (visitado 20-01-2020).

[6] Santos, José Carlos. «A Ilusão Portuguesa». En: *Gazeta de Matemática* 158 (2009), págs. 30-31. url: http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=248 (visitado 25-01-2020).

[7] Sequeira, Gaspar Cardozo de. *Thesouro de Prudentes*. Coimbra, PT: Na impressaõ da viuva de Manoel de Carvalho, 1664. url: https://digitalis.uc.pt/pt-pt/fundo_antigo/thesouro_de_prudentes (visitado 20-02-2020).

[8] «Si Stebbins». En: *Magicpedia*. url: http://www.geniimagazine.com/wiki/index.php/Si_Stebbins (visitado 28-01-2020).

[9] Silva, Alexandre; Freitas, Pedro; Silva, Jorge Nuno, y Hirth, Tiago. *Matemagia*. Con pról. de Viana, José Paulo. 2.ª ed. Lisboa, PT: Associação Ludus, 2017. isbn: 978-989-99506-3-4.

[10] Stebbins, Si (pseud.) *Card Tricks and the Way they are Performed*. Ca. 1898. url: http://www.deceptionary.com/ftp/SStebbins.pdf (visitado 28-01-2020).