TEMat

La conjetura de Andrews-Curtis

Alba Sendón Blanco[a]
Vrije Universiteit Amsterdam
albadevilar@gmail.com

Resumen: La conjetura de Andrews-Curtis fue propuesta por James J. Andrews y Morton L. Curtis en 1965, es originalmente algebraica y afirma que toda presentación balanceada del grupo trivial puede convertirse (a través de transformaciones de Andrews-Curtis) en la presentación trivial.

Nuestro objetivo es mostrar dos versiones diferentes de la conjetura de Andrews-Curtis, ambas con un enfoque topológico: una para complejos simpliciales finitos y otra para posets finitos. Además, estableceremos la equivalencia entre ellas.

Abstract: The Andrews-Curtis conjecture was proposed by James J. Andrews and Morton L. Curtis in 1965, is originally algebraic and states that every balanced presentation of the trivial group can become (through Andrews-Curtis transformations) the trivial presentation.

Our aim is to show two different versions of the Andrews-Curtis conjecture, both of them from a topological point of view: one for finite simplicial complexes and another one for finite posets. Furthermore, we will establish the equivalence between them.

Palabras clave: conjetura de Andrews-Curtis, espacios topológicos finitos, posets finitos, complejos simpliciales finitos, tipo de homotopía simple.

MSC2020: 57Q10.

Recibido: 1 de abril de 2022.
Aceptado: 15 de marzo de 2023.

Agradecimientos: Me gustaría darle las gracias a mi tutor y a mi cotutor del Trabajo de Fin de Grado, Enrique Macías Virgós y David Mosquera Lois, por haberme aguantado tantísimo el último año de carrera y seguir aún haciéndolo ahora. Y por supuesto, también a mi familia y amigos (tanto amantes como enemigos de las matemáticas) por aguantarme tantísimo siempre.

Referencia: Sendón Blanco, Alba. «La conjetura de Andrews-Curtis». En: *TEMat*, 7 (2023), págs. 1-16. ISSN: 2530-9633. URL: https://temat.es/articulo/2023-p1.

[a]La autora se encontraba afiliada a la Universidade de Santiago de Compostela durante la realización de este artículo.

1. Introducción

Este artículo es un extracto del Trabajo de Fin de Grado de la autora [6], el cual trata sobre la conjetura de Andrews-Curtis. Se llama así a una suposición formulada por los matemáticos americanos James J. Andrews y Morton L. Curtis en el artículo «Free groups and handlebodies» [1], inicialmente algebraica, que afirma lo siguiente:

Conjetura 1 (Andrews-Curtis, versión algebraica). *Toda presentación balanceada del grupo trivial puede convertirse (a través de transformaciones de Andrews-Curtis) en la presentación trivial.*

El grupo (véase la definición 49) trivial es aquel con un solo elemento (el neutro). Cualquier grupo puede darse como una presentación $G = \langle S \mid R \rangle = F(S)/\langle R \rangle_N$, siendo S un conjunto (de generadores), $R \subseteq F(S)$ un subconjunto del grupo libre generado por S (relaciones) y $\langle R \rangle_N$ el menor subgrupo normal de $F(S)$ que contiene a R. Así, un grupo presentado por un número finito de generadores y relaciones, pongamos $G = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$, se dice balanceado si tiene el mismo número de generadores que de relaciones, es decir, si $n = m$. La conjetura de Andrews-Curtis dice que una presentación de este tipo del grupo trivial puede volverse la presentación trivial $\langle \varnothing \mid \varnothing \rangle$ por medio de las transformaciones siguientes:

Definición 2 (Transformaciones de Andrews-Curtis). Sea $G = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ un grupo presentado por un número finito de generadores y relaciones, los siguientes cambios en la presentación son las llamadas *transformaciones de Andrews-Curtis* y preservan el grupo presentado:

- Cambiar una relación r_j por r_j^{-1}.
- Cambiar una relación r_j por $r_j r_k$ o $r_k r_j$ con $k \neq j$.
- Cambiar una relación r_j por $w r_j w^{-1}$ con $w \in F(x_1, \dots, x_n)$.
- Cambiar todas las apariciones del generador x_i en las relaciones por x_i^{-1}, $x_i x_j$ o $x_j x_i$ con $i \neq j$.
- Añadir un nuevo generador x y una nueva relación x.
- Si en la presentación hay un generador x que solo aparece en la relación x, eliminar ambos.

En nuestro caso, manejaremos dos versiones distintas de esta conjetura, ambas topológicas, pues aunque en un primer momento la topología se presente como una materia más bien teórica y con una componente analítica fuerte, existe una faceta de la misma más combinatoria y relacionada con el álgebra, así como con muchos problemas que mantienen ocupados a los matemáticos en la actualidad.

El trabajo está basado principalmente en la tesis doctoral del matemático argentino Jonathan A. Barmak [2], así como en muchas obras de la bibliografía de la misma, escritas por conocidos topólogos como el británico John H. C. Whitehead o los americanos Robert E. Stong y Michael C. McCord; véase Whitehead [8], Stong [7] y McCord [5].

En la segunda sección, analizaremos las propiedades topológicas de los espacios finitos, los cuales *a priori* pueden parecer poco interesantes. Llegaremos a la conclusión de que los conceptos de espacio topológico finito y de conjunto preordenado finito son básicamente el mismo, solo que bajo diferentes enfoques. Veremos que el estudio topológico y homotópico de este tipo de espacios también se puede reducir a términos combinatorios: las aplicaciones continuas entre espacios finitos son exactamente aquellas que preservan el orden entre los conjuntos preordenados asociados, y para probar que dos espacios finitos son homotópicamente equivalentes basta encontrar una cerca (véase la definición 28) de aplicaciones continuas entre uno y otro. Aprendemos que incluso podemos estudiar sin pérdida de generalidad (cuando hablamos de invarianza homotópica) tan solo los conjuntos parcialmente ordenados (posets) finitos.

En la tercera sección, nos adentraremos en el mundo de los complejos simpliciales: aprenderemos qué son y cómo construir su realización geométrica, así como la relación que guardan con los posets, para lo cual nos hará falta aprender conceptos como el de grupo de homotopía o equivalencia de homotopía débil.

En la cuarta sección, introduciremos las nociones de colapso, expansión, deformación y tipo de homotopía simple para complejos simpliciales finitos, llegando a la conclusión de que si dos complejos simpliciales tienen el mismo tipo de homotopía simple, sus respectivas realizaciones geométricas tienen el mismo tipo de homotopía. Sin embargo, el recíproco no se cumple: analizaremos en particular el caso del sombrero bobo. Se trata de un complejo simplicial finito que no se puede colapsar a un punto pero cuya realización geométrica es contráctil. Con todo, el sombrero bobo se puede 3-deformar a un punto, hecho que motiva que se conjeture que esto ocurre para todo 2-complejo simplicial.

Conjetura 3 (Andrews-Curtis, versión simplicial). *Dado un complejo simplicial finito 2-dimensional K tal que su realización geométrica $|K|$ es contráctil, entonces K es 3-deformable a un punto.*

Llegamos así a la versión más puramente geométrica de la conjetura, la cual está estrechamente relacionada con conjeturas y teoremas quizá más famosos:

Conjetura 4 (Zeeman). *Dado un complejo simplicial finito 2-dimensional K tal que su realización geométrica $|K|$ es contráctil, entonces $|K| \times [0, 1]$ es poliédricamente colapsable.*

Teorema 5 (Poincaré). *Cualquier variedad compacta de dimensión 3 simplemente conexa y sin borde es homeomorfa a la 3-esfera.*

Así, con una versión de la conjetura de Andrews-Curtis para complejos simpliciales y una relación entre estos últimos y los posets, en la quinta sección presentamos una versión de la conjetura para conjuntos parcialmente ordenados finitos que será equivalente a la ya vista. Con esta intención, vemos qué son los *beat-points* débiles y probamos que su eliminación es una equivalencia de homotopía débil entre espacios finitos. De esta forma, llegamos a que la conjetura que vimos para complejos simpliciales es equivalente a la siguiente:

Conjetura 6 (Andrews-Curtis, versión para posets). *Sea X un espacio topológico finito T_0 de altura 2. Si X es débilmente homotópicamente equivalente a un punto, entonces X se 3-deforma a un punto.*

Para concluir, en la sexta sección discutiremos la situación de la conjetura en el panorama matemático actual.

2. Espacios topológicos y posets finitos

2.1. Espacios topológicos y conjuntos preordenados finitos

Comenzaremos con unas definiciones básicas de topología general necesarias a lo largo del artículo.

Definición 7. Una **topología** sobre un conjunto X consiste en una familia τ de subconjuntos de X tal que:

1. El conjunto vacío y el total pertenecen a la topología.
2. Dada una familia arbitraria de elementos de la topología, su unión también pertenece a ella.
3. Dada una familia finita de elementos de la topología, su intersección también pertenece a ella.

Un par (X, τ) con X un conjunto y τ una topología sobre X se llama **espacio topológico**. Los elementos de τ son los **abiertos** de X, y si $x \in U$ con U abierto diremos que U es un **entorno** (abierto) de x. Dado $A \subseteq X$, se verifica que A es abierto si y solamente si para todo $x \in A$ existe un abierto U de X tal que $x \in U$ y $U \subseteq A$. Los complementarios de los abiertos serán los **cerrados** del espacio topológico. Usualmente, denotaremos por X el espacio topológico (X, τ) cuando esté claro la topología que estemos usando.

Definición 8. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia de abiertos $\mathcal{B} \subseteq \tau$ será una **base de la topología** τ si todo abierto de la topología se puede expresar como unión de elementos de $\mathcal{B}$. Equivalentemente, $\mathcal{B}$ será una base de τ si dados $U \in \tau,\ x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Proposición 9. *Una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de un conjunto X será una base de alguna topología sobre X si, y solo si, verifica:*

- *Cada punto del conjunto está contenido en algún elemento de $\mathcal{B}$.*
- *Para cualquier par de elementos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y para cada punto $x \in B_1 \cap B_2$, existe un elemento $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3$ y $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

En este caso, dicha topología es el conjunto de uniones arbitrarias de elementos de la base.

Definición 10. Sea (X,τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subconjunto. Se verifica que la siguiente familia constituye una topología sobre A, a la que llamaremos **topología relativa**: $\tau|_A = \{U \cap A \,:\, U \in \tau\}$. Diremos que $(A, \tau|_A)$ es un **subespacio topológico** de (X,τ).

Definición 11. Una **relación de equivalencia** es una relación reflexiva, simétrica y transitiva. Consideremos (X,τ) un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia sobre X. El conjunto de clases de equivalencia se denomina **conjunto cociente** $X/\sim$ y la aplicación $\pi\colon\, x \in X \mapsto [x] \coloneqq \{y \in X \,:\, y \sim x\} \in X/\sim$ **proyección canónica**. La familia $\{U \subseteq X/\sim \,:\, \pi^{-1}(U) \in \tau\}$ constituye una topología sobre $X/\sim$ a la que denominaremos **topología cociente**.

Definición 12. Un espacio topológico es **finito** si tiene un número finito de elementos.

Ahora, incluiremos la idea de conjunto preordenado para compararla con la de espacio topológico finito.

Definición 13. Un **preorden** sobre un conjunto es una relación reflexiva y transitiva definida en el mismo. Un **conjunto preordenado** es un conjunto con un preorden.

Una **relación de orden** sobre un conjunto es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva definida en el mismo. Un **conjunto parcialmente ordenado** (o **poset**) es un conjunto con una relación de orden.

Normalmente, utilizaremos «$\leq$», «$\geq$» para denotar las relaciones de este tipo, aunque a veces también haremos uso de «$\subseteq$», «$\supseteq$». Emplearemos «$<$», «$>$», «$\subset$», «$\supset$» para indicar que la relación es estricta.

Definición 14. Sea X un conjunto parcialmente ordenado finito.

- Un elemento x de X es **maximal** si $x \leq y$ implica $y = x$, y **minimal** si $y \leq x$ implica $y = x$.
- Un elemento x de X es un **máximo** si $y \leq x$ para todo $y \in X$, y un **mínimo** si $x \leq y$ para todo $y \in X$.
- Una **cadena** de X es un subconjunto del mismo tal que sus elementos son comparables dos a dos (totalmente ordenado). Una k-**cadena** (o cadena de longitud k) es una cadena de X con $k+1$ elementos. Definimos la **altura** de un poset como el máximo de las longitudes de sus cadenas.

Definición 15. Sea (X,τ) un espacio topológico finito. Para cada $x \in X$ definimos su **conjunto abierto minimal** como $U_x = \bigcap\{U \in \tau \,:\, x \in U\}$. Será un abierto de X por ser intersección finita de abiertos.

Proposición 16. *La familia de conjuntos abiertos minimales constituye una base de la topología de X. Además, cualquier otra base de τ tiene que contener a esta. Por esto, será la llamada* **base minimal** *de X.*

Demostración. Sea U un abierto, $x \in U$. Tenemos que $x \in U_x \subseteq U$ por definición de U_x. Vemos así que el conjunto de abiertos minimales es una base de τ. Además, sea $\mathcal{B}$ una base cualquiera de τ y $x \in X$ arbitrario. Entonces, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U_x$, por lo que $U_x = B \in \mathcal{B}$, con lo cual $\mathcal{B}$ contiene a la base minimal. ∎

Definición 17. Definimos la siguiente relación en el espacio topológico finito (X,τ):

$$x \leq y :\iff U_x \subseteq U_y \iff x \in U_y.$$

La última equivalencia se sigue de que si $U_x \subseteq U_y$, como $x \in U_x$, está claro que $x \in U_y$. Recíprocamente, si $x \in U_y$, tenemos que U_y es un entorno de x y por definición, $U_x \subseteq U_y$.

Se trata de una relación de preorden: la propiedad reflexiva se verifica porque $x \in U_x$, y la propiedad transitiva se cumple porque si $x \leq y \leq z$, entonces $U_x \subseteq U_y \subseteq U_z$ y por tanto $U_x \subseteq U_z$ y $x \leq z$.

Definición 18. Si ahora consideramos X un conjunto preordenado finito y tomamos la familia $\mathcal{B} = \{B_x\}_{x\in X}$ con $B_x = \{y \in X \,:\, y \leq x\}$, vemos que esta última es una base de topología:

- Sea $x \in X$. Como $x \leq x$ porque estamos hablando de una relación de preorden, $x \in B_x$.
- Si $z \in B_x \cap B_y$, entonces $B_z \in \mathcal{B}$ verifica $z \in B_z$ y $B_z \subseteq B_x \cap B_y$.

Así, podemos considerar en X la topología generada por dicha base.

Teorema 19. *Sea X_T un espacio topológico finito. Entonces podemos definir la siguiente relación de preorden en su conjunto subyacente $x \leq y :\Longleftrightarrow U_x \subseteq U_y$, obteniendo así un conjunto preordenado $P(X_T)$. De la misma forma, si X_P es un conjunto preordenado, podemos definir una topología en su conjunto subyacente dada por la base $\mathcal{B} = \{B_x\}_{x \in X_P}$, siendo $B_x = \{y \in X : y \leq x\}$, obteniendo así un espacio topológico $T(X_P)$. Se verifica que $T(P(X_T)) = X_T$ y $P(T(X_P)) = X_P$.*

Demostración. Basta ver que la base minimal coincide con la base $\mathcal{B}$ aquí mencionada. Sea $x \in X$, tenemos $y \in U_x \iff y \leq x \iff y \in \{z \in X : z \leq x\} = B_x$. ∎

A partir de ahora hablaremos indistintamente de espacios topológicos y conjuntos preordenados finitos.

Ejemplo 20. Consideremos el conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$ con la topología

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{d, e\}, \{a, d, e\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, X\}.$$

De ella, obtenemos los abiertos minimales $U_a = \{a\}$, $U_b = X$, $U_c = \{c\}$, $U_d = \{d, e\}$, $U_e = \{d, e\}$. Por tanto, la relación de preorden asociada vendría dada por:

$$a \leq b,\ c \leq b,\ d \leq e \leq b,\ e \leq d \leq b.$$

De la misma forma, considerando la relación de preorden anterior en X, la base asociada a la misma sería $\mathcal{B} = \{B_a, B_b, B_c, B_d, B_e\} = \{\{a\}, X, \{c\}, \{d, e\}, \{d, e\}\}$, y la topología generada por dicha base es τ.

Observación 21. El ejemplo anterior evidencia que la relación de preorden obtenida no tiene por qué ser una relación de orden al no verificarse la propiedad antisimétrica, puesto que tenemos $d \leq e$ y $e \leq d$, pero $e \neq d$.

2.2. Continuidad y conexidad

Puesto que ya hemos encontrado una interpretación combinatoria de los espacios topológicos finitos, ahora presentaremos un enfoque combinatorio de la continuidad de las aplicaciones entre los mismos.

Definición 22. Una aplicación entre dos espacios topológicos se dice **continua** si la imagen recíproca de todo abierto del codominio es un abierto del dominio.

Definición 23. Decimos que una aplicación $f : X \to Y$ entre dos conjuntos preordenados **preserva el orden** si para cualesquiera $x, x' \in X$ tales que $x \leq x'$ tenemos que $f(x) \leq f(x')$.

Proposición 24. *Una aplicación $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos finitos es continua si, y solo si, preserva el orden de los conjuntos preordenados finitos asociados.*

Demostración. Para la implicación directa, sean $x,\ x' \in X$ tales que $x \leq x'$, (equivalentemente, $x \in U_{x'}$) y veamos que $f(x) \leq f(x')$. Como $U_{f(x')}$ es un abierto en Y y f es continua, $f^{-1}(U_{f(x')})$ será un abierto en X, y además $x' \in f^{-1}(U_{f(x')})$ puesto que $f(x') \in U_{f(x')}$ por definición. De esta forma, $x \in U_{x'} \subseteq f^{-1}(U_{f(x')})$ y entonces $f(x) \in U_{f(x')}$, o lo que es lo mismo, $f(x) \leq f(x')$.

En la implicación recíproca, para ver que f es continua, es suficiente ver que la imagen recíproca de todo abierto básico del codominio es un abierto del dominio. Consideramos así U_y un abierto de la base minimal, veamos que para cualquier $x \in f^{-1}(U_y)$, $x \in U_x \subseteq f^{-1}(U_y)$, con lo cual cada punto de $f^{-1}(U_y)$ tiene un entorno abierto contenido en el mismo y por lo tanto estamos hablando de un abierto. Sea $x \in f^{-1}(U_y)$, tenemos $f(x) \in U_y$, es decir, $U_{f(x)} \subseteq U_y$. Entonces, $z \in U_x \iff z \leq x$, por lo que $f(z) \leq f(x) \iff f(z) \in U_{f(x)} \subseteq U_y \iff z \in f^{-1}(U_y)$, con lo cual concluimos lo que queríamos. ∎

Definición 25. Sean X e Y dos conjuntos, Y preordenado. En el conjunto de aplicaciones entre X e Y establecemos un **preorden puntual**: $f \leq g :\Longleftrightarrow f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$. Está claro que se trata de una relación reflexiva y transitiva: en particular, generará una topología en el conjunto de aplicaciones entre dos conjuntos preordenados finitos que preservan el orden, o lo que es lo mismo, en el conjunto de aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos finitos.

Ahora, trataremos los resultados básicos relacionados con la conexidad en espacios finitos.

Definición 26. Un espacio topológico X es **conexo** si no es la unión disjunta de dos abiertos no vacíos. Equivalentemente, X es conexo si sus únicos subconjuntos «abiertos y cerrados a la vez» son $\emptyset$ y X.

Definición 27. Sea X un espacio topológico, un **camino** de $x \in X$ a $y \in X$ es una aplicación continua $\alpha : I = [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$. La relación «estar conectado por un camino con» es de equivalencia, con lo cual hablaremos de caminos entre puntos. Diremos que un espacio topológico es **conexo por caminos** si para cada par de puntos del mismo existe un camino entre ellos.

Definición 28. Sea X un conjunto preordenado finito. Una **cerca** en X es una sucesión $x_0, x_1, \dots, x_n$ de puntos tales que cualesquiera dos consecutivos son comparables. Se dice que X es **orden-conexo** si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existe una cerca empezando en x y terminando en y.

Observación 29. A diferencia de una cadena, una cerca no tiene por qué estar totalmente ordenada.

Proposición 30 (Barmak [2], proposición 1.2.4). *Sea X un espacio topológico finito. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es un espacio topológico conexo.*
2. *X es un conjunto preordenado orden-conexo.*
3. *X es un espacio topológico conexo por caminos.*

2.3. Homotopía

Definición 31. Decimos que una aplicación continua $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos es **homótopa** a otra aplicación continua $g : X \to Y$ si existe una aplicación continua $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ para todo $x \in X$ y $H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Escribimos $f \simeq g$ y decimos que H es una **homotopía** de f a g. La relación «ser homótopa a» en el conjunto de aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos es de equivalencia, con lo cual podemos decir que f y g son homótopas y que H es una homotopía entre f y g.

Si dicha homotopía es tal que para un subespacio $A \subseteq X$ y para cada $a \in A$ se verifica $H(a,t) = f(a)$ para todo $t \in [0,1]$, decimos que f y g son **homótopas relativo a** A y escribimos $f \simeq g \ (\mathrm{rel}\, A)$.

Definición 32. Diremos que dos espacios topológicos X e Y son **homotópicamente equivalentes** o que tienen el mismo **tipo de homotopia** si existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ continuas y tales que $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ y $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Escribimos $X \simeq Y$ y decimos que f (y g) es una **equivalencia de homotopía**. Decimos que X es un espacio **contráctil**, y escribimos $X \simeq *$, si tiene el mismo tipo de homotopía que un punto.

Definición 33. Sea X un espacio topológico y $E \subseteq X$ un subespacio. Decimos que E es un **retracto** de X si existe una aplicación continua $r : X \to E$ tal que $r \circ i = \mathrm{id}_E$ (**retracción**), con $i : E \to X$ la inclusión. E será un **retracto por deformación (fuerte)** si $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X \ (\mathrm{rel}\, E)$.

Proposición 34 (Ley exponencial). *Sean X, Y espacios finitos. Existe una biyección natural entre el conjunto de homotopías $Y^{X \times [0,1]}$ y el conjunto de caminos $(Y^X)^{[0,1]}$:*

$$\begin{array}{lcl}
\Phi : \quad Y^{X\times[0,1]} & \longrightarrow & (Y^X)^{[0,1]} \\
H : X \times [0,1] \longrightarrow Y & \longmapsto & \Phi(H) : [0,1] \longrightarrow Y^X \\
\quad (x,t) \longmapsto H(x,t) & & \quad t \longmapsto \Phi(X)(t) : X \longrightarrow Y \\
 & & \qquad\qquad x \mapsto \Phi(H)(t)(x) := H(x,t)
\end{array}$$

Corolario 35. *Sean $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones continuas entre espacios finitos. Serán homótopas si, y solo si, hay una cerca $f = f_0 \leq f_1 \geq f_2 \leq \cdots f_n = g$. Además, f y g serán homótopas relativo a $A \subseteq X$ si, y solo si, hay una cerca $f = f_0 \leq f_1 \geq f_2 \leq \cdots f_n = g$ tal que $f_i|_A = f|_A$ para todo $0 \leq i \leq n$.*

2.4. Propiedades de separación

Definición 36. Un espacio topológico X se dice:

- que es T_0 (o un espacio **de Kolmogorov**) si para cualesquiera dos puntos distintos de X existe un entorno de uno de ellos que no contiene al otro,
- que es T_1 (o un espacio **de Fréchet**) si cada punto de X es un cerrado,
- que es T_2 (o un espacio **Hausdorff**) si para cualesquiera dos puntos distintos de X existen entornos de los mismos que son disjuntos entre ellos.

Se verifica que $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$. Además, si un espacio finito (X, τ) es T_1, su topología es la discreta ($\tau = \mathcal{P}(X)$). En efecto, cualquier subconjunto de X será unión finita de cerrados (los puntos contenidos en dicho subconjunto), entonces será un cerrado y en consecuencia cualquier subconjunto de X será complementario de un cerrado y por tanto un abierto. Esto nos indica que cualquier espacio finito de Fréchet (o Hausdorff) va a ser un espacio discreto, y por lo tanto poco interesante para nuestros propósitos. Así, nos centraremos en la propiedad T_0.

Proposición 37. *Un espacio topológico finito X es T_0 si, y solo si, el preorden asociado al mismo es antisimétrico (y por lo tanto X sería un conjunto parcialmente ordenado finito).*

Demostración. Para la implicación directa sean $x, y \in X$ tales que $x \leq y$, $y \leq x$ y supongamos que son distintos. Entonces existe un entorno de uno de ellos (pongamos x) que no contiene al otro (y). De esta manera, $y \notin U_x$ (pues U_x es la intersección de todos los entornos de x), lo cual contradice que $y \leq x$. Así, $x = y$ y nuestro conjunto verifica la propiedad antisimétrica y es por tanto un conjunto parcialmente ordenado.

Para la implicación recíproca, sean $x, y \in X$, $x \neq y$. Si $x \nleq y$, entonces $x \notin U_y$ y encontramos un entorno de y que no contiene a x. Si $x \leq y$, tenemos $y \nleq x$ (si no, $x = y$ por antisimetría y llegaríamos a una contradicción), con lo cual $y \notin U_x$ y encontramos un entorno de x que no contiene a y. En cualquier caso, vemos que X es un espacio topológico T_0. ∎

Además, al hablar de invarianza homotópica, basta fijarnos tan solo en los espacios T_0 o, equivalentemente, en los posets finitos.

Proposición 38 (Barmak [2], proposición 1.3.1). *Sea (X, τ) un espacio topológico finito. Se verifica que es homotópicamente equivalente a un espacio T_0.*

3. Complejos simpliciales finitos

3.1. Complejos simpliciales finitos

Seguidamente, desarrollaremos la teoría sobre complejos simpliciales necesaria para este artículo.

Definición 39. Un **complejo simplicial (abstracto)** es una colección K de subconjuntos no vacíos y finitos de un conjunto V_K (conjunto de **vértices**) de tal forma que:

- K es cerrado por subconjuntos: si $\alpha \in K$ y $\emptyset \neq \beta \subseteq \alpha$, entonces $\beta \in K$.
- Todos los subconjuntos unitarios de V_K están en K.

Los elementos de K son los llamados **símplices (abstractos)**. Un símplice se dice ***n*-símplice** (o símplice de dimensión n) si tiene $n + 1$ elementos. La **dimensión** de un complejo simplicial K, $\dim(K)$, será el supremo de las dimensiones de los símplices que lo forman. Si un complejo simplicial tiene dimensión n, diremos que es un ***n*-complejo simplicial**. Si K es finito, hablaremos de un **complejo simplicial finito**. Si $\sigma, \tau \in K$ y $\sigma \subseteq \tau$, diremos que σ es una **cara** de τ. Si además $\sigma \neq \tau$, la denominaremos **cara propia**.

Definición 40. Sean $v_0, \dots v_n \in \mathbb{R}^m$, decimos que son **afínmente independientes** si:

$$\sum_{i=0}^{n} t_i \cdot v_i = 0,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 0 \implies t_i = 0\ \forall\, i \in \{0, \dots, n\}.$$

Dado un conjunto $\{v_0, \dots, v_n\}$ de $n+1$ puntos afínmente independientes, definimos el n-**símplice geométrico** (o símplice geométrico de dimensión n) generado por los mismos como su envoltura convexa:

$$[v_0, \dots, v_n] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i \cdot v_i \,:\, \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, t_i \geq 0 \;\forall\, i = 0, \dots, n \right\}.$$

Las **coordenadas baricéntricas** de $x = \sum_{i=0}^{n} t_i \cdot v_i \in [v_0, \dots, v_n]$, con $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1, t_i \geq 0 \;\forall\, i = 0, \dots, n$, serán $(t_0, \dots, t_n)$. El **baricentro** de $[v_0, \dots, v_n]$ será el punto que tiene todas las coordenadas baricéntricas iguales, es decir, $b([v_0, \dots, v_n]) = \left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right)$. El **soporte de** x será $\mathrm{sop}(x) = \{v_i \,:\, t_i \neq 0\}$.

Definición 41. Sea K un complejo simplicial abstracto. Para cada símplice $\sigma \in K$, tomamos un símplice geométrico de la misma dimensión $|\sigma| \subseteq \mathbb{R}^m$. Definimos la **realización geométrica** de K como el espacio topológico resultante de considerar la siguiente topología sobre el conjunto $|K| \coloneqq \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma|$:

$$A \subseteq |K| \text{ abierto} :\Longleftrightarrow A \cap |\sigma| \text{ abierto} \;\forall\, \sigma \in K.$$

Si K es un complejo simplicial finito, basta identificar las caras comunes de los símplices y considerar la topología euclídea relativa en $\mathbb{R}^m$.

3.2. Complejos simpliciales finitos y posets finitos

Descubriremos a continuación que los posets finitos y los complejos simpliciales finitos están estrechamente relacionados.

Definición 42. Dado K un complejo simplicial finito, definimos su **poset de caras** $\mathcal{X}(K)$ como el poset cuyos elementos son todos los símplices de K con la relación de orden definida por la inclusión entre los mismos: $\alpha \leq \beta :\Longleftrightarrow \alpha \subseteq \beta$. La altura de $\mathcal{X}(K)$ será igual a la dimensión de K.

Definición 43. Dado X un poset finito, definimos su **complejo de orden** asociado, $\mathcal{K}(X)$, como el complejo simplicial que tiene como n-símplices las n-cadenas de X. Así, $\alpha \subseteq \beta$ como símplices en $\mathcal{K}(X)$ si, y solo si, $\alpha \subseteq \beta$ como cadenas en X. La dimensión de $\mathcal{K}(X)$ será igual a la altura de X.

Es sencillo ver que $\mathcal{K}$ y $\mathcal{X}$ no son inversas una de otra, lo cual motiva las siguientes definiciones:

Definición 44. Sea K un complejo simplicial finito. Definimos la **subdivisión baricéntrica** de K como $K' \coloneqq \mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$. Se trata de un complejo simplicial cuyos vértices son los elementos de K y cuyos elementos son las cadenas del poset de caras de K.

Definición 45. Sea X un poset finito. Definimos su **subdivisión baricéntrica** como $X' \coloneqq \mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$. Se trata de un poset cuyos elementos son las cadenas de X con la relación de inclusión.

Observación 46. La dimensión de la subdivisión baricéntrica de un complejo simplicial finito será igual a la dimensión del complejo simplicial de partida. Análogamente, la altura de un poset será igual a la altura de su subdivisión baricéntrica.

Observación 47. Se verifica que $|K| \cong |K'|$ por el homeomorfismo $s_K : |K'| \to |K|$ que lleva cada vértice de la realización geométrica de K' (es decir, cada símplice de K) en su baricentro y que se extiende linealmente para los restantes puntos de $|K'|$:

$$s_K\left(\sum_{i=0}^{n} t_i \cdot \sigma_i\right) = \sum_{i=0}^{n} t_i \cdot s_K(\sigma_i) = \sum_{i=0}^{n} t_i \cdot b(\sigma_i).$$

Ejemplo 48. La Figura 1 muestra la realización geométrica del complejo simplicial K, el diagrama de su poset de caras $\mathcal{X}(K)$ y la realización geométrica de su subdivisión baricéntrica $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$.

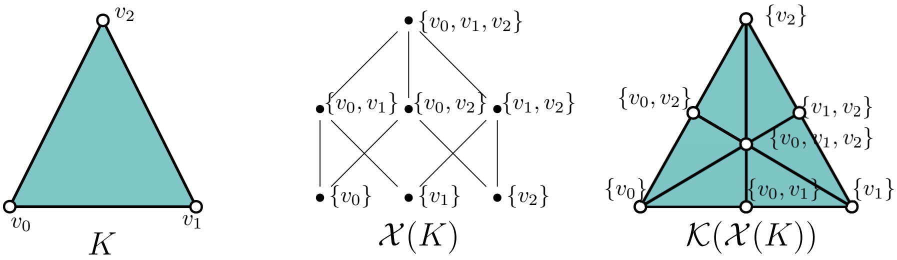

Figura 1: Complejo simplicial, poset de caras y subdivisión baricéntrica.

$$
\begin{gathered}
K = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}\,, \\
\mathcal{X}(K) = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}\,, \\
\mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) = \{\{\{v_0\}\}, \{\{v_1\}\}, \{\{v_2\}\}, \{\{v_0, v_1\}\}, \{\{v_1, v_2\}\}, \{\{v_0, v_2\}\}, \{\{v_0, v_1, v_2\}\}, \{\{v_0\}, \{v_0, v_1\}\}, \\
\{\{v_0\}, \{v_0, v_2\}\}, \{\{v_1\}, \{v_0, v_1\}\}, \{\{v_1\}, \{v_1, v_2\}\}, \{\{v_2\}, \{v_0, v_2\}\}, \{\{v_2\}, \{v_1, v_2\}\}, \{\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}, \\
\{\{v_0, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}, \{\{v_0\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}, \{\{v_1\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}, \{\{v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}, \\
\{\{v_0\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}, \{\{v_0\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}, \{\{v_1\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}, \\
\{\{v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}, \{\{v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}, \{\{v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}\}\,.
\end{gathered}
$$

3.3. Homotopía débil y aplicaciones de McCord

Introducimos antes de nada unas nociones básicas de teoría de grupos que serán importantes a lo largo de esta sección.

Definición 49. Un **grupo** es un conjunto G con una operación interna $\cdot\ :\ (g, h) \in G \times G \mapsto g \cdot h \in G$ (**producto**) verificando:

- Asociatividad: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para todo $a, b, c \in G$.
- Existencia de elemento neutro: existe $1 \in G$ tal que $g \cdot 1 = g = 1 \cdot g$ para todo $g \in G$.
- Existencia de elemento simétrico: para todo $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$ tal que $g \cdot g^{-1} = 1 = g^{-1} \cdot g$.

Definición 50. Sea G un grupo y $H \subseteq G$ un subconjunto. Decimos que H es un **subgrupo** de G si se trata de un grupo con el producto inducido, es decir, si $\cdot\,|_{H\times H}$ es una operación interna ($h \cdot h' \in H$ para todo $h, h' \in H$), asociativa (esto siempre se cumple), con neutro y con simétrico para cada elemento.

Definición 51. Sean G, G' grupos y $\varphi :\ G \to G'$ una aplicación entre ellos. Llamaremos a φ **homomorfismo de grupos** si es compatible con el producto, es decir, si verifica $\varphi(g \cdot g') = \varphi(g) \cdot \varphi(g')$ para todo $g, g' \in G$. Será un **isomorfismo de grupos** si es un homomorfismo biyectivo. Así, decimos que dos grupos G y G' son **isomorfos**, y escribimos $G \cong G'$, si existe un isomorfismo de grupos entre ellos.

Ahora introduciremos unos elementos muy importantes en la topología algebraica.

Definición 52. Sea X un espacio topológico, definimos el **conjunto de las componentes conexas por caminos** de X: $\pi_0(X) \coloneqq X/\sim$, con $\sim$ la relación de equivalencia «estar unido por un camino».

Definición 53. Sea X un espacio topológico, $x_0 \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Consideramos el conjunto de aplicaciones continuas del n-cubo I^n en X tales que la imagen de la frontera ∂I^n (puntos con alguna de sus coordenadas igual a 1 o a 0) es x_0:

$$F_n(X, x_0) = \left\{ f :\ I^n = [0,1] \times \overset{(n)}{\cdots} \times [0,1] \to X \ :\ f \text{ continua},\ f(\partial I^n) = x_0 \right\}.$$

Sobre este conjunto definimos la siguiente operación interna:

$$
\begin{array}{rccl}
f * g : & I^n & \longrightarrow & X \\
 & (t_1, \dots, t_n) & \longmapsto & (f * g)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, \dots, t_n), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, \dots, t_n), & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} .
\end{array}
$$

Ahora consideramos el conjunto cociente $\pi_n(X, x_0) = F_n(X, x_0)/\sim$ con $\sim$ la relación de equivalencia «ser homótopo relativo a ∂I^n». En él, definimos la operación interna $[f] \circ [g] := [f * g]$. Con ella, $\pi_n(X, x_0)$ es un grupo denominado el **n-ésimo grupo de homotopía** de X.

Observación 54. Puesto que $I^n/\partial I^n \cong \mathbb{S}^n$, podemos ver los elementos de $F_n(X, x_0)$ como aplicaciones continuas de $\mathbb{S}^n$ en X tales que la imagen de $(0, \overset{(n-1)}{\ldots}, 0, 1)$ es x_0.

Proposición 55. *Sean X, Y espacios topológicos y $f: X \to Y$ una aplicación continua. Se verifica que, para cada $n \geq 1$ y cada $x_0 \in X$, la siguiente aplicación es un homomorfismo de grupos al que denominaremos* **homomorfismo inducido** *por f. Para $n = 0$ se trata simplemente de una aplicación.*

$$\begin{array}{rccc} \pi_n(f): & \pi_n(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_n(Y, f(x_0)) \\ & [g] & \longmapsto & \pi_n(f)([g]) := [f \circ g] \end{array}$$

Proposición 56. *Sea $f: X \to Y$ una equivalencia de homotopía entre dos espacios topológicos. Tenemos que induce isomorfismos entre todos los grupos de homotopía y que $\pi_0(f): \pi_0(X, x_0) \to \pi_0(Y, f(x_0))$ es una biyección para todo $x_0 \in X$.*

El recíproco de la proposición anterior no se cumple: no toda aplicación f que induce isomorfismos entre los grupos de homotopía y tal que $\pi_0(f): \pi_0(X, x_0) \to \pi_0(Y, f(x_0))$ es una biyección para todo $x_0 \in X$ es una equivalencia de homotopía; véase el ejemplo 1.4.3 en *Algebraic topology of finite topological spaces and applications* [2]. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 57. Sean X e Y espacios topológicos. Decimos que una aplicación continua $f: X \to Y$ es una **equivalencia de homotopía débil** si f induce isomorfismos entre los grupos de homotopía y $\pi_0(f): \pi_0(X, x_0) \to \pi_0(Y, f(x_0))$ es una biyección para todo $x_0 \in X$. En este caso, diremos que X e Y tienen el **mismo tipo de homotopía débil** y escribimos $X \simeq_w Y$.

Sin embargo, existen espacios topológicos donde los términos de equivalencia de homotopía y equivalencia de homotopía débil son equivalentes: los CW-complejos; véase el capítulo 0 en *Algebraic topology* [3].

Teorema 58 (Whitehead). *Una equivalencia de homotopía débil entre CW-complejos es una equivalencia de homotopía.*

Corolario 59. *Una aplicación entre las realizaciones geométricas de dos complejos simpliciales es una equivalencia de homotopía si, y solo si, es una equivalencia de homotopía débil.*

Introduciremos ahora dos equivalencias de homotopía débil muy importantes para nosotros.

Definición 60. Sea X un espacio topológico finito, definimos la **aplicación $\mathcal{K}$ de McCord** como:

$$\begin{array}{rccc} \mu_X: & |\mathcal{K}(X)| & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & \min(\operatorname{sop}(x)) \end{array}$$

Proposición 61. *La aplicación $\mathcal{K}$ de McCord es una equivalencia de homotopía débil.*

Definición 62. Sea K un complejo simplicial finito, definimos la **aplicación $\mathcal{X}$ de McCord** como

$$\mu_K := \mu_{\mathcal{X}(K)} \circ s_K^{-1}: |K| \to \mathcal{X}(K),$$

donde $s_K: |K'| \to |K|$ es el homeomorfismo visto en la observación 47.

Proposición 63. *La aplicación $\mathcal{X}$ de McCord es una equivalencia de homotopía débil.*

Demostración. Se trata de equivalencia de homotopía débil por ser composición de una equivalencia de homotopía débil con un homeomorfismo. ∎

4. Versión de la conjetura para complejos simpliciales finitos

4.1. Colapsos y tipo de homotopía simple para complejos simpliciales finitos

Introduciremos ahora la noción de colapso elemental para complejos simpliciales finitos, la cual fue desarrollada principalmente por J.H.C Whitehead en «Simplicial Spaces, Nuclei and m-Groups» [8].

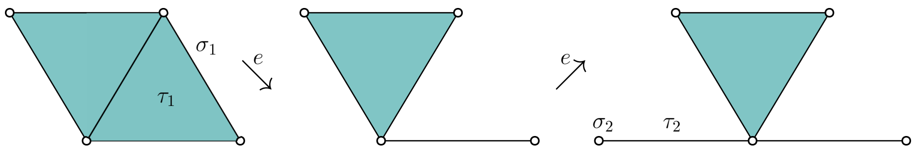

Figura 2: Un colapso elemental seguido de una expansión elemental.

Definición 64. Sea K un complejo simplicial finito. Se dice que un símplice $\sigma \in K$ es **cara libre** de $\tau \in K$ si σ es cara propia de τ y no es cara propia de ningún otro símplice de K.

Proposición 65. *Sea K un complejo simplicial finito y $\sigma \in K$ una cara libre de $\tau \in K$. Entonces, $|K \setminus \{\sigma, \tau\}|$ es un retracto por deformación fuerte de $|K|$. En particular, $|K \setminus \{\sigma, \tau\}| \simeq |K|$.*

Definición 66. Sea K un complejo simplicial finito y $\sigma \in K$ una cara libre de $\tau \in K$. Denominamos **colapso elemental** al paso de K a $K \setminus \{\sigma, \tau\}$, y lo denotamos $K \overset{e}{\searrow} K \setminus \{\sigma, \tau\}$. De la misma forma, llamamos **expansión elemental** al paso de $K \setminus \{\sigma, \tau\}$ a K, y lo indicamos por $K \setminus \{\sigma, \tau\} \overset{e}{\nearrow} K$. Podemos ver un ejemplo ilustrativo en la Figura 2.

Definición 67. Sean K y L complejos simpliciales finitos. Decimos que K **colapsa** a L, y escribimos $K \searrow L$, si existe una sucesión de colapsos elementales $K = K_0 \overset{e}{\searrow} K_1 \overset{e}{\searrow} \cdots \overset{e}{\searrow} K_n = L$.

Análogamente, decimos que L **se expande** a K, y escribimos $L \nearrow K$, si existe una sucesión de expansiones elementales $L = L_0 \overset{e}{\nearrow} L_1 \overset{e}{\nearrow} \cdots \overset{e}{\nearrow} L_n = K$.

Definición 68. Sea K un complejo simplicial finito. Decimos que K es **colapsable** si colapsa a un punto. Lo denotaremos por $K \searrow *$.

Definición 69. Sean K y L complejos simpliciales finitos. Decimos que K y L tienen el mismo **tipo de homotopía simple** si existe una sucesión $K = K_0, K_1, \dots, K_n = L$ de tal forma que $K_i \overset{e}{\searrow} K_{i+1}$ o $K_i \overset{e}{\nearrow} K_{i+1}$ para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Lo denotaremos $K \diagup\!\!\diagdown L$.

Definición 70. Sean K y L complejos simpliciales finitos. Decimos que K **se n-deforma** a L si K y L tienen el mismo tipo de homotopía simple y además las expansiones y los colapsos llevados a cabo solo involucran complejos de dimensión menor o igual que n.

Ya hemos visto que los colapsos elementales en complejos simpliciales finitos son retracciones por deformación fuerte en sus realizaciones geométricas. Así, si dos complejos simpliciales finitos K y L tienen el mismo tipo de homotopía simple, $|K|$ y $|L|$ tendrán el mismo tipo de homotopía. Además, si las realizaciones geométricas de dos complejos simpliciales de dimensión 1 tienen el mismo tipo de homotopía, dichos complejos tendrán también el mismo tipo de homotopía simple. Sin embargo, como veremos en la siguiente sección, esto no es cierto para todas las dimensiones.

Proposición 71. *Sea K un 1-complejo simplicial finito. Se verifica:*

$$K \text{ colapsable} \iff |K| \text{ contráctil.}$$

Demostración. La implicación directa ya se ha visto.

Para la implicación recíproca, si K es un complejo simplicial finito de dimensión 1, K tan solo tendrá 0-símplices (vértices) y 1-símplices (aristas). Una cara libre de K será un vértice que forma parte de una única arista. Veamos que si $|K|$ es contráctil, entonces K tiene una cara libre. En efecto, supongamos que K no tiene ninguna cara libre, entonces cada vértice de K forma parte por lo menos de dos aristas. Consecuentemente, podemos construir un lazo en $|K|$ que no se puede deformar continuamente en un punto, lo cual es una contradicción con que $|K|$ es contráctil. Así, K tiene una cara libre que podemos colapsar, siendo el espacio resultante también contráctil, pues los colapsos son equivalencias de homotopía. Podemos entonces repetir el proceso, y como estamos hablando de complejos simpliciales finitos, acabaremos colapsando nuestro complejo a un punto. ∎

4.2. El sombrero bobo

Comenzamos esta sección con un ejemplo de un complejo simplicial finito no colapsable.

Ejemplo 72. Consideremos el siguiente complejo simplicial finito (ver la figura 3):

$$V_K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$
$$K = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{1, 7\}, \{1, 8\}, \{2, 3\}, \{2, 4\},$$
$$\{2, 5\}, \{2, 7\}, \{2, 8\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{4, 8\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{6, 8\},$$
$$\{7, 8\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 8\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 3, 8\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 3, 4\},$$
$$\{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 7, 8\}, \{3, 4, 8\}, \{3, 5, 6\}, \{4, 5, 6\}, \{4, 6, 8\}, \{6, 7, 8\}\}\,.$$

No es difícil comprobar que K no tiene ninguna cara libre: todos los 1-símplices (conjuntos con dos elementos) del mismo forman parte de por lo menos dos 2-símplices (conjuntos con tres elementos). Así, K no es colapsable.

Sin embargo, la realización geométrica de este complejo simplicial finito es homeomorfa a un espacio contráctil, y por lo tanto será contráctil. Dicho espacio topológico contráctil es el conocido como el **sombrero bobo (*the dunce hat*)**, y se trata del espacio cociente obtenido al identificar los lados de un triángulo de forma no coherente. Podemos pensar en él como un triángulo de tela en el que pegamos dos aristas formando un cono y luego pegamos la base del cono a una generatriz del mismo. El matemático británico Christopher Zeeman estudió muchas propiedades de este espacio en «On the dunce hat» [9].

De esta forma, vemos que las retracciones no siempre se traducen en colapsos (otro ejemplo puede ser la **casa de dos habitaciones** de Bing). Sin embargo, se ha demostrado que el sombrero bobo se puede expandir a un complejo simplicial que tiene a la 3-esfera como realización geométrica, siendo este último colapsable. Así, el sombrero bobo no es colapsable, pero sí 3-deformable a un punto. Los matemáticos estadounidenses James J. Andrews y Morton L. Curtis conjeturaron que esto ocurre para todo 2-complejo simplicial.

Conjetura 73 (Andrews-Curtis, versión simplicial). *Dado un complejo simplicial finito 2-dimensional K tal que su realización geométrica $|K|$ es contráctil, entonces K es 3-deformable a un punto.*

La versión de esta conjetura para dimensiones superiores ya se ha probado.

Teorema 74 (Whitehead-Wall). *Sea $n \geq 3$ un número natural. Dado un complejo simplicial finito n-dimensional K tal que su realización geométrica $|K|$ es contráctil, entonces K es $(n+1)$-deformable a un punto.*

En consecuencia, todo 2-complejo simplicial finito con realización geométrica contráctil se puede 4-deformar a un punto, pero que se pueda 3-deformar o no sigue siendo una pregunta abierta.

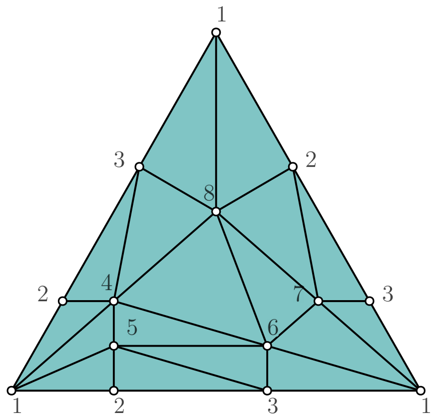

Figura 3: $|K|$

En la misma línea, Christoper Zeeman probó que el sombrero bobo D no es poliédricamente colapsable (en el sentido descrito por él), pero que en cambio $D \times [0,1]$ sí, y también conjeturó que esto pasa para todo 2-complejo simplicial finito.

Conjetura 75 (Zeeman). *Dado un complejo simplicial finito 2-dimensional K tal que su realización geométrica $|K|$ es contráctil, entonces $|K| \times [0,1]$ es poliédricamente colapsable.*

Puesto que los colapsos poliédricos implican la existencia de colapsos simpliciales, la conjetura de Zeeman implica la conjetura de Andrews-Curtis. Además, la conjetura de Zeeman implica la famosa conjetura de Poincaré, ahora teorema gracias a Grigori Perelman, matemático ruso que la demostró entre 2002 y 2003. Este hito hizo a Perelman merecedor de la Medalla Fields en 2006 y del primer Premio del Milenio del Instituto Clay, galardones que declinó por no querer fama y considerar que muchos otros matemáticos fueran responsables de este descubrimiento.

Teorema 76 (Poincaré). *Cualquier variedad compacta de dimensión 3 simplemente conexa y sin borde es homeomorfa a la 3-esfera.*

Por este teorema, sabemos que la conjetura de Andrews-Curtis es cierta para un tipo especial de 2-complejos simpliciales: aquellos embebidos en variedades de dimensión 3 (los llamados ***spines***).

En la literatura se puede encontrar mucha información sobre estas y otras conjeturas.

5. Versión de la conjetura para posets finitos y equivalencia

Hasta el momento, hemos visto una versión de la conjetura de Andrews-Curtis para complejos simpliciales, así como una relación entre los complejos simpliciales y los posets, siendo estos últimos los espacios topológicos que mejor sabemos manejar. Así, el objetivo de esta sección es presentar una versión de la conjetura de Andrews-Curtis para conjuntos parcialmente ordenados que será equivalente a la vista para complejos simpliciales.

5.1. Colapsos y tipo de homotopía simple para posets finitos

Ya hemos introducido el concepto de tipo de homotopía simple para complejos simpliciales finitos y vimos que si dos complejos simpliciales tienen el mismo tipo de homotopía simple, sus realizaciones geométricas tienen el mismo tipo de homotopía, o equivalentemente, el mismo tipo de homotopía débil. Proseguiremos ahora buscando un análogo a cara libre en posets finitos.

Definición 77. Sea X un espacio topológico finito T_0.

- $x \in X$ es un ***down-beat point*** **débil** si $\widehat{U}_x = \{z \in X \colon z < x\}$ es contráctil.
- $x \in X$ es un ***up-beat point*** **débil** si $\widehat{F}_x = \{z \in X \colon z > x\}$ es contráctil.
- $x \in X$ es un ***beat point*** **débil** si es un *up-beat point* débil o un *down-beat point* débil.

Proposición 78. *Sea X un espacio topológico finito T_0 y $x \in X$ un* beat point *débil. Entonces la inclusión $i \colon X \setminus \{x\} \to X$ es una equivalencia de homotopía débil.*

Definición 79. Sea X un poset finito y $x \in X$ un *beat point* débil. Definimos **colapso elemental** al paso de X a $X \setminus \{x\}$. Entonces decimos que X **colapsa elementalmente** a $X \setminus \{x\}$, y escribimos $X \overset{e}{\searrow} X \setminus \{x\}$. De la misma forma, llamamos **expansión elemental** al paso de $X \setminus \{x\}$ a X, decimos que $X \setminus \{x\}$ **se expande elementalmente** a X, y escribimos $X \setminus \{x\} \overset{e}{\nearrow} X$.

Definición 80. Sean X e Y posets finitos. Decimos que X **colapsa** a Y si existe una sucesión de colapsos elementales tales que $X = X_0 \overset{e}{\searrow} X_1 \overset{e}{\searrow} \cdots \overset{e}{\searrow} X_n = Y$. En esta situación también podemos decir que Y **se expande** a X. Escribimos $X \searrow Y$ o $Y \nearrow X$.

Definición 81. Sean X e Y posets finitos. Decimos que X **se deforma** en Y si existe una sucesión de posets $X = X_0, X_1, \dots, X_n = Y$ tales que, para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $X_i \overset{e}{\searrow} X_{i+1}$ o $X_i \overset{e}{\nearrow} X_{i+1}$. Escribimos $X \diagup\!\!\searrow Y$, y la llamaremos n-**deformación** si los posets implicados tienen como máximo altura n.

Observación 82. Las deformaciones son equivalencias de homotopía débil por la proposición 78.

Proposición 83. *Sean X e Y espacios topológicos finitos T_0. Se verifica que X e Y tienen el mismo tipo de homotopía débil si, y solo si, las realizaciones geométricas de sus complejos simpliciales asociados tienen el mismo tipo de homotopía.*

Análogamente, sean K y L complejos simpliciales finitos. Se verifica que sus realizaciones geométricas tienen el mismo tipo de homotopía si, y solo si, los posets asociados a los complejos simpliciales de partida tienen el mismo tipo de homotopía débil.

Demostración. Como la aplicación $\mathcal{K}$ de McCord es una equivalencia de homotopía débil (véase la proposición 61), X e Y tendrán, respectivamente, el mismo tipo de homotopía débil que las realizaciones geométricas de sus complejos simpliciales asociados. Así, que X e Y tengan el mismo tipo de homotopía débil equivale a que $|\mathcal{K}(X)|$ y $|\mathcal{K}(Y)|$ tengan el mismo tipo de homotopía débil, es decir, el mismo tipo de homotopía por el corolario 59.

De forma similar, como la aplicación $\mathcal{X}$ de McCord es una equivalencia de homotopía débil (por la proposición 63), $|K|$ y $|L|$ tendrán, respectivamente, el mismo tipo de homotopía débil que los posets asociados a los complejos simpliciales de partida. Que $|K|$ y $|L|$ tengan el mismo tipo de homotopía equivale a que tengan el mismo tipo de homotopía débil por el corolario 59, con lo cual también equivale a que $\mathcal{X}(K)$ y $\mathcal{X}(L)$ sean débilmente homotópicamente equivalentes. ∎

Después de ver esta proposición, la intuición nos dice que el candidato perfecto para la versión en espacios finitos de la conjetura de Andrews-Curtis es la siguiente:

Conjetura 84 (Andrews-Curtis, versión para posets). *Sea X un espacio topológico finito T_0 de altura 2. Si X es débilmente homotópicamente equivalente a un punto, entonces X se 3-deforma a un punto.*

5.2. Relación entre las conjeturas

Acabamos de enunciar una versión de la conjetura de Andrews-Curtis para espacios finitos (la conjetura 84), y queremos probar que es efectivamente una versión de la conjetura de Andrews-Curtis, es decir, que es equivalente a la conjetura 73. Con lo que sabemos, podemos demostrar la equivalencia entre las hipótesis, pero para demostrar la equivalencia entre las tesis nos hace falta el siguiente resultado clave, que debemos a los matemáticos argentinos Jonathan Barmak y Gabriel Minian.

Teorema 85 (Barmak [2], teorema 4.2.11). *Sean X e Y dos posets finitos. Si X colapsa a Y, entonces el complejo de orden $\mathcal{K}(X)$ colapsa a $\mathcal{K}(Y)$. Además, X e Y tienen el mismo tipo de homotopía simple si, y solo si, $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{K}(Y)$ tienen el mismo tipo de homotopía simple.*

De manera análoga, sean K y L dos complejos simpliciales finitos. Si K colapsa a L, entonces el poset de caras $\mathcal{X}(K)$ colapsa a $\mathcal{X}(L)$. Además, K y L tienen el mismo tipo de homotopía simple si, y solo si, $\mathcal{X}(K)$ y $\mathcal{X}(L)$ tienen el mismo tipo de homotopía simple.

$$
\begin{tikzcd}
X \simeq Y \arrow[d, Rightarrow] & \\
X \diagup\!\!\searrow Y \arrow[r, Rightarrow] \arrow[ddd, Leftrightarrow] & X \simeq_w Y \arrow[d, Leftrightarrow] \\
& |\mathcal{K}(X)| \simeq_w |\mathcal{K}(Y)| \arrow[d, Leftrightarrow] \\
& \\
\mathcal{K}(X) \diagup\!\!\searrow \mathcal{K}(Y) \arrow[r, Rightarrow] & |\mathcal{K}(X)| \simeq |\mathcal{K}(Y)|
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{X}(K) \simeq \mathcal{X}(L) \arrow[d, Rightarrow] & \\
\mathcal{X}(K) \diagup\!\!\searrow \mathcal{X}(L) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[ddd, Leftrightarrow] & \mathcal{X}(K) \simeq_w \mathcal{X}(L) \arrow[d, Leftrightarrow] \\
& |K| \simeq_w |L| \arrow[d, Leftrightarrow] \\
& \\
K \diagup\!\!\searrow L \arrow[r, Rightarrow] & |K| \simeq |L|
\end{tikzcd}
$$

Figura 4: Este diagrama, extraído de *Algebraic topology of finite topological spaces and applications* [2], ilustra la situación en la que nos encontramos en este momento.

Observación 86. Como la dimensión del complejo $\mathcal{K}(X)$ es igual a la altura del poset X y la altura del poset $\mathcal{X}(K)$ es igual a la dimensión del complejo K, las n-deformaciones entre espacios topológicos finitos T_0 son equivalentes a n-deformaciones entre sus complejos de orden asociados, y las n-deformaciones entre complejos simpliciales finitos son equivalentes a n-deformaciones entre sus posets de caras asociados.

Así, ya tenemos todos los ingredientes para probar la equivalencia entre las conjeturas.

Teorema 87. *Las siguientes conjeturas son equivalentes:*

1. *(Conjetura 73) Dado un complejo simplicial finito* 2*-dimensional* K *tal que su realización geométrica* $|K|$ *es contráctil, entonces* K *es* 3*-deformable a un punto.*
2. *(Conjetura 84) Sea* X *un espacio topológico finito* T_0 *de altura* 2*. Si* X *es débilmente homotópicamente equivalente a un punto, entonces* X *se* 3*-deforma a un punto.*

Demostración. Demostramos que la conjetura 73 implica la conjetura 84. Sea X en las hipótesis de la segunda conjetura, y consideremos $\mathcal{K}(X)$ el complejo simplicial asociado, que será finito, de dimensión 2 y con realización geométrica contráctil por la proposición 83. Así, $\mathcal{K}(X)$ está en las hipótesis de la primera conjetura, que dice que $\mathcal{K}(X)$ es 3-deformable a un punto. En consecuencia, por el teorema y observación anteriores, podemos concluir que X se 3-deforma a un punto.

Probamos ahora que la conjetura 84 implica la conjetura 73. Sea K en las hipótesis de la primera conjetura, y consideremos $\mathcal{X}(K)$ el poset asociado, que será finito, de altura 2 y débilmente homotópicamente equivalente a un punto por la proposición 83. De esta forma, $\mathcal{X}(K)$ está en las hipótesis de la segunda conjetura, que dice que $\mathcal{X}(K)$ es 3-deformable a un punto. En consecuencia, por el teorema y observación anteriores, podemos concluir que K se 3-deforma a un punto. ∎

6. Conclusión

Vale la pena decir que el análisis hecho para complejos simpliciales se puede extender para un tipo especial de espacios topológicos, los CW-complejos, los cuales ya hemos mencionado. Con esta generalización, puede establecerse la equivalencia entre las dos conjeturas topológicas y la algebraica de una forma similar a la que mostramos en este artículo: se busca una forma de relacionar cada CW-complejo con un grupo dado por una presentación y viceversa, y se establecen equivalencias entre las transformaciones de Andrews-Curtis y los colapsos y expansiones elementales. De la misma forma, a cada grupo dado por una presentación le podemos asociar un poset y viceversa, y relacionar las operaciones realizadas entre ambos.

Además, cualquiera de las versiones de la conjetura mencionadas en el trabajo se presta a un tratamiento informático de la misma, destacando softwares ya utilizados en algunos trabajos como GAP, SageMath, Macaulay...

Como ya hemos dicho, en la actualidad se sabe que la conjetura es cierta para dimensiones mayores que 2, y para dimensión 2 se conoce la validez de la misma en algunos casos particulares. Sin embargo, se piensa que la conjetura es falsa en general, existiendo numerosos contraejemplos potenciales; véase «The Andrews-Curtis conjecture and its generalizations» [4]:

$$\langle a, b, c \mid c^{-1}bc = b^2, a^{-1}ca = c^2, b^{-1}ab = a^2\rangle$$
$$\langle a, b \mid ba^2b^{-1} = a^3, ab^2a^{-1} = b^3\rangle$$
$$\langle a, b \mid aba = bab, a^4 = b^5\rangle$$

Además, la coincidencia en el tipo de homotopía de las realizaciones geométricas no siempre implica la coincidencia en el tipo de homotopía simple de los complejos simpliciales asociados, pues existe una obstrucción llamada **grupo de Whitehead** del complejo.

Con la cantidad de enfoques distintos con los que cuenta la conjetura en distintos ámbitos de las Matemáticas, nuestras opciones a la hora de probar o desmentir esta suposición se multiplican. Si a esto le sumamos la gran herramienta que constituye la informática y la capacidad computacional con la que contamos hoy en día, podemos confiar en que en un futuro próximo daremos con la respuesta a la conjetura.

Referencias

[1] Andrews, J. J. y Curtis, M. L. «Free groups and handlebodies». En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 16 (1965), págs. 192-195. issn: 0002-9939. https://doi.org/10.2307/2033843.

[2] Barmak, Jonathan A. *Algebraic topology of finite topological spaces and applications.* Vol. 2032. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2011. https://doi.org/10.1007/978-3-642-22003-6.

[3] Hatcher, Allen. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002. isbn: 0-521-79160-X; 0-521-79540-0.

[4] Hog-Angeloni, Cynthia y Metzler, Wolfgang. «The Andrews-Curtis conjecture and its generalizations». En: *Two-dimensional homotopy and combinatorial group theory.* Vol. 197. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, págs. 365-380. https://doi.org/10.1017/CBO9780511629358.014.

[5] McCord, Michael C. «Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces». En: *Duke Mathematical Journal* 33 (1966), págs. 465-474. issn: 0012-7094. url: http://projecteuclid.org/euclid.dmj/1077376525.

[6] Sendón Blanco, Alba. *A conxectura de Andrews-Curtis.* Trabajo de Fin de Grado. 2021.

[7] Stong, R. E. «Finite topological spaces». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 123 (1966), págs. 325-340. issn: 0002-9947. https://doi.org/10.2307/1994660.

[8] Whitehead, J. H. C. «Simplicial Spaces, Nuclei and m-Groups». En: *Proceedings of the London Mathematical Society. Second Series* 45.4 (1939), págs. 243-327. issn: 0024-6115. https://doi.org/10.1112/plms/s2-45.1.243.

[9] Zeeman, E. C. «On the dunce hat». En: *Topology. An International Journal of Mathematics* 2 (1964), págs. 341-358. issn: 0040-9383. https://doi.org/10.1016/0040-9383(63)90014-4.