

TEMat

Cuatro demostraciones de $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$

✉ José Manuel Sánchez Muñoz^a

Grupo de Innovación Educativa
«Pensamiento Matemático», Universidad
Politécnica de Madrid (UPM).
jmanuel.sanchez@educarex.es

Resumen: Uno de los números reales más notables de la historia de las matemáticas es e . Denominado número de Euler o constante de Napier, es la base de los logaritmos naturales. Posee el privilegio de tratarse de un número irracional y trascendente, y su desarrollo en serie es bien conocido. Respecto a dicho desarrollo, en este artículo se demuestra de varias formas distintas una desigualdad relacionada con esta constante. Las demostraciones tienen que ver con la manipulación de series, aplicación de las desigualdades de Hermite-Hadamard y de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, y por último con herramientas analíticas de funciones.

Abstract: One of the most notable real numbers in the history of mathematics is e . Called Euler's number or Napier's constant, it is the base of natural logarithms. It has the privilege of being an irrational and transcendental number and its series expansion is well known. Regarding this expansion, in this article an inequality related to this constant is proved in several different ways. The proofs deal with the manipulation of series, application of the Hermite-Hadamard and Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz inequalities, and finally with tools of analytical functions.

Palabras clave: número de Euler, constante de Napier, desigualdad de Hermite-Hadamard, desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz.

MSC2020: 26D15.

Recibido: 23 de junio de 2022.

Aceptado: 2 de diciembre de 2022.

Agradecimientos: El autor desea agradecer a todos los componentes de los grupos de divulgación de Telegram «Retos Matemáticos» y «MaTeX» por su enorme labor pedagógica y su compromiso con la democratización del conocimiento matemático.

Referencia: SÁNCHEZ MUÑOZ, José Manuel. «Cuatro demostraciones de $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ ». En: *TEMat*, 7 (2023), págs. 17-26. ISSN: 2530-9633. URL: <https://temat.es/articulo/2023-p17>.

^aProfesor de Matemáticas del I.E.S. Jaranda. Coordinador del Comité Editorial de la revista «Pensamiento Matemático». Autor de numerosos libros y artículos relacionados con la divulgación matemática.

1. Introducción

Respecto al número e cabe decir que históricamente es uno de los números con mayor notabilidad de las matemáticas. El primero que adoptó la notación que hoy día es aceptada fue el suizo Leonhard Euler (Basilea, 1707 – San Petersburgo, 1783) en un manuscrito que, aunque al parecer estaba fechado entre 1727 y 1728 según algunas fuentes, se publicó póstumamente en su *Opera posthuma* (1862), de ahí que se le conozca también como número de Euler (véase *Encyclopedia of Mathematics* [20, p. 152]). Con anterioridad, el escocés John Napier (Edimburgo, 1550 – ibid. 1617) había descubierto en 1614 los logaritmos (y acuñado su término), utilizando como base para su invención un valor que posteriormente se demostró que se aproximaba bastante precisamente al número e (véase «Estudio del origen del número e y de sus aplicaciones en diversos campos de las matemáticas» [14]). Por este motivo, dicho número también recibe en su honor el nombre de constante de Napier. La constante como tal fue descubierta en 1683 por el suizo Jakob Bernoulli (Basilea, 1655 – ibid. 1705) cuando dedicó sus estudios al interés compuesto (véase *The math book* [15, p. 166]). La definición clásica de dicho número, y que se puede encontrar en multitud de referencias, es

$$(1) \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Nótese que también se puede definir dicho número a través del siguiente límite

$$(2) \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Pero, ¿cómo podemos hacer dicha afirmación de manera tan ligera? Fijemos por ejemplo $n = 10\,000$ y veamos la diferencia entre dichos límites. En el primer caso

$$\left(1 + \frac{1}{10\,000}\right)^{10\,000} = 2,71814592 \dots$$

y en el segundo

$$\left(1 + \frac{1}{10\,000}\right)^{10\,000+\frac{1}{2}} = 2,718281831 \dots$$

Ambos límites se «aproximan» al valor real de e . El primero es exacto hasta el tercer decimal, mientras que el segundo lo es hasta el séptimo. Dicho resultado nos hace apresurarnos a pensar que quizás el segundo límite supusiera una mejor aproximación al valor exacto de dicha constante con respecto al resultado clásico del primero.

Se sabe que para cualquier valor de $n > 1$, entonces

$$e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

En este caso, vamos a presentar una serie de demostraciones que prueban la siguiente desigualdad

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Para demostrarla, haremos uso de expresiones en series de potencias de Taylor, a través de la desigualdad de Hermite-Hadamard y finalmente una última demostración mediante herramientas del análisis matemático.

2. Demostración por desarrollo en serie de potencias de Taylor

Si se considera el desarrollo en serie de potencias de Taylor de la función $\ln(1+x)$ alrededor del punto $x = 0$, se tiene la siguiente serie alterna

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots, \quad -1 < x \leq 1.$$

Ha de tenerse en cuenta que se van a llevar a cabo en la demostración sustituciones de valores, que pertenecen todos ellos al dominio de convergencia de la serie de Taylor. En la expresión anterior, se reemplaza x por $\frac{1}{n}$ (ya que $x = \frac{1}{n}$ cumple $-1 < x \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$), y se multiplican ambos miembros por n , resultando

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^3} + \frac{1}{5n^4} - \dots$$

Sustituyendo n por $2n$ y por $-2n$ respectivamente en la expresión anterior se llega a las siguientes dos series:

$$\begin{aligned} 2n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) &= 1 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{32n^3} + \frac{1}{80n^4} - \dots \\ -2n \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) &= 1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{32n^3} + \frac{1}{80n^4} - \dots \end{aligned}$$

Sumando ambas series obtenidas en el último paso resulta

$$2n\left(\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right) = 2 + \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{40n^4} + \dots$$

Teniendo en cuenta las propiedades de los logaritmos, entonces

$$2n \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) = 2 + \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{40n^4} + \dots$$

Dividiendo en la última expresión ambos miembros por dos, y teniendo en cuenta las propiedades de los logaritmos, se llega a

$$\ln\left(\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n\right) = 1 + \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{80n^4} + \dots$$

En este punto, se sustituye n por $n + \frac{1}{2}$, llegándose a la siguiente serie

$$\ln\left(\left(\frac{2n+2}{2n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) = 1 + \frac{1}{12\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{80\left(n+\frac{1}{2}\right)^4} + \dots$$

Por lo tanto,

$$\ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) > 1.$$

Luego,

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

3. Demostración mediante la desigualdad de Hermite-Hadamard

Los franceses Charles Hermite (Dieuze, 1822 – París, 1901) y su discípulo Jacques Hadamard (Versalles, 1865 – París, 1963) llegaron en 1893 a un resultado fundamental en forma de desigualdad (véase «Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann» [9]). Entre los resultados más notables obtenidos por ambos autores, el primero demostró la trascendencia del número e en 1882 (véase «Hermite y la trascendencia de e » [18]), y el segundo comparte el privilegio de haber demostrado el teorema de los números primos junto (aunque de manera independiente) al belga Charles-Jean de la Vallée Poussin (Lovaina, 1866 – Bruselas, 1962) en 1896 (véase «Riemann, más que una hipótesis» [19]). Dicha desigualdad juega un papel fundamental en la teoría de convexidad (de funciones). Veamos el resultado alcanzado por Hermite y Hadamard a continuación (véanse «On generalized convex functions» [3] y Bessenyei [5]). Previamente resulta importante conocer formalmente el concepto de convexidad en una función.



Charles Hermite¹ (c. 1887) y Jacques Hadamard².

Definición 1. Sea $V \subset \mathbb{R}$. Una función real $\mathcal{G} : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo (o en cualquier subconjunto convexo de algún espacio vectorial), se dice que es convexa si se cumple

$$(3) \quad \mathcal{G}(\zeta m_1 + (1 - \zeta)m_2) \leq \zeta \mathcal{G}(m_1) + (1 - \zeta) \mathcal{G}(m_2),$$

para cualesquiera $m_1, m_2 \in V$ y $\zeta \in [0, 1]$. En resumen, una función es convexa si y solo si su epigrafo, esto es, el conjunto de puntos situados en o sobre el grafo, es un conjunto convexo.

Teorema 2 (Desigualdad de Hermite-Hadamard). *Si una función \mathcal{G} es diferenciable en el intervalo $[a, b]$ y su derivada es una función convexa en (a, b) , entonces para cualquier $m_1, m_2 \in [a, b]$ tales que $m_1 \neq m_2$, se cumple la siguiente desigualdad*

$$(4) \quad \mathcal{G}\left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right) \leq \frac{1}{m_2 - m_1} \int_{m_1}^{m_2} \mathcal{G}(x) dx \leq \frac{\mathcal{G}(m_1) + \mathcal{G}(m_2)}{2}.$$

Demostración. Sea \mathcal{G} una función convexa en el intervalo $[m_1, m_2]$. Considerando $\zeta = \frac{1}{2}$ en la expresión (3) para $x, y \in [m_1, m_2]$, se tiene

$$(5) \quad \mathcal{G}\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{\mathcal{G}(x) + \mathcal{G}(y)}{2}.$$

Considerando $x = \zeta m_1 + (1 - \zeta)m_2$ e $y = (1 - \zeta)m_1 + \zeta m_2$ en la expresión (5), se obtiene

$$(6) \quad 2\mathcal{G}\left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right) \leq \mathcal{G}(\zeta m_1 + (1 - \zeta)m_2) + \mathcal{G}((1 - \zeta)m_1 + \zeta m_2).$$

Integrando la desigualdad de la expresión (6) con respecto a ζ sobre $[0, 1]$, resulta

$$\begin{aligned} 2\mathcal{G}\left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right) &\leq \int_0^1 \mathcal{G}(\zeta m_1 + (1 - \zeta)m_2) d\zeta + \int_0^1 \mathcal{G}((1 - \zeta)m_1 + \zeta m_2) d\zeta \\ &= \frac{2}{m_2 - m_1} \int_{m_1}^{m_2} \mathcal{G}(x) dx. \end{aligned}$$

Para demostrar la segunda parte de la desigualdad de la expresión (4), se utiliza la definición de convexidad para $\zeta \in [0, 1]$, resultando

$$\mathcal{G}(\zeta m_1 + (1 - \zeta)m_2) \leq \zeta \mathcal{G}(m_1) + (1 - \zeta) \mathcal{G}(m_2),$$

¹Imagen de dominio público reproducida de *Wikimedia Commons* [16].

²Imagen de dominio público extraída de *Wikimedia Commons* [10].

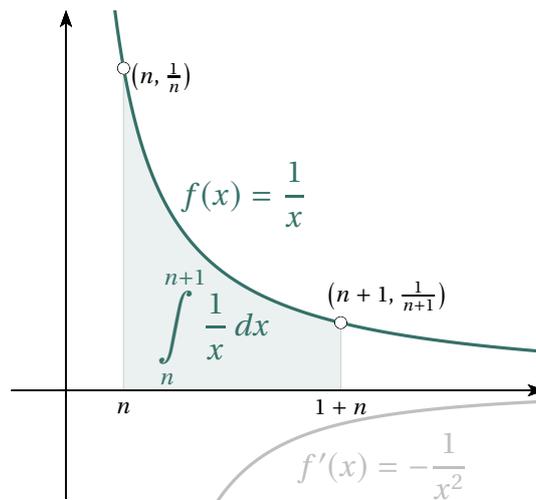


Figura 1: Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$. El área sombreada es igual a $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

y

$$\mathcal{G}((1 - \zeta)m_1 + \zeta m_2) \leq (1 - \zeta) \mathcal{G}(m_1) + \zeta \mathcal{G}(m_2).$$

Sumando las dos últimas desigualdades, se obtiene

$$(7) \quad \mathcal{G}(\zeta m_1 + (1 - \zeta)m_2) + \mathcal{G}((1 - \zeta)m_1 + \zeta m_2) \leq \mathcal{G}(m_1) + \mathcal{G}(m_2).$$

Integrando la desigualdad de la expresión (7) con respecto a ζ en el intervalo $[0, 1]$, se tiene

$$\int_0^1 \mathcal{G}(\zeta m_1 + (1 - \zeta)m_2) d\zeta + \int_0^1 \mathcal{G}((1 - \zeta)m_1 + \zeta m_2) d\zeta \leq (\mathcal{G}(m_1) + \mathcal{G}(m_2)) \int_0^1 d\zeta.$$

Por lo tanto, se cumple que

$$\frac{2}{m_2 - m_1} \int_{m_1}^{m_2} \mathcal{G}(x) dx \leq \mathcal{G}(m_1) + \mathcal{G}(m_2). \quad \blacksquare$$

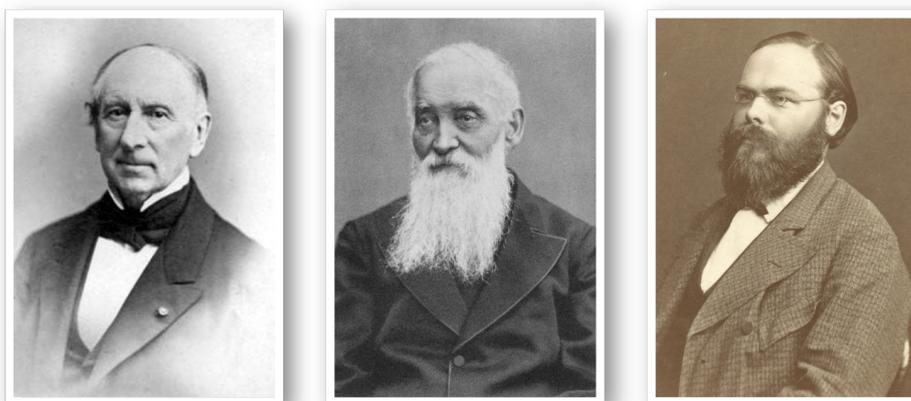
Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[n, n + 1]$ (figura 1). Se puede observar que la derivada $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ es una función creciente en el intervalo $(n, n + 1)$. Entonces se cumple la desigualdad de Hermite–Hadamard¹. Aplicando dicha desigualdad a la función cuando $x_1 = n$ y $x_2 = n + 1$ resulta

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n + n + 1}{2}\right) &< \frac{1}{n + 1 - n} \int_n^{n+1} f(x) dx, \\ \frac{2}{2n + 1} &< \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \\ \frac{1}{n + \frac{1}{2}} &< \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \\ 1 &< \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n + \frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

lo que concluye en

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n + \frac{1}{2}}.$$

¹Si en la demostración de dicha desigualdad se tiene que $\mathcal{G}(\zeta m_1 + (1 - \zeta)m_2) < \zeta \mathcal{G}(m_1) + (1 - \zeta) \mathcal{G}(m_2)$ para algún ζ_0 y \mathcal{G} es continua, entonces ocurre en un entorno de ζ_0 , por lo que al integrar la desigualdad resulta entonces estricta.



Augustin Louis Cauchy⁴ (c. 1857), Viktor Bunyakovsky⁵ (1888) y Hermann Schwarz⁶ (c. 1890).

4. Demostración mediante la desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz

En 1821, el francés Augustin Cauchy (París, 1789 – Sceaux, 1857) publicó un trabajo en el que aparecía por primera vez la desigualdad en cuestión en forma de sumas. Cauchy debe ser considerado como el matemático que formalizó el cálculo infinitesimal (véanse *The origins of Cauchy's rigorous calculus* [8] y *Augustin-Louis Cauchy* [4]), ayudándose de los conceptos aritméticos sobre el cuerpo de los números reales para otorgar el rigor que necesitaban los fundamentos del análisis, hasta entonces apoyados en una intuición geométrica que quedará en segundo plano con los trabajos de dicho autor. Además, posee el privilegio de haber sido uno de los matemáticos más prolíficos, únicamente superado por el suizo Leonhard Euler, el húngaro Paul Erdős (Budapest, 1913 – Varsovia, 1996) y el inglés Arthur Cayley (Richmond, 1821 – Cambridge, 1895).

En 1859, el ruso Viktor Bunyakovsky (Bar, 1804 – San Petersburgo, 1889), cuyo director de tesis había sido el propio Cauchy, redefinió la desigualdad del francés en forma de integrales, demostrándola para el caso de un espacio de dimensión infinita. Aparte de sus responsabilidades como docente de la Academia Naval de San Petersburgo desde 1828 a 1860, y de la Universidad de dicha ciudad desde 1846 a 1880, Bunyakovsky dedicó sus esfuerzos a investigar en campos donde realizó importantes contribuciones, como en teoría de números o teoría de probabilidades.

En 1888, el alemán Herman Schwarz (Hermsdorf, 1843 – Berlín, 1921) publicaba su segundo trabajo. Schwarz, que paradójicamente no había estudiado en Berlín matemáticas sino química, se dejó persuadir por Ernst Kümmer (Žary, 1810 – Berlín, 1893) y Karl Weierstrass (Ennigerloh, 1815 – Berlín, 1897) para que se centrara en la primera disciplina, ofreciéndose ambos a dirigir su tesis doctoral. Se doctoró poco después en 1864 y comenzó a partir de ese momento una prolífica carrera. Sus trabajos se centraron fundamentalmente en análisis complejo, geometría diferencial y el cálculo de variaciones, entre otros. Desarrolló un caso especial de la famosa desigualdad, redefinida por el ruso Bunyakovsky, que veremos en adelante. Dicha desigualdad es ampliamente utilizada en matemáticas en campos tan diversos como el análisis, la geometría o la teoría de la probabilidad.

Teorema 3 (Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz). *Supónganse dos funciones f y g integrables en un intervalo $[a, b]$. Se cumple*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx.$$

⁴Foto de dominio público extraída de *Wikimedia Commons* [17].

⁵Imagen de dominio público reproducida de *Wikimedia Commons* [24].

⁶Foto de dominio público reproducida de *Wikimedia Commons* [23].

Demostración. Considérese la función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por la expresión cuadrática $h(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. Completando cuadrados, resulta

$$h(\lambda) = a\left(\lambda + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Supóngase que $h(\lambda) \geq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, en particular para $\lambda = -\frac{b}{2a}$, entonces

$$h\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \geq 0.$$

Por tanto, si $h(\lambda) \geq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $a > 0$, por lo que

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \geq 0,$$

luego

$$b^2 - 4ac \leq 0.$$

Sea la función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por la expresión

$$h(\lambda) = \int_a^b (\lambda f(x) - g(x))^2 dx,$$

claramente h está bien definida y además $h(\lambda) > 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, notemos que

$$\begin{aligned} h(\lambda) &= \int_a^b (\lambda f(x) - g(x))^2 dx \\ &= \left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right) \lambda^2 - 2\left(\int_a^b f(x)g(x) dx\right) \lambda + \int_a^b (g(x))^2 dx \\ &= a\lambda^2 - 2b\lambda + c. \end{aligned}$$

Como se debe cumplir (deducido anteriormente) que $b^2 - 4ac \leq 0$, entonces

$$\left(-2\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2 - 4\int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx \leq 0,$$

luego

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2 \leq 4\int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx,$$

y finalmente

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx \quad \blacksquare$$

Consideremos en este caso las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ambas integrables en un intervalo $[a, b]$ (con $a, b > 0$) sobre un espacio vectorial euclidiano (véase *Linear algebra done right* [1, p. 166]). En particular, considérese en general que dichos extremos sean $a = n$ y $b = n + 1$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ arbitrario. Dichas funciones son linealmente independientes, por lo que su producto escalar resulta

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx > 0.$$

Además, se cumple entonces que

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 > 0.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz a las dos funciones f y g definidas, el miembro izquierdo de la desigualdad resulta,

$$\left(\int_n^{n+1} \left(\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx\right)^2 = \left(x\Big|_n^{n+1}\right)^2 = 1.$$

Veamos ahora el miembro derecho de la desigualdad

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} x dx \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx &= \frac{x^2}{2}\Big|_n^{n+1} \ln(x)\Big|_n^{n+1} \\ &= \left(\frac{(n+1)^2}{2} - \frac{n^2}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln(n)) \\ &= \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{2} - \frac{n^2}{2}\right) \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple que

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

5. Demostración mediante herramientas analíticas

Definimos la función $\mathcal{F}(n)$ para $n > 0$ mediante la ecuación

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\mathcal{F}(n)} = e.$$

Resolviendo dicha ecuación para $\mathcal{F}(n)$ resulta que

$$(8) \quad \mathcal{F}(n) = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n.$$

Veamos en primer lugar que la función \mathcal{F} es monótonamente creciente. Es decir, para todo $n \geq 1$, $\mathcal{F}'(n) > 0$. La derivada de dicha función resulta

$$(9) \quad \mathcal{F}'(n) = \frac{1}{\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^2 n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} - 1.$$

Para demostrar que $\mathcal{F}'(n) > 0$, consideremos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x), \\ g(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x}}. \end{aligned}$$

La diferencia de las derivadas primeras de las dos funciones anteriores resulta

$$g'(x) - f'(x) = \frac{x+2-2\sqrt{1+x}}{2(1+x)^{3/2}}.$$

Como $(x+2) > 2\sqrt{1+x}$ para todo $x > 0$, entonces

$$g'(x) - f'(x) > 0,$$

y por lo tanto, ya que $g(0) = f(0) = 0$, entonces

$$\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}.$$

Sustituyendo $x = \frac{1}{n}$ en la desigualdad anterior y elevando al cuadrado ambos miembros se llega a

$$\frac{1}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^2} > 1.$$

De la expresión (9) y la desigualdad anterior, resulta que $\mathcal{F}'(n) > 0$.

Por lo tanto, la función de la expresión (8) resulta estrictamente creciente. Para demostrar que dicha función está acotada superiormente, veamos el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

Sustituyendo la serie de potencias

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \dots = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como la función $\mathcal{F}(n)$ es estrictamente creciente, y $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(n) = \frac{1}{2}$, entonces se puede concluir que $\mathcal{F}(n) < \frac{1}{2}$, y por lo tanto

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\mathcal{F}(n)} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Referencias

- [1] AXLER, Sheldon. *Linear algebra done right*. 3.ª ed. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, 2015. ISBN: 978-3-319-11079-0; 978-3-319-11080-6.
- [2] BARNES, C. W. «Notes: Euler's Constant and e». En: *American Mathematical Monthly* 91.7 (1984), págs. 428-430. ISSN: 0002-9890. <https://doi.org/10.2307/2322999>.
- [3] BECKENBACH, E. F. y BING, R. H. «On generalized convex functions». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 58 (1945), págs. 220-230. ISSN: 0002-9947. <https://doi.org/10.2307/1990283>.
- [4] BELHOSTE, Bruno. *Augustin-Louis Cauchy. A Biography*. Springer New York, 1991. ISBN: 978-1-4612-7752-1.
- [5] BESSENYEI, Mihály. «The Hermite-Hadamard inequality on simplices». En: *American Mathematical Monthly* 115.4 (2008), págs. 339-345. ISSN: 0002-9890. <https://doi.org/10.1080/00029890.2008.11920533>.
- [6] BROTHERS, Harlan J. y KNOX, John A. «New closed-form approximations to the logarithmic constant e». En: *The Mathematical Intelligencer* 20.4 (1998), págs. 25-29. ISSN: 0343-6993. <https://doi.org/10.1007/BF03025225>.

- [7] GOODMAN, T. N. T. «Notes: Maximum Products and $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ». En: *American Mathematical Monthly* 93.8 (1986), págs. 638-640. ISSN: 0002-9890. <https://doi.org/10.2307/2322326>.
- [8] GRABINER, Judith V. *The origins of Cauchy's rigorous calculus*. MIT Press, Cambridge, Mass.-London, 1981. ISBN: 978-0-262-07079-9.
- [9] HADAMARD, Jacques. «Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann». En: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 4.^a ép. 9 (1893), págs. 171-215.
- [11] KHATTRI, Sanjay K. «Three proofs of the inequality $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+0.5}$ ». En: *American Mathematical Monthly* 117.3 (2010), págs. 273-277. ISSN: 0002-9890. <https://doi.org/10.4169/000298910X480126>.
- [12] KNOX, John A. y BROTHERS, Harlan J. «Novel series-based approximations to e ». En: *The College Mathematics Journal* 30.4 (1999), págs. 269-275. ISSN: 0746-8342. <https://doi.org/10.2307/2687664>.
- [13] KOLMOGOROV, Andréi N. y FOMIN, Sergei V. *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. Moscú, URSS: MIR, 1975. ISBN: 978-0-00-003992-7.
- [14] NICOLÁS MARTÍNEZ, Pablo. «Estudio del origen del número e y de sus aplicaciones en diversos campos de las matemáticas». En: *TEMat* 4 (2020), págs. 15-26. ISSN: 2530-9633.
- [15] PICKOVER, Clifford A. *The math book*. From Pythagoras to the 57th dimension, 250 milestones in the history of mathematics. Sterling, New York, 2009. ISBN: 978-1-4027-5796-9.
- [18] SÁNCHEZ MUÑOZ, José Manuel. «Hermite y la trascendencia de e ». En: *Pensamiento Matemático* 1.1 (2011). ISSN: 2174-0410.
- [19] SÁNCHEZ MUÑOZ, José Manuel. «Riemann, más que una hipótesis». En: *Colección Historias de Matemáticas, Monografías (versión ebook)* (2021). ISSN: 2792-5080.
- [20] TANTON, James S. *Encyclopedia of Mathematics*. Facts On File, Inc., 2005. ISBN: 978-0-8160-5124-3.
- [21] WANG, Chung-Lie. «The Teaching of Mathematics: Simple Inequalities And Old Limits». En: *American Mathematical Monthly* 96.4 (1989), págs. 354-355. ISSN: 0002-9890. <https://doi.org/10.2307/2324094>.
- [22] YANG, Hansheng y YANG, Heng. «The Arithmetic-Geometric Mean Inequality and the Constant e ». En: *Mathematics Magazine* 74.4 (2001), págs. 321-323. ISSN: 0025-570X. URL: <http://www.jstor.org/stable/2691107?origin=pubexport>.

Imágenes

- [10] *Hadamard2*. Wikimedia Commons. (Visitado 23-05-2023).
- [16] PIROU. *Charles Hermite circa 1887*. Wikimedia Commons, 1887. (Visitado 23-05-2023).
- [17] REUTLINGER, Charles H. *Agustin-Louis Cauchy*. Wikimedia Commons. (Visitado 23-05-2023).
- [23] ZIPFEL, Ludwig. *ETH-BIB-Schwarz, Hermann Amand*. Wikimedia Commons, 1890. (Visitado 23-05-2023).
- [24] ШЕРЕР, Набгольц и Ко. *Буняковский*. Wikimedia Commons, 1888. (Visitado 23-05-2023).