

# TEMat

## Recopilación de resoluciones del problema de Basilea

✉ Vicent Navarro Arroyo  
Universitat Politècnica de Catalunya  
[vicent.navarro@estudiantat.upc.edu](mailto:vicent.navarro@estudiantat.upc.edu)

**Resumen:** El problema de Basilea se basa en hallar si, en efecto, la suma de los inversos de los cuadrados naturales converge y, en caso afirmativo, a qué valor. Este problema fue resuelto, primero, por Euler, pero se han conseguido numerosas pruebas tras él. Recopilaremos algunas de sus demostraciones más importantes y mostraremos la versatilidad de los enfoques hacia este problema señalando el potencial de determinadas teorías (en particular, la teoría de series de Fourier), las demostraciones más insospechadas y directas, así como los puentes que se tienden entre varias áreas de las matemáticas.

**Abstract:** The Basel Problem consists in finding if, actually, the sum of inverse squares of the natural numbers converges and to what value. This problem was first solved by Euler but numerous proofs have been obtained later. We compile some of its most important proofs and show the versatility of approaches to the Basel Problem by pointing out the potential of certain theories (particularly, the Fourier series theory), the most direct and unsuspected proofs, as well as the bridges that are built between various areas of mathematics.

**Palabras clave:** Basilea, Cauchy, Euler, series.

**MSC2020:** 00A09, 42A20.

**Recibido:** 18 de diciembre de 2021.

**Aceptado:** 13 de junio de 2023.

**Agradecimientos:** Este artículo fue preparado durante la realización de mis prácticas externas curriculares por la Universitat de València (UV) en el Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada (IUMPA) de la Universitat Politècnica de València (UPV). Agradezco a mi tutor José Bonet Solves su ayuda y guía en la realización de este artículo. A su vez, doy las gracias a Oscar Blasco de la Cruz y a Jesús García Falset por sus recomendaciones bibliográficas.

**Referencia:** NAVARRO ARROYO, Vicent. «Recopilación de resoluciones del problema de Basilea». En: *TEMat*, 7 (2023), págs. 27-40. ISSN: 2530-9633. URL: <https://temat.es/articulo/2023-p27>.

© Este trabajo se distribuye bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento 4.0 Internacional <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## 1. Introducción

El Problema de Basilea es un problema matemático clásico que consiste en hallar si, en efecto, la serie de los inversos de los cuadrados naturales converge y, en caso afirmativo, a qué valor. Esta cuestión fue inicialmente propuesta por Pietro Mengoli (1650) [16] y debe su relevancia a varios motivos. El primero es que fue durante casi un siglo un problema que resistió al envite de muchos matemáticos destacados, como el propio Pietro Mengoli (1650) o los hermanos Jakob y Johann Bernouilli (1704) [16]. La segunda razón es que su planteamiento y posterior resolución motivaron [3] la definición de la famosa función zeta de Riemann, la cual está íntimamente relacionada con la distribución de los números primos [13]. En particular, la función Zeta de Riemann se define como sigue.

**Definición 1** (función zeta de Riemann). Sea  $s$  un número complejo cuya parte real es estrictamente mayor que 1. Es decir,  $s \in \mathbb{C}$  y  $\text{Re}(s) > 1$ . Entonces, se define la función Zeta de Riemann evaluada sobre  $s$  como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Notemos que para  $s = 2$  se obtiene la serie del Problema de Basilea.

El Problema de Basilea fue resuelto, primeramente, en el año 1735 por Euler [16], quién demostró que la serie de los inversos de los cuadrados naturales converge y que lo hace a un valor sorprendente:  $\frac{\pi^2}{6}$ . Así, este resultado nos brinda una notable relación entre el conjunto de los números naturales,  $\mathbb{N}$ , y los irracionales mediante uno de los números más importantes, si no el que más, de la historia,  $\pi$ .

Aunque Euler resolvió este problema, otras muchas más resoluciones fueron desarrolladas con el paso del tiempo<sup>1</sup>. Algunas usan herramientas modernas y otras utilizan propiedades básicas o métodos menos evidentes que prueban la riqueza de este problema y la versatilidad de sus demostraciones, a pesar de que en su momento fue todo un misterio.

Con el presente trabajo pretendemos recopilar algunas de las demostraciones más importantes del problema de Basilea con el afán de divulgar el conocimiento matemático entre los estudiantes. Además, queremos crear un pequeño manual de demostraciones que muestre el potencial de determinadas teorías (particularmente, la teoría de Series de Fourier) (pruebas 5,6 y 8), demostraciones directas e insospechadas (pruebas 3 y 4), así como los puentes que se tienden entre varias áreas de las Matemáticas (prueba 7).

## 2. La prueba de Euler

La primera solución conocida del Problema de Basilea fue obtenida por Euler (1735). Por tanto, esta será la primera demostración que presentaremos.

La prueba de Euler [5] es simple y prácticamente directa. Se compone de los siguientes pasos:

1. *Desarrollar  $\text{sen } \pi x$  como producto infinito de factores lineales.*

Euler quiso extender propiedades de los polinomios finitos a series para atacar el problema de la suma de los inversos de los cuadrados naturales. Para ello, comenzó desarrollando  $\text{sen } \pi x$  como producto infinito de factores lineales como sigue.

$$(1) \quad \text{sen } \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = \pi x (1 - x^2) \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9}\right) \dots$$

Notemos que estamos imponiendo raíces en los ceros de  $\text{sen } \pi x$ , que son los números enteros. Más adelante (véase el teorema 2) se justificará por qué podemos factorizar de esta forma  $\text{sen } \pi x$ .

---

<sup>1</sup>De hecho, Johann Bernouilli, tras conocer que la serie convergía a  $\frac{\pi^2}{6}$ , ofreció una prueba que resultó ser equivalente a la de Euler [16].

2. Desarrollar  $\sin \pi x$  por series de MacLaurin (series de Taylor centradas en 0).

Si desarrollamos  $\sin \pi x$  por series de MacLaurin se sigue que

$$(2) \quad \sin \pi x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\pi x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \pi x - \frac{\pi^3}{6} x^3 + \frac{\pi^5}{120} x^5 - \dots$$

Además, la ecuación (1) se puede seguir desarrollando como sigue:

$$(3) \quad \sin \pi x = \pi x - \pi x^3 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots\right) + \pi x^5 \left(\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 9} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{4 \cdot 9} + \dots\right) - \dots$$

Observamos que el coeficiente del término cúbico del desarrollo anterior corresponde a lo que queremos calcular.

3. Comparar los coeficientes de  $x^3$  de ambos desarrollos.

Los coeficientes de  $x^3$  de la ecuación (2) y la ecuación (3) deben coincidir. Por tanto,

$$\begin{aligned} -\pi \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots\right) &= -\frac{\pi^3}{6}, \\ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots &= \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

O, equivalentemente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad \blacksquare$$

Toda la prueba se sigue naturalmente, pero hay un paso crucial de la demostración que no es para nada trivial. ¿Estamos seguros de que  $\sin(\pi x)$  se puede desarrollar como un producto infinito de factores lineales? La respuesta es que sí, aunque en 1735 Leonhard Euler desconocía una prueba rigurosa de este hecho. No fue hasta la llegada de Weierstrass que en el siglo XIX se dio una respuesta afirmativa con el teorema de factorización<sup>2</sup>.

**Teorema 2** (teorema de factorización de Weierstrass [6]). *Sea  $f$  una función entera ( $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ) y sean  $\{a_n\}$  los ceros de  $f$  repetidos de acuerdo a su multiplicidad. Supongamos que  $f$  tiene un cero en  $z = 0$  de orden  $m \geq 0$  (si  $m = 0$  entonces  $f(0) \neq 0$ ). Entonces, existe una función entera  $g$  y una sucesión de enteros  $\{p_n\}$  tales que*

$$f(z) = z^m \exp(g(z)) \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left( \frac{z}{a_n} \right).$$

donde  $E_n$  denota la  $n$ -ésima función elemental y verifica que

$$E_n(z) = \begin{cases} (1 - z) & n = 0, \\ (1 - z) \exp\left(\frac{z^1}{1} + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n}\right) & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Finalmente, para nuestro caso particular, se puede demostrar que la factorización de Weierstrass para  $p_n = 1, g(z) = \log(\pi), m = 1$  y  $\{a_n\}$ , los ceros de  $\sin \pi z$  repetidos de acuerdo a su multiplicidad, corresponde a la función  $f(z) = \sin \pi z$ .

### 3. La prueba de Cauchy

Una de las pruebas más elementales del Problema de Basilea se la debemos al gran matemático francés Cauchy [4]. Dicha prueba requiere solo de conocimientos básicos de trigonometría y unos pocos resultados previos bien conocidos, como la identidad de Moivre (véase la propiedad 4) o el teorema binomial (ver

<sup>2</sup>Este teorema es una generalización del teorema fundamental del álgebra.

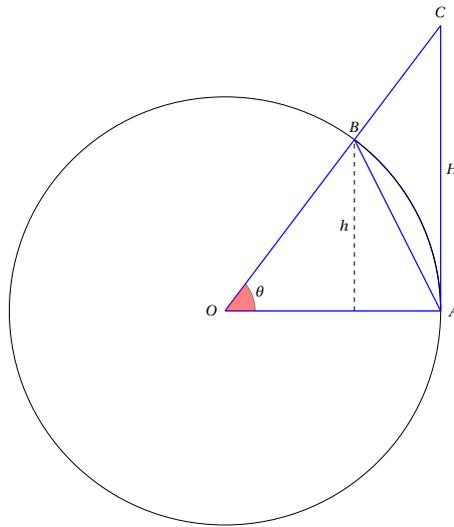


Figura 1: Circunferencia  $C(O, r)$  y los puntos  $A, B, C$

el teorema 5). Un siglo después, en 1954, volvió a aparecer de la mano de los hermanos Yaglom en su libro *Challenging mathematical problems with elementary solutions*. [21]. En 1982 también apareció en la revista *Eureka* de la mano de T.J. Ransford [11]. Finalmente, una prueba animada y guiada puede verse en el canal de Youtube *Rise to the Equation* [14].

La demostración de Cauchy comienza, y se basa, en una desigualdad geométrica que demostraremos a continuación. Esta propiedad nos ofrece una cota superior e inferior del inverso del cuadrado de un ángulo. Posteriormente, veremos que, a partir de este lema, podremos acotar inferiormente y superiormente la serie de  $\frac{1}{n^2}$  por límites coincidentes. Finalmente, resolveremos dichos límites.

**Lema 3.** Sea  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , se verifica que

$$\cot^2 \theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cot^2 \theta.$$

*Demostración.* Consideremos la circunferencia  $C(O, r)$  de centro  $O$  y radio  $r > 0$ , los puntos de la circunferencia  $A$  y  $B$  tal que  $\angle AOB = \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  y el punto  $C$  intersección de la semirrecta  $OB$  y la tangente en  $A$ . Denotamos por  $h$  la altura del triángulo  $\triangle OBA$  y por  $H$  la del triángulo  $\triangle OCA$ . Ilustramos este hecho en la figura 1.

Si  $A_1$  es el área del triángulo  $\triangle OBA$ ,  $A_2$  el área del sector circular definido por  $\theta$  y  $A_3$  el área del triángulo  $\triangle OCA$ , entonces está claro, viendo la figura 1, que  $A_1 < A_2 < A_3$ , ya que el triángulo  $\triangle OBA$  está incluido en el sector circular definido por  $\theta$  y este, a su vez, está incluido en el triángulo  $\triangle OCA$ . Por otra parte, las distintas áreas se pueden expresar como

$$A_1 = \frac{rh}{2} = \frac{r^2 \sin \theta}{2}, \quad A_2 = \frac{r^2 \theta}{2}, \quad A_3 = \frac{rH}{2} = \frac{r^2 \tan \theta}{2}.$$

Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{r^2 \sin \theta}{2} < \frac{r^2 \theta}{2} < \frac{r^2 \tan \theta}{2} &\iff \sin \theta < \theta < \tan \theta \\ &\implies \cot^2 \theta < \frac{1}{\theta^2} \leq \csc^2 \theta && \text{tomando } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ &\implies \cot^2 \theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cot^2 \theta && \text{ya que } \csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Pretendemos acotar  $\frac{1}{n^2}$ . Así, aprovechando el lema 3 y sustituyendo  $\theta = \frac{n\pi}{2N+1}$ , para  $1 \leq n \leq N$  y  $n, N \in \mathbb{N}$ , obtenemos que

$$\cot^2 \left( \frac{n\pi}{2N+1} \right) < \frac{(2N+1)^2}{n^2 \pi^2} < 1 + \cot^2 \left( \frac{n\pi}{2N+1} \right).$$

Multiplicando cada inecuación por  $\frac{\pi^2}{(2N+1)^2}$  llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{\pi^2}{(2N+1)^2} \cot^2\left(\frac{n\pi}{2N+1}\right) < \frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2}{(2N+1)^2} \left[1 + \cot^2\left(\frac{n\pi}{2N+1}\right)\right].$$

Sumando todas las inecuaciones para  $1 \leq n \leq N$  se tiene que

$$\frac{\pi^2}{(2N+1)^2} \sum_{n=1}^N \cot^2\left(\frac{n\pi}{2N+1}\right) < \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2}{(2N+1)^2} \sum_{n=1}^N \left[1 + \cot^2\left(\frac{n\pi}{2N+1}\right)\right].$$

Aplicando límites para  $N \rightarrow +\infty$  llegamos a que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi^2}{(2N+1)^2} \sum_{n=1}^N \cot^2\left(\frac{n\pi}{2N+1}\right) \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{N\pi^2}{(2N+1)^2} + \sum_{n=1}^N \left( \frac{\pi^2}{(2N+1)^2} \cot^2\left(\frac{n\pi}{2N+1}\right) \right) \right).$$

Como  $\frac{N\pi^2}{(2N+1)^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$  y suponiendo que el límite  $\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi^2}{(2N+1)^2} \sum_{n=1}^N \cot^2\left(\frac{n\pi}{2N+1}\right) \right)$  existe, concluimos que

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi^2}{(2N+1)^2} \sum_{n=1}^N \cot^2\left(\frac{n\pi}{2N+1}\right) \right).$$

Así pues, acabamos de encontrar una expresión de  $\zeta(2)$ . Veamos que el anterior límite existe y resolvámoslo. Para ello, deduciremos el valor del sumatorio del límite del término de la derecha de la ecuación (4), es decir,  $\sum_{n=1}^N \cot^2\left(\frac{n\pi}{2N+1}\right)$ . Primero, recordemos la propiedad de Moivre.

**Propiedad 4** (de Moivre). Si  $\theta \in [0, 2\pi[$  entonces

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^m = \cos(m\theta) + i \operatorname{sen}(m\theta), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

*Demostración.* Múltiples pruebas de esta propiedad se pueden consultar en el artículo *A Couple of Proofs of De Moivre's Theorem* [12]. ■

Como  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , dividiendo por  $\operatorname{sen}^m \theta$  la identidad de la propiedad 4 se obtiene que

$$(5) \quad \frac{\cos(m\theta)}{\operatorname{sen}^m \theta} + i \frac{\operatorname{sen}(m\theta)}{\operatorname{sen}^m \theta} = (\cot \theta + i)^m.$$

Para desarrollar el binomio del término de la derecha de la ecuación (5) enunciamos el llamado teorema binomial.

**Teorema 5** (teorema binomial). Sean  $x, y \in \mathbb{C}$  y  $m \in \mathbb{N}$ . Entonces,

$$(x + y)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{m-k} y^k.$$

*Demostración.* Una prueba por inducción se puede consultar en el enlace de *Proof of the binomial theorem by mathematical induction* [10]. ■

Entonces, por el teorema binomial, la parte derecha de la igualdad de la ecuación (5) queda como

$$\begin{aligned} (\cot \theta + i)^m &= \binom{m}{0} \cot^m \theta + \binom{m}{1} i \cot^{m-1} \theta + \dots + \binom{m}{m-1} i^{m-1} \cot \theta + \binom{m}{m} i^m \\ &= \left( \binom{m}{0} \cot^m \theta - \binom{m}{2} \cot^{m-2} \theta + \dots \right) + i \left( \binom{m}{1} \cot^{m-1} \theta - \binom{m}{3} \cot^{m-3} \theta + \dots \right). \end{aligned}$$

Entonces, igualando las partes imaginarias de la ecuación (5) tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(m\theta)}{\operatorname{sen}^m \theta} = \binom{m}{1} \cot^{m-1} \theta - \binom{m}{3} \cot^{m-3} \theta + \dots$$

Queremos transformar el lado derecho de esta identidad en un polinomio. Tomando  $m = 2N + 1$  y  $\theta = \frac{n\pi}{2N+1}$  llegamos a que

$$0 = \binom{2N+1}{1} \cot^{2N} \theta - \binom{2N+1}{3} \cot^{2N-2} \theta + \dots$$

Seguidamente, si denotamos  $x = \cot^2 \theta$ , reescribimos la anterior expresión como sigue:

$$(6) \quad 0 = \binom{2N+1}{1} x^N - \binom{2N+1}{3} x^{N-1} \pm \dots + (-1)^N \binom{2N+1}{2N+1}.$$

Invocamos ahora el teorema de Vieta pues nos interesa obtener una expresión de las sumas de las raíces de la ecuación (6), las cuales son conocidas.

**Proposición 6** (fórmulas de Vieta). *Dado un polinomio  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$  y dadas  $z_i$  sus raíces, entonces*

$$z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + \dots + z_{n-2} z_{n-1} + z_{n-1} z_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

En general,

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

*Demostración.* Una prueba se puede encontrar en el capítulo 3 del libro *A course in algebra* [20]. ■  
 Por la proposición 6, el polinomio de la ecuación (6) cumple que, si  $x_n$ ,  $1 \leq n \leq N$  son sus raíces, entonces

$$\sum_{n=1}^N x_n = \frac{\binom{2N+1}{3}}{\binom{2N+1}{1}} = \frac{2N(2N-1)}{6}.$$

o, equivalentemente,

$$\sum_{n=1}^N \cot^2 \left( \frac{n\pi}{2N+1} \right) = \frac{2N(2N-1)}{6}.$$

Notamos que acabamos de encontrar una identidad que nos ayudaría a resolver la ecuación (4). En efecto, sustituyendo obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi^2}{(2N+1)^2} \frac{2N(2N-1)}{6} \right).$$

Finalmente, resolviendo el límite del término de la derecha anterior, se deduce que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad \blacksquare$$

## 4. La prueba de la integral doble

Esta es una prueba clara y simple que puede ser enseñada en cursos iniciales de cálculo. Sus orígenes no son claros pues, aunque apareció por primera vez de la mano de William J. LeVeque [8] en 1956, este aseguró que no era original suya. Más tarde, Tom Apostol la recupera como una prueba que no parece documentada en la literatura científica [2]. En nuestro caso, seguiremos la demostración de Apostol.

La idea de la prueba de Apostol es evaluar de dos formas distintas una misma integral. En concreto, evaluar la integral doble siguiente:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy.$$

Para la primera evaluación notamos que el integrando es el resultado de una serie geométrica infinita. Es

decir,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^{1-\varepsilon} \int_0^{1-\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n dx dy \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^{1-\varepsilon} \int_0^{1-\varepsilon} x^n y^n dx dy \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \left( \int_0^{1-\varepsilon} x^n dx \right) \left( \int_0^{1-\varepsilon} y^n dy \right) \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{(1-\varepsilon)^{n+1}}{(n+1)^2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2).
 \end{aligned}$$

Por otro lado, para la segunda evaluación buscamos un cambio de variable. Notemos que el dominio de integración sería el de la figura 2a.

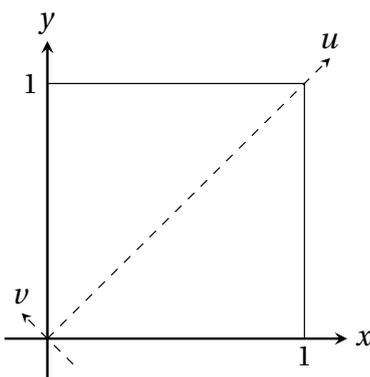
Para la segunda evaluación, consideramos la sustitución  $u = \frac{y+x}{2}$  y  $v = \frac{y-x}{2}$  o, equivalentemente,  $x = u - v$  e  $y = u + v$ . En este caso, transformamos el dominio de integración (representado en la figura 2a) en un cuadrado girado 45° y reducido en un factor de  $\sqrt{2}$ . Notemos además que dicho cuadrado puede dividirse en cuatro partes de igual área. En resumen, el nuevo dominio de integración tras el cambio de variable es el de la figura 2b. Así, bajo el nuevo dominio de integración, la integral queda como

$$I = 2 \iint_S \frac{1}{1-u^2+v^2} dv du,$$

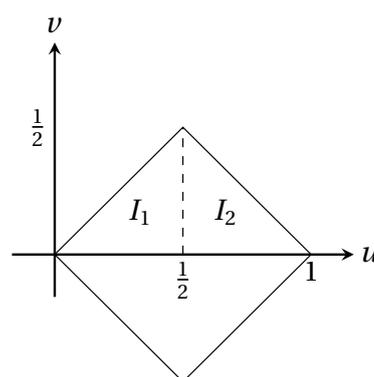
donde  $S$  es el cuadrado de vértices  $(0, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ,  $(1, 0)$  y  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  (ver la figura 2b).

No obstante, observemos que el integrando de la anterior integral es simétrico alrededor de 0, respecto  $v$ . Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}
 I &= 2(I_1 + I_2) = 4 \int_0^{1/2} \left( \int_0^u \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du + 4 \int_{1/2}^1 \left( \int_0^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du \\
 &= 4 \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \left( \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) du + 4 \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \left( \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \right) du.
 \end{aligned}$$



(a) Dominio de integración de la integral y candidatos a sustituciones.



(b) Nuevo dominio de integración de la integral.

Figura 2: Figuras representando ambos dominios de integración para  $I$ .

<sup>3</sup>Notemos que la función límite no es acotada en  $[0, 1]^2$ . Aún así, para todo  $\varepsilon$ , por el teorema de Dini, la convergencia de la serie es uniforme. Por tanto, podemos intercambiar la serie bajo el signo de la integral y bajo el signo del límite.

<sup>4</sup>Por el teorema de Fubini.

Para continuar haremos una nueva sustitución. En concreto,  $u = \sin \theta$  para  $I_1$  y  $u = \cos(2\theta)$  para  $I_2$ . Obtenemos, por un lado, que

$$\begin{aligned} 2I_1 &= 4 \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du \\ &= 4 \int_0^{\pi/6} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} \arctan\left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}}\right) d\theta \end{aligned} \quad \text{tras el cambio } u = \sin \theta.$$

Observemos que el término del integrando que multiplica a la evaluación de arctan, es decir,  $\frac{\cos \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}}$ , es 1. Por otro lado, el interior de la evaluación de arctan es, precisamente, la función tangente. En definitiva, se tiene que

$$2I_1 = 4 \int_0^{\pi/6} \theta d\theta = \frac{\pi^2}{18}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} 2I_2 &= 4 \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du \\ &= 8 \int_0^{\pi/6} \frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{1-\cos^2(2\theta)}} \arctan\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{\sqrt{1-\cos^2(2\theta)}}\right) d\theta \end{aligned} \quad \text{definiendo } u = \cos(2\theta).$$

Notemos que el término del integrando que multiplica a la evaluación de arctan, es decir,  $\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{1-\cos^2 2\theta}}$ , es 1. Por otro lado, el interior de la evaluación de arctan es, precisamente, la función tangente. En definitiva, se tiene que

$$2I_2 = 8 \int_0^{\pi/6} \theta d\theta = \frac{\pi^2}{9}.$$

Finalmente, deducimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = I = 2(I_1 + I_2) = \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{9} = \frac{\pi^2}{6}. \quad \blacksquare$$

## 5. La primera prueba por series de Fourier

Presentamos ahora una prueba del problema de Basilea usando series de Fourier, la cual es ya bien conocida y clásica y se puede encontrar en múltiples manuales sobre la teoría de Fourier.

Usaremos que las funciones trigonométricas forman un sistema ortonormal completo en  $L^2$  por el teorema de Riesz-Fischer [18]. Denotamos  $e_n(x) = \exp(2\pi i n x)$  para  $n \in \mathbb{Z}$  y  $\langle, \rangle$  el producto escalar de  $L^2[0, 1]$ . Notamos que  $e_n$  es un conjunto ortonormal en  $L^2[0, 1]$ . Usaremos la *identidad de Parseval*, que enunciamos a continuación, para deducir una expresión de la serie de los inversos de los cuadrados.

**Teorema 7** (identidad de Parseval). *Sea  $\{\varphi_n\}$  una sucesión ortonormal completa de un espacio de Hilbert complejo  $X$ . Si  $f, g \in X$  entonces*

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \langle g, \varphi_n \rangle.$$

**Demostración.** El enunciado y la prueba de este resultado se puede consultar en *Introduction to classical real analysis* [18] o en *An introduction to harmonic analysis* [7].  $\blacksquare$

<sup>5</sup>Estamos empleando la integral indefinida  $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$ .

Entonces, como de hecho  $L^2[0, 1]$  es un espacio de Hilbert real completo [15], por la identidad de Parseval se tiene que, para toda  $f \in L^2[0, 1]$ ,

$$\langle f, f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2.$$

Como anotación, esta última expresión también suele recibir el nombre de *identidad de Parseval*.

Si escogemos  $f(x) = x$ , entonces

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$\langle f, e_0 \rangle = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$\langle f, e_n \rangle = \int_0^1 x e^{2\pi i n x} dx = \left[ \frac{x e^{2\pi i n x}}{2\pi i n} \right]_0^1 - \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 e^{2\pi i n x} dx = \frac{1}{2\pi i n} \left( 1 - \left[ \frac{1}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} \right]_0^1 \right) = \frac{1}{2\pi i n}.$$

Por tanto, por la Identidad de Parseval, llegamos a que

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^2}.$$

En definitiva, concluimos que

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}. \quad \blacksquare$$

## 6. La segunda prueba por series de Fourier

La siguiente prueba es otra demostración del problema de Basilea a través de la teoría de series de Fourier sugiriendo, así, el gran potencial de esta teoría. Finalmente, cabe destacar que, como la prueba anterior, es una resolución clásica de la serie de Basilea que se puede encontrar en muchos manuales de análisis de Fourier.

Usaremos el teorema de Dirichlet que nos permite encontrar funciones que converjan a su serie de Fourier. Con la función adecuada, y el desarrollo de su serie de Fourier, podremos deducir, directamente, la convergencia de la serie del problema de Basilea. Enunciamos el teorema de Dirichlet.

**Teorema 8** (teorema de Dirichlet). *Sea  $f$  función monótona y acotada en  $[-\pi, \pi]$ . Entonces, para cualquier  $x \in [-\pi, \pi]$  la serie de Fourier de  $f(x)$  converge puntualmente al valor  $\frac{f(x^+) + f(x_-)}{2}$ , donde  $f(x^+) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$  y  $f(x_-) = \lim_{t \rightarrow x^-} f(t)$  son los límites a la derecha y a la izquierda de  $x$ , respectivamente.*

*En particular, si  $f$  es continua en  $x$ , la serie de Fourier de  $f(x)$  converge a  $f(x)$ .*

*Demostración.* Se puede consultar una demostración de este hecho en *Introduction to classical real analysis* [18]. ■

Así, si escogemos  $f(x) = x(1 - x)$  en  $[0, 1]$  y calculamos su serie de Fourier siguiendo

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x))$$

y tomando  $T = 1$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$  tendremos lo siguiente:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_a^b f(x) dx = \int_0^1 x(1 - x) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \cos(n\omega x) dx = 2 \int_0^1 x(1 - x) \cos(2\pi n x) dx = -\frac{1}{\pi^2 n^2}.$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \sin(n\omega x) dx = 2 \int_0^1 x(1 - x) \sin(2\pi n x) dx = 0.$$

La última igualdad del término  $a_n$  se obtiene aplicando integración por partes a la integral del término de la izquierda. Por otro lado, la última igualdad del término  $b_n$  se debe a que el integrando es antisimétrico alrededor de  $\frac{1}{2}$ .

Finalmente, obtenemos que

$$x(1-x) = \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{\pi^2 n^2}.$$

Evalutando  $f(x)$  en  $x = 0$  se sigue que

$$0 = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

o, equivalentemente,

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}. \quad \blacksquare$$

## 7. La prueba probabilística

Uno de las demostraciones más curiosas e insospechadas del problema de Basilea que se pueden encontrar es un argumento usando nociones de teoría de la probabilidad. Efectivamente, se pone de manifiesto cómo áreas tan diferentes como la probabilidad y el análisis matemático presentan puentes entre ellas. Esta demostración fue propuesta en 2011 por Luigi Pace [9] y ha abierto las puertas a estudiar la relación entre las variables independientes de Cauchy y  $\zeta(2k)$ .

Consideremos las variables aleatorias independientes  $X_1, X_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , cuyas funciones de densidad son  $f_{X_i} : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ ,  $i = 1, 2$ . Es decir, se verifica que

$$P(a \leq X_i \leq b) = \int_a^b f_{X_i}(t) dt.$$

Definimos  $Y = \frac{X_1}{X_2}$  y, además, se cumple el siguiente resultado.

**Lema 9** (Stirzaker [17]). *La función de densidad de  $Y = \frac{X_1}{X_2}$  es*

$$f_Y(s) = \int_0^{\infty} t f_{X_1}(ts) f_{X_2}(t) dt.$$

*Demostración.* Por la distribución conjunta y sabiendo que  $X_1$  y  $X_2$  son independientes, tenemos que

$$\begin{aligned} P(a \leq Y \leq b) &= P(aX_2 \leq X_1 \leq bX_2) \\ &= \int_0^{\infty} \int_{at_2}^{bt_2} f_{X_1}(t_1) f_{X_2}(t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^{\infty} \int_a^b t_2 f_{X_1}(t_2 u) f_{X_2}(t_2) du dt_2 && \text{tomando el cambio } u = \frac{t_1}{t_2} \\ (7) \quad &= \int_a^b \int_0^{\infty} t_2 f_{X_1}(t_2 u) f_{X_2}(t_2) dt_2 du. \end{aligned}$$

Acabamos de demostrar el lema 9. \blacksquare

Asignamos la **la distribución media de Cauchy** a  $X_1, X_2$ , que es

$$f_{X_i}(t) = \frac{2}{\pi(1+t^2)}.$$

Aplicando el lema 9, podemos obtener la función de densidad de la variable  $Y$ .

$$\begin{aligned}
 f_Y(s) &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{t}{(1+t^2s^2)(1+t^2)} dt \\
 &= \frac{2}{\pi^2(s^2-1)} \left[ \ln \left( \frac{1+t^2s^2}{1+t^2} \right) \right]_0^\infty \\
 &= \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln s}{s^2-1}.
 \end{aligned}$$

(8)

Integrando (8) entre 0 y 1 y teniendo en cuenta que  $X_1$  y  $X_2$  son variables independientes, llegamos a que

$$\frac{1}{2} = P(0 < Y < 1) = \int_0^1 f_Y(s) ds = \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 -\frac{\ln s}{1-s^2} ds.$$

Por tanto, se sigue que

$$\int_0^1 -\frac{\ln s}{1-s^2} ds = \frac{\pi^2}{8}.$$

Sabemos que  $\sum_{n=0}^\infty s^{2n} = \frac{1}{1-s^2}$  para  $|s| < 1$  ( $0 < s < 1$ ). Así,

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^1 -\frac{\ln s}{1-s^2} ds = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_\epsilon^{1-\epsilon} \sum_{n=0}^\infty -s^{2n} \ln s ds \right) = \sum_{n=0}^\infty \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_\epsilon^{1-\epsilon} -s^{2n} \ln s ds \right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Notemos que el resultado anterior es equivalente a probar el problema de Basilea. De hecho,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\zeta(2).$$

Por tanto, obtenemos, finalmente, que

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}. \quad \blacksquare$$

## 8. La prueba del Teorema de los Residuos

La última prueba que recopilamos usa una de las herramientas más importantes y útiles del análisis complejo, conocida como el *teorema de los residuos*. Esta proposición es un caso particular de uno de los resultados clave para integrales de línea de funciones holomorfas, el *teorema integral de Cauchy* o *teorema de Cauchy-Goursat* [1], y tiene grandes aplicaciones para el cálculo de integrales y series como vamos a comprobar. De hecho, esta demostración del problema de Basilea se basa, primero, en relacionar los residuos de una función holomorfa con su integral de línea sobre la frontera de un cuadrado, usando el teorema de los residuos. Seguidamente, estimando el valor de dicha integral obtendremos lo que queremos. Comenzamos enunciando el teorema de los residuos.

**Teorema 10** (teorema de los residuos). *Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{C}$  y  $f$  una función  $f \in \mathcal{H}(\Omega - A)$  donde  $A \subset \Omega$  es un conjunto numerable de las singularidades aisladas (polos y singularidades esenciales) de  $f$ . Sea  $\gamma$  un ciclo contenido en  $\Omega$  tal que  $\Omega \sim 0$  ( $\Omega$  homólogo a 0 respecto a  $\Omega$ ) y  $\gamma^* \cap A = \emptyset$ . Entonces, si  $\text{Ind}_\gamma(a)$  es el índice de  $a$  respecto de  $\gamma$ , se cumple que*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{a \in A} \text{Res}(f, a) \cdot \text{Ind}_\gamma(a).$$

<sup>7</sup>Notemos que, por simetría,  $P(X_1 \leq X_2) = P(X_2 \leq X_1)$  y  $P(X_1 \leq X_2) + P(X_2 \leq X_1) = 1$ .

<sup>8</sup>Notemos que la función límite no es acotada en  $[0, 1]^2$ . Aún así, para todo  $\epsilon$ , por el Teorema de Dini, la convergencia de la serie es uniforme. Por tanto, podemos intercambiar la serie bajo el signo de la integral y bajo el signo del límite.

<sup>9</sup>La integral se resuelve por integración por partes.

**Demostración.** Una demostración y explicación de este resultado puede encontrarse en *Mathematical analysis* [1]. ■

Ahora, consideremos la función holomorfa  $f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} = \pi z^{-2} \cot(\pi z)$ . Así,  $f$  presenta singularidades aisladas en  $\mathbb{Z}$ ; el polo de 0 es simple y tiene un residuo de  $\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} = -\frac{\pi^2}{3}$  y, para todo  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , el residuo del polo simple asociado a  $n$  es  $\text{Res}(f, n) = \lim_{z \rightarrow n} (z - n) \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} = \frac{1}{n^2}$ . Escogemos  $N \in \mathbb{N}$  y definimos  $\gamma_N$  el contorno cuadrado de vértices  $(\pm 1 \pm i)(N + \frac{1}{2})$ . Aplicando el teorema de los residuos y calculando los índices obtenemos que

$$I_N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} f(z) dz = -\frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}.$$

A continuación, pretendemos acotar la función  $f(z)$  en  $\gamma_N$  para poder estimar la integral de  $f(z)$  sobre  $\gamma_N$ . Haremos uso del siguiente lema.

**Lema 11.** Si  $\pi z = x + iy$ , entonces

$$|\cot(\pi z)|^2 = \frac{\cos^2(x) + \sinh^2(y)}{\sin^2(x) + \sinh^2(y)}.$$

**Demostración.** Primero, recordemos las siguientes identidades fundamentales,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Además, usando las fórmulas del seno y del coseno del ángulo suma, así como la definición de seno y coseno hiperbólico, se deduce que

$$\begin{aligned} \cos(x + iy) &= \cos(x) \cos(iy) - \sin(x) \sin(iy) = \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y), \\ \sin(x + iy) &= \sin(x) \cos(iy) + \cos(x) \sin(iy) = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y). \end{aligned}$$

Por tanto, sabiendo lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} |\cot(\pi z)|^2 &= \left| \frac{\cos(x + iy)}{\sin(x + iy)} \right|^2 \\ &= \left| \frac{\cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y)}{\sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y)} \right|^2 \\ &= \left| \frac{\cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y)}{\sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y)} \right|^2 \\ &= \left| \frac{(\cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y)) \cdot (\sin(x) \cosh(y) - i \cos(x) \sinh(y))}{\sin^2(x) \cosh^2(y) + \cos^2(x) \sinh^2(y)} \right|^2 \\ &= \left| \frac{(\cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y)) \cdot (\sin(x) \cosh(y) - i \cos(x) \sinh(y))}{\sin^2(x)(1 + \sinh^2(y)) + (1 - \sin^2(x)) \sinh^2(y)} \right|^2 \\ &= \frac{|\sin(x) \cos(x)(\cosh^2(y) - \sinh^2(y)) - i \sinh(y) \cosh(y)(\cos^2(x) + \sin^2(x))|^2}{(\sin^2(x) + \sinh^2(y))^2} \\ &= \frac{|\sin(x) \cos(x) - i \sinh(y) \cosh(y)|^2}{(\sin^2(x) + \sinh^2(y))^2} \\ &= \frac{\sin^2(x) \cos^2(x) + \sinh^2(y) \cosh^2(y)}{(\sin^2(x) + \sinh^2(y))^2} \\ &= \frac{\sin^2(x) \cos^2(x) + \sinh^2(y)(1 + \sinh^2(y))}{(\sin^2(x) + \sinh^2(y))^2} \\ &= \frac{\sin^2(x) \cos^2(x) + (\cos^2(x) + \sin^2(x)) \sinh^2(y) + \sinh^4(y)}{(\sin^2(x) + \sinh^2(y))^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\operatorname{sen}^2(x) + \sinh^2(y)) \cdot (\cos^2(x) + \sinh^2(y))}{(\operatorname{sen}^2(x) + \sinh^2(y))^2} \\
 &= \frac{\cos^2(x) + \sinh^2(y)}{\operatorname{sen}^2(x) + \sinh^2(y)}.
 \end{aligned}$$

Acabamos de demostrar el lema 11. ■

Por el lema 11, si  $z$  se encuentra en los bordes verticales de  $\gamma_N$ , entonces

$$|\cot(\pi z)|^2 = \frac{\sinh^2(y)}{1 + \sinh^2(y)} < 1.$$

Usando de nuevo el lema 11, si  $z$  se encuentra en los bordes horizontales de  $\gamma_N$ , entonces

$$|\cot(\pi z)|^2 \leq \frac{1 + \sinh^2(\pi(N + \frac{1}{2}))}{\sinh^2(\pi(N + \frac{1}{2}))} = \coth^2\left(\pi\left(N + \frac{1}{2}\right)\right) \leq \coth^2\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Por tanto, se deduce que  $|\cot(\pi z)| \leq \coth(\frac{\pi}{2})$  en  $\gamma_N$  y así  $|f(z)| \leq \frac{\pi \coth(\frac{\pi}{2})}{(N + \frac{1}{2})^2}$  en  $\gamma_N$ .

Así podemos estimar la integral  $I_N$  como sigue.

$$|I_N| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{z \in \gamma^*} |f(z)| \cdot \operatorname{long}(\gamma_N) = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi \coth(\frac{\pi}{2})}{(N + \frac{1}{2})^2} 8\left(N + \frac{1}{2}\right).$$

Como  $|I_N| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ , entonces  $I_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$  y, así, se tiene que  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ . ■

## Referencias

- [1] APOSTOL, Tom M. *Mathematical analysis*. Second. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1974.
- [2] APOSTOL, Tom M. «A proof that Euler missed: evaluating  $\zeta(2)$  the easy way». En: *The Mathematical Intelligencer* 5.3 (1983), págs. 59-60. ISSN: 0343-6993. <https://doi.org/10.1007/BF03026576>.
- [3] AYOUB, Raymond. «Euler and the zeta function». En: *American Mathematical Monthly* 81 (1974), págs. 1067-1086. ISSN: 0002-9890. <https://doi.org/10.2307/2319041>.
- [4] CAUCHY, Augustin-Louis. *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*. Cambridge Library Collection. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. <https://doi.org/10.1017/CB09780511693328>.
- [5] CHAPMAN, Robin. *Evaluating  $\zeta(2)$* . 2003. URL: <https://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/rjchapma/etc/zeta2.pdf> (visitado 12-06-2023).
- [6] CONWAY, John B. *Functions of one complex variable*. Vol. 11. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
- [7] KATZNELSON, Yitzhak. *An introduction to harmonic analysis*. Third. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. <https://doi.org/10.1017/CB09781139165372>.
- [8] LEVEQUE, William Judson. *Topics in number theory. Vol. I, II*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2002. ISBN: 978-0-486-42539-9.
- [9] PACE, Luigi. «Probabilistically proving that  $\zeta(2) = \pi^2/6$ ». En: *American Mathematical Monthly* 118.7 (2011), págs. 641-643. ISSN: 0002-9890. <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.118.07.641>.
- [10] PROJECT, Supporting Australian Mathematics. *Proof of the binomial theorem by mathematical induction*. URL: [https://amsi.org.au/ESA\\_Senior\\_Years/SeniorTopic1/1c/1c\\_2content\\_6.html](https://amsi.org.au/ESA_Senior_Years/SeniorTopic1/1c/1c_2content_6.html) (visitado 12-06-2023).

<sup>10</sup>La función  $\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$  es decreciente en  $(0, +\infty)$ .

- [11] RANSFORD, T.J. «An elementary proof of  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ». En: *Eureka. The Archimedean's Journal* 1982.42 (1982), págs. 3-4. ISSN: 0071-2248.
- [12] REAKES, Kai. *A Couple of Proofs of De Moivre's Theorem*. 2008. URL: <http://mathsathawthorn.pbworks.com/f/De+Moivre%5C%27s+Theorem+and+my+favourite+piece+of+maths.pdf> (visitado 12-06-2023).
- [13] RIEMANN, Bernhard. *On the Number of Primes less than a Given Magnitude*. Trad. por Wilkins, David R. 1998. URL: <https://www.claymath.org/wp-content/uploads/2023/04/Wilkins-translation.pdf> (visitado 12-06-2023).
- [14] RISE TO THE EQUATION. *Cauchy's Proof of the Basel Problem | Pi Squared Over Six (3blue1brown SoMEI Entry)*. 21 de ago. de 2021. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=2jgtAo3ZtfI> (visitado 12-11-2021).
- [15] SIMONE. *Proof that  $L^p$  spaces are complete*. PlanetMath. 22 de mar. de 2013. URL: <https://planetmath.org/ProofThatLpSpacesAreComplete> (visitado 12-06-2023).
- [16] STILLWELL, John. *Mathematics and its history*. 3.<sup>a</sup> ed. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2010. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6053-5>.
- [17] STIRZAKER, David. *Elementary probability*. Second. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. <https://doi.org/10.1017/CB09780511755309>.
- [18] STROMBERG, Karl R. *Introduction to classical real analysis*. Wadsworth International Mathematics Series. Wadsworth International, Belmont, Calif., 1981. ISBN: 978-0-534-98012-2.
- [19] SULLIVAN, Brendan W. *The Basel Problem*. 11 de abr. de 2013. URL: <https://www.math.cmu.edu/~bwsulliv/basel-problem.pdf> (visitado 12-06-2023).
- [20] VINBERG, E. B. *A course in algebra*. Vol. 56. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. <https://doi.org/10.1090/gsm/056>.
- [21] YAGLOM, A. M. y YAGLOM, I. M. *Challenging mathematical problems with elementary solutions*. Vol. 2. Dover Publications, Inc., New York, 1987. ISBN: 978-0-486-65537-6.