TEMat

Esfera homológica de Poincaré

Alejandro O. Majadas-Moure
Universidad de Santiago de Compostela

Resumen: A partir de la esfera homológica de Poincaré podemos obtener un ejemplo natural de una variedad homológica que no es una variedad topológica. Habitualmente, la esfera de Poincaré se presenta usando argumentos geométricos que emplean un dodecaedro. No obstante, nosotros enfocaremos su estudio desde un punto de vista más algebraico.

Abstract: From the Poincaré homology sphere it is possible to obtain a natural example of a homology manifold that is not a topological manifold. In general, the Poincaré homology sphere is constructed using geometric arguments related with the dodecahedron. However, we will show another construction using an algebraic point of view.

Palabras clave: Homología, variedad homológica, dualidad de Poincaré, esfera de Poincaré, topología algebraica.

MSC2020: 57-00.

Recibido: 22 de julio de 2022.
Aceptado: 5 de marzo de 2023.

Agradecimientos: Quiero agradecer a mis tutores Jesús Álvarez López y David Mosquera Lois la ayuda prestada en este proyecto, el cual fue realizado durante el disfrute de una beca de colaboración con el departamento de matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela.

Referencia: Majadas-Moure, Alejandro O. «Esfera homológica de Poincaré». En: *TEMat*, 7 (2023), págs. 41-50. issn: 2530-9633. url: https://temat.es/articulo/2023-p41.

1. Introducción

En un principio, cuando Henri Poincaré formuló la famosa conjetura que lleva su nombre, propuso que la 3-esfera estándar era la la única 3-esfera homológica (es decir, un espacio con los mismos grupos de homología que una esfera S^3). Sin embargo, este resultado era falso, tal y como demostró más tarde el propio matemático francés introduciendo precisamente la esfera homológica de Poincaré. Ésta consiste en una 3-esfera homológica de grupo fundamental no trivial. Además, tal y como nos centraremos en este artículo, la suspensión de dicha esfera proporciona un ejemplo de una variedad homológica que no es variedad topológica.

En este artículo, abordaremos el estudio de la esfera de Poincaré desde un punto de vista algebraico, aunque el enfoque más habitual es de carácter geométrico y se realiza a partir de un dodecaedro [5].

Para comprender los desarrollos que efectuaremos a continuación, resulta preciso conocer algunas nociones básicas de topología. Asimismo, todas las cuestiones que introduciremos en las páginas siguientes relativas a la homología se pueden consultar con detalle en el libro *Elements of algebraic topology* [7].

2. Homología

En esta sección presentaremos la homología singular. Como toda homología, se contruye a partir de unos módulos de cadenas (aunque se puede generalizar a un anillo cualquiera, nosotros los consideraremos siempre definidos sobre $\mathbb{Z}$) y un operador borde.

Comenzaremos por introducir la noción de símplice geométrico.

Definición 1. Sea $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^m$ una colección de puntos. Diremos que son **afínmente independientes** si para todo conjunto de números reales $\{t_i\}_{i=0}^n$ satisfaciendo

$$\sum_{i=0}^{n} t_i a_i = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=0}^{n} t_i = 0$$

se verifica que $t_i = 0$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$.

Definición 2. Sean $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^m$ puntos afínmente independientes. Definimos el n-**símplice** σ generado por $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ como:

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i a_i \mid t_i \geqslant 0,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}.$$

En tal caso, diremos que los puntos $a_0, a_1, \dots, a_n$ son los **vértices** de σ y que n es su **dimensión**.

Definición 3. Dado un símplice $[a_0, a_1, \dots, a_n]$, diremos que sus **caras** son los símplices generados por subconjuntos de vértices de $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$.

En relación con el concepto de símplice se encuentra la orientación del mismo. Ésta constituye la base de la teoría homológica simplicial, y es necesaria para comprender las hipótesis en que enunciaremos la dualidad de Poincaré.

Definición 4. Dado un n-símplice, podemos fijar un orden de sus vértices. Dos órdenes serán **equivalentes** si uno de ellos resulta de aplicar un número par de trasposiciones al otro. De este modo, si $n > 0$, los posibles órdenes del símplice se agrupan en dos clases de equivalencia, a las que llamaremos **orientaciones**. Un símplice se dirá **orientado** si se le ha asignado una de las posibles orientaciones. Denotaremos de nuevo por $[a_0, a_1, \dots, a_p]$ la clase dada por la orientación $a_0 < a_1 < \cdots < a_p$ del símplice $a_0 a_1 \dots a_p$.

Definición 5. Un **complejo simplicial finito** K es una colección finita y no vacía de símplices de $\mathbb{R}^m$ verificando:

- Si σ está en K, entonces todas sus caras también lo están.
- Si σ y β son símplices de K, entonces $\sigma \cap \beta$ es una cara de ambos o bien es el vacío.

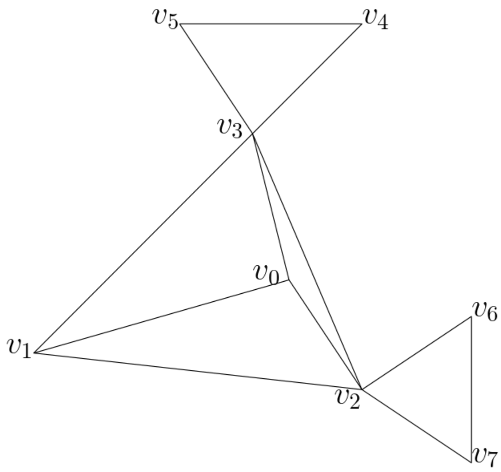

Figura 1: Complejo W.

Se denotará por $|K|$ al espacio subyacente considerado como subespacio de $\mathbb{R}^m$.

Ejemplo 6. Un posible ejemplo de complejo simplicial podría ser el siguiente. Consideremos W como el complejo simplicial formado por las caras

$$\begin{aligned}\big\{&[v_0],[v_1],[v_2],[v_3],[v_4],[v_5],[v_6],[v_7],[v_0,v_1],[v_0,v_2],[v_0,v_3],[v_1,v_3],[v_1,v_2],[v_2,v_3],\\ &[v_0,v_1,v_2],[v_0,v_1,v_3],[v_0,v_2,v_3],[v_1,v_2,v_3],[v_2,v_6],[v_2,v_7],[v_6,v_7],\\ &[v_3,v_4],[v_3,v_5],[v_4,v_5]\big\}\end{aligned}$$

que vemos en la figura 1. Se puede comprobar en efecto que se trata de un complejo simplicial.

Definición 7. Un espacio topológico X se dirá **triangulado** si existe un homeomorfismo entre X y un complejo simplicial $|K|$.

Introduzcamos ahora el concepto de símplice singular, en base al cual se formula la teoría homológica singular.

Definición 8. Sea Δ_p un p-símplice (que en nuestro caso se considerará contenido en $\mathbb{R}^p$) con vértices $(0,0,\dots,0),(1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)$ (nótese que denotamos a este símplice por Δ en lugar de por σ ya que, debido a sus vértices, es un símplice muy particular). Si X es un espacio topológico, se define un **p-símplice singular** como una aplicación continua T de Δ_p en X.

A partir de los p-símplices singulares se definen las p-cadenas.

Definición 9. Se definen las **p-cadenas singulares** del espacio X, denotadas por $S_p(X)$, como el grupo abeliano libre[1] generado por los p-símplices singulares de X.

Definición 10. Sea T un símplice singular. Denotemos por $l(\epsilon_0,\dots,\hat{\epsilon}_i,\dots,\epsilon_p)$ el homeomorfismo lineal que lleva Δ_{p-1} en la cara de Δ_p opuesta al vértice con un 1 en la posición i-ésima. Entonces se define $T\circ l(\epsilon_0,\dots,\hat{\epsilon}_i,\dots,\epsilon_p)$ como la **i-ésima cara** de T.

Definición 11. Definimos el operador **borde** entre $S_p(X)$ y $S_{p-1}(X)$ como el único homomorfismo de grupos que lleva cada p-símplice singular T de X en

$$\partial_p T=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i T\circ l(\epsilon_0,\dots,\hat{\epsilon}_i,\dots,\epsilon_p).$$

[1] Se puede consultar el libro *Algebrae* [6, Sección 7] para mayor precisión.

Observación 12. Se tiene que $\partial \circ \partial = 0$ (véase el teorema 29.1 en *Elements of algebraic topology* [7]). En consecuencia, podemos definir los grupos de homología como

$$H_p(X) = \frac{\ker \partial_p}{\operatorname{im} \partial_{p+1}}.$$

Observación 13. Llamaremos p-**ciclos** (o ciclos) a los elementos de $\ker \partial_p$ y p-**bordes** (o bordes) a los de $\operatorname{im} \partial_{p+1}$.

Ejemplo 14. Sea q un punto. Entonces se tiene que $H_p(q) = 0$ si $p > 0$ y $H_0(q) = \mathbb{Z}$.

Ejemplo 15. Si un espacio topológico X es simplemente conexo, entonces $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

Demostración. Cualquier aplicación $f : \Delta_0 \to X$ es, por definición, un 0-ciclo. Ahora bien, dadas dos aplicaciones f y g de Δ_0 en X definidas por $f(0) = a \in X$ y $g(0) = b \in X$, se tiene que ambas aplicaciones son homólogas, pues $f - g$ es la imagen por el operador borde del camino (1-símplice) que lleva b en a. En consecuencia, $H_0(X) = \mathbb{Z}$. ■

La homología singular no es la única que se puede definir a partir de las cadenas singulares. La homología singular reducida es una homología que guarda una estrecha relación con la homología singular.

Definición 16. Sea X un espacio topológico. Definamos el **complejo de cadenas aumentado** como el complejo

$$\cdots \xrightarrow{\partial} S_{n+1} \xrightarrow{\partial} S_n \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} S_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z},$$

donde $\epsilon : S_0(X) \to \mathbb{Z}$ se define como el único homomorfismo de grupos que lleva cada símplice singular en $1_{\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}}$.

Observación 17. Se tiene que $\epsilon \circ \partial_1 = 0$.

La homología resultante de este complejo se denomina homología singular reducida y se denota por $\tilde{H}(X)$.

Lema 18. *Se tiene que*

$$\tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} \cong H_0(X).$$

Demostración. La manera más sencilla de demostrar este resultado consiste en escindir la sucesión exacta

$$0 \to \ker \epsilon \hookrightarrow S_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

con una sección $j : \mathbb{Z} \to S_0$ de ϵ. Así,

$$S_0 = \ker \epsilon \oplus j(\mathbb{Z})$$

y, en consecuencia,

$$H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}.$$ ■

2.1. Resultados notables en homología

Los grupos de homología satisfacen gran cantidad de propiedades, muchas de las cuales se obtienen con razonamientos de álgebra homológica. En esta subsección presentaremos algunos de los resultados que pueden ser de gran utilidad.

Lema 19 (Rotman [9], lema 5.5). *Dada una sucesión exacta corta de complejos de cadenas*

$$0 \to C' \to C \to C'' \to 0,$$

ésta induce una sucesión exacta larga en los grupos de homología:

$$\cdots \to H_p(C') \to H_p(C) \to H_p(C'') \to H_{p-1}(C') \to \cdots$$

Asimismo, la demostración del teorema siguiente aparece en el libro *Elements of Algebraic Topology* [7, teorema 7.1].

Teorema 20. *Sea X un espacio topológico. Entonces $H_0(X)$ se corresponde con una suma directa de tantas copias de $\mathbb{Z}$ como componentes conexas por caminos tenga X.*

2.2. Relacionando invariantes

En topología algebraica existen ciertos resultados fundamentales que permiten relacionar la homotopía, la homología y la cohomología. Entre ellos se encuentran el teorema de Hurewitz y la dualidad de Poincaré. Antes de presentarlos, definiremos brevemente el concepto de grupo de homotopía y la noción de cohomología.

Definición 21. Dado un espacio X conexo por caminos y n un natural, se definen los **grupos de homotopía** $\pi_n(X, x_0)$ como las clases por homotopía de las aplicaciones continuas de D^n (el disco en $\mathbb{R}^n$) en X que llevan S^{n-1} en $x_0 \in X$. La operación será la concatenación de estas aplicaciones. Se puede comprobar que, en efecto, esto tiene estructura de grupo [4, sección 4.1].

Teorema 22 (Munkres [7], lema 30.6). *La homología es un invariante homotópico. En particular, también es invariante por homeomorfismos.*

Para el siguiente corolario existe un enunciado general que trata los n-ésimos grupos de homotopía, pero en este artículo nos basta con esta formulación.

Corolario 23 (Rotman [9], teorema 4.29). *Un espacio homótopo a un punto tiene homología reducida nula.*

El siguiente es un resultado clásico, cuya demostración se puede encontrar en *Algebraic topology* [4, teorema 4.32].

Teorema 24 (Hurewicz). *El primer grupo de homología de un espacio X resulta ser el abelianizado de su primer grupo de homotopía.*

De un modo análogo a como definíamos la homología, podemos definir la cohomología. Ahora trabajaremos con un complejo de cocadenas, donde las cocadenas se definen como el espacio dual de las cadenas singulares. Asimismo, tendremos un operador coborde que se corresponderá con la aplicación dual del operador borde de las cadenas singulares.

Definición 25. Se define el **i-ésimo módulo de cocadenas** de un espacio X como

$$S^i(X) = \operatorname{Hom}(S_i(X), \mathbb{Z}),$$

donde $\operatorname{Hom}(S_i(X), \mathbb{Z})$ denota al módulo de homomorfismos de grupos de $S_i(X)$ en $\mathbb{Z}$.

Definición 26. Se define el operador **coborde** $\delta^p : S^p \to S^{p+1}$ como la aplicación dual del operador borde $\partial_{p+1} : S_{p+1} \to S_p$. En consecuencia, $\delta \circ \delta = 0$.

Definición 27. Como $\delta^2 = 0$, al igual que hacíamos en el caso de homología, podemos definir los módulos de **cohomología** de un espacio X como

$$H^i(X) = \frac{\ker \delta^i}{\operatorname{im} \delta^{i-1}}.$$

Ejemplo 28. Al igual que en el caso de la homología, $H^0(X)$ se corresponde con una suma directa de tantas copias de $\mathbb{Z}$ como componentes conexas tenga X.

Como ya hemos dicho, la manera de relacionar la homología con la cohomología es mediante la dualidad de Poincaré. Sin embargo, este resultado no está enunciado para toda clase de espacios topológicos. Aunque existen otras formulaciones, nosotros enunciaremos la dualidad en términos de variedades homológicas (véase el teorema 65.1 de Munkres [7]), para lo cual necesitamos introducir primero este concepto.

Definición 29. Sea (X, A) un par de espacios topológicos, con $A \subset X$. Se define

$$S_p(X, A) = \frac{S_p(X)}{S_p(A)},$$

donde $S_p(X)$ denota las p-cadenas singulares de X. Nótese que el operador borde induce la siguiente aplicación:

$$\partial_p : S_p(X,A) \to S_{p-1}(X,A).$$

Definición 30. Igual que antes, podemos definir los grupos de **homología relativa** como

$$H_p(X,A) = \frac{\ker \partial_p}{\operatorname{im} \partial_{p+1}}.$$

Definición 31. Un espacio topológico X se dirá que es una n**-variedad homológica** si para todo $x \in X$ se tiene que

$$H_n(X, X - x) \cong \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad H_p(X, X - x) = 0 \qquad \text{si } p \neq n.$$

La condición anterior se puede simplificar con el siguiente lema, el cual se puede consultar en Munkres [7, Lema 35.1].

Lema 32. *Sea W un entorno de x en X. Entonces,*

$$H_p(X, X - x) \cong H_p(W, W - x).$$

Definición 33. Sea X una n-variedad homológica compacta y triangulable. Diremos que X es **orientable** si resulta posible orientar los n-símplices σ_i de X de modo que el borde de su suma sea 0.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en *Elements of algebraic topology* [7, teorema 65.1].

Teorema 34 (Dualidad de Poincaré). *Sea X una n-variedad homológica compacta y triangulable. Si X es orientable, entonces, para todo p, existe un isomorfismo entre $H^p(X)$ y $H_{n-p}(X)$.*

3. Acciones topológicas

En esta sección introducimos brevemente las acciones topológicas, así como algunas de sus propiedades. Gran parte de los resultados que mencionamos se pueden consultar en *Éléments de mathématique. Topologie algébrique. Chapitres 1 à 4* [2].

Definición 35. Sea G un grupo denotado multiplicativamente y dotado de una topología. Se dirá que G es un **grupo topológico** si:

- La multiplicación $m : G \times G \to G$, dada por $(g,h) \mapsto gh$, es continua.
- La inversión $i : G \to G$ que lleva un elemento g en su inverso g^{-1} es continua.

Definición 36. Sea G un grupo topológico y sea X un espacio topológico. Una **acción por la izquierda** de G sobre X es una aplicación continua

$$\lambda : G \times X \to X, \quad \text{con} \quad (g,x) \mapsto g \cdot x$$

que verifica:

- $1 \cdot x = x$ para todo x de X.
- $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$ para todo x de X y todos g, h de G.

Definición 37. Sea G un grupo topológico, X un espacio topológico y $\lambda : G \times X \to X$ una acción de G sobre X. Diremos que λ es una acción **libre** si dados $g \in G$ y $x \in X$ tales que $g \cdot x = x$ entonces se tiene $g = 1$.

Por su parte, se dirá que la acción λ es **transitiva** si dados dos elementos cualesquiera $x, y \in X$, existe un elemento $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$.

Entre las acciones topológicas, hay algunas que gozan de muy buenas propiedades. Estas son las acciones propiamente discontinuas, que definimos a continuación.

Definición 38. Sea G un grupo topológico discreto y X un espacio topológico. Se dirá que la acción $\lambda\colon\ G \times X \to X$ es **propiamente discontinua** si dados $x, y \in X$ y entornos de los mismos V_x y V_y, el conjunto

$$\{g \in G \mid (g \cdot V_x) \cap V_y \neq \varnothing\}$$

es finito.

Observación 39. En particular, si G es un grupo finito, cualquier acción de G sobre X será propiamente discontinua.

El siguiente teorema es consecuencia del hecho de que, con condiciones de conexión suficientes, una acción libre y propiamente discontinua define un revestimiento de Galois.

Teorema 40 (Rotman [9], teorema 10.27). *Sea X un espacio topológico conexo por caminos y G un grupo finito que actúa sobre X mediante una acción libre y propiamente discontinua. Sea B el cociente de X por la acción de G y denotemos por $p\colon\ X \to B$ la aplicación cociente. Entonces, G se realiza como grupo de automorfismos de X sobre B y:*

$$G \cong \mathrm{Aut}(X, p) \cong \frac{\pi_1(B, b_0)}{p_*(\pi_1(X, x_0))}.$$

Teorema 41 (Boothby [1], teorema 8.3). *El cociente de una variedad diferenciable por una acción libre y propiamente discontinua de grupo discreto admite una estructura de variedad diferenciable.*

4. Esfera de Poincaré

En esta sección presentaremos y estudiaremos la esfera de Poincaré. Nos centraremos en demostrar que su supensión es una variedad homológica que no es variedad topológica. Para ello, recordemos que una variedad topológica de dimensión m es un espacio topológico X que es Hausdorff y localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^m$. El resultado siguiente es un resultado esencial cuya demostración es un corolario inmediato del teorema de van Kampen (véase el capítulo 3 de Spanier [10]) teniendo en cuenta que las esferas de dimensión mayor o igual que 2 son simplemente conexas (lo cual se deduce también del teorema de Van Kampen).

Lema 42 (Doan [3]). *El espacio topológico resultante de quitar una cantidad finita de puntos a una variedad topológica de dimensión mayor o igual que tres tiene el mismo grupo fundamental que la variedad original.*

Definición 43. Definimos el espacio de los **cuaternios** como

$$\mathbb{H} = \{x + y\mathrm{i} + z\mathrm{j} + w\mathrm{h} \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^4,$$

con el producto determinado por $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$, $\mathrm{ij} = \mathrm{k}$, $\mathrm{jk} = \mathrm{i}$ y $\mathrm{ki} = \mathrm{j}$. Asimismo, el **conjugado** de un punto $q = x + y\mathrm{i} + z\mathrm{j} + w\mathrm{k}$ será $\overline{q} = x - y\mathrm{i} - z\mathrm{j} - w\mathrm{k}$. Por su parte, la **norma** de q será la raíz cuadrada del producto de q por su conjugado.

Se puede comprobar que los cuaternios con el producto tienen una estructura de grupo no conmutativo. Además, si restringimos el homeomorfismo lineal canónico entre $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{H}$ a S^3, se puede comprobar que obtenemos un homeomorfismo entre la esfera y los cuaternios unitarios.

Definición 44. Definimos I^* como el subgrupo de los cuaternios **unitarios**, formado por los elementos:

- 16 cuaternios de la forma $\pm 1/2 \pm \mathrm{i}/2 \pm \mathrm{j}/2 \pm \mathrm{k}/2$ (con $a \pm b$ nos referimos a los elementos $a + b$ y $a - b$).
- 8 cuaternios de la forma $\pm 0 \pm 0\mathrm{i} \pm 0\mathrm{j} \pm \mathrm{k}$ con todas las permutaciones de los coeficientes.
- 96 cuaternios tomando las permutaciones pares de $\pm 1 \pm \phi\mathrm{i} \pm \phi^{-1}\mathrm{j} \pm 0\mathrm{k}$, con $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Se puede comprobar que I^* es un grupo (finito por definición). Este grupo es el grupo icosaédrico binario. Además, I^* define la siguiente acción libre y propiamente discontinua sobre la esfera S^3:

$$I^* \times S^3 \to S^3, \quad (q, p) \mapsto q \cdot p.$$

En consecuencia, el espacio $B \coloneqq S^3/I^*$ admitirá una estructura de variedad diferenciable en virtud del teorema 41, y en consecuencia será triangulable por el teorema 4.1 en Thomassen [11]. Además, será orientable debido a que la acción de I^* conserva la orientación. Esta variedad B recibe el nombre de esfera homológica de Poincaré.

4.1. Grupos de homología de B

Calculemos ahora los grupos de homología del espacio B. Como B es una variedad de dimensión 3, los H_n, con $n > 3$ serán triviales [8, Sección 3.2]. Además, como B es conexo (imagen de un conexo por una aplicación continua), se tendrá que $H_0(B) = \mathbb{Z}$. Debido también a la conexión y orientabilidad, resultará aplicando la dualidad de Poincaré 34 que $H_3(B) = \mathbb{Z}$ (pues al ser B conexo, $H^0(B) = \mathbb{Z}$ por el teorema 42.1 en Munkres [7]).

- *Cálculo de H_1*: Tenemos que

  $$\mathrm{Aut}(S^3, p) \cong I^* \cong \frac{\pi_1(B, b_0)}{p_*(\pi_1(S^3, x_0))} = \pi_1(B, b_0),$$

  donde la última igualdad se desprende del hecho de que las esferas de dimensión superior a uno sean simplemente conexas. Así,

  $$\pi_1(B, b_0) \cong I^*,$$

  y, como el conmutador de I^* es él mismo (véase la sección 3 en el capítulo 1 de Lang [6]), resulta que

  $$H_1(B) = \mathrm{Ab}(\pi_1(B, b_0)) = 0.$$

  Como consecuencia de que el grupo fundamental de B no sea nulo, se tendrá que B no puede ser homeomorfa a la esfera S^3.
- *Cálculo de H_2*: Si aplicamos la dualidad de Poincaré 34, resulta que $H_2(B) \cong H^1(B)$. Ahora bien, por otro lado obtenemos, usando el corolario 3.3 en Hatcher [4]:

  $$H_2(B) \cong H^1(B) \cong H_1(B) = 0.$$

4.2. Suspensión de la Esfera de Poincaré

Como ya avanzábamos al comienzo del artículo, al realizar la suspensión de B obtendremos una variedad homológica que no es variedad topológica. Para demostrar que se trata de una variedad homológica emplearemos los resultados obtenidos en la subsección 4.1, en tanto que el hecho de que $\Sigma(B)$ no sea una variedad topológica será, en particular, una consecuencia del lema 42.

Definición 45. Definimos la **suspensión** de un espacio X, denotada por $\Sigma(X)$ como el espacio cociente obtenido al identificar, por un lado, los puntos $(x, -1) \sim (y, -1)$, y, por otro, los puntos $(x, 1) \sim (y, 1)$ del espacio $X \times [-1, 1]$.

Teorema 46. *La suspensión de la esfera de Poincaré, a la cual denotaremos por $\Sigma(B)$, no es una variedad topológica (de dimensión cuatro).*

Demostración. Si $\Sigma(B)$ fuese una variedad topológica, entonces, por el lema 42, el grupo fundamental de $\Sigma(B)$ coincidiría con el de $\Sigma(B) - \{N, S\}$, donde N y S denotan respectivamente los polos norte y sur de la suspensión. Ahora bien, $\Sigma(B) - \{N, S\}$ es homotópicamente equivalente a la base de la suspensión, es decir, a B, con lo que

$$\pi_1(\Sigma(B)) = \pi_1(\Sigma(B) - \{N, S\}) \cong \pi_1(B) \cong I^* \neq 0.$$

Sin embargo, esto supone una contradicción ya que, si B es conexo, al ser B variedad, entonces es también conexo por caminos y, en consecuencia, su suspensión tiene grupo fundamental nulo. ∎

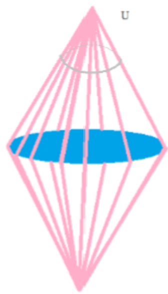

Figura 2: Suspensión.

Teorema 47. *Se tiene que $\Sigma(B)$ es una variedad homológica.*

Demostración. Estudiemos los grupos $H(\Sigma(B), \Sigma(B) - x)$, con $x \in \Sigma(B)$. Debido a la invarianza homotópica de la homología, teorema 22, podemos asumir que x es el polo norte de la suspensión. Asimismo, consideramos un entorno U de x en el cono superior de la suspensión tal y como muestra la figura 2. Estudiemos entonces los grupos $H(U, U - x)$. Tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \to S(U - x) \to S(U) \to S(U, U - x) \to 0.$$

Como U es un cono y $U - x$ es homótopo a B, obtenemos que

$$H_p(U, U - x) = \tilde{H}_p(U, U - x) \cong \tilde{H}_{p-1}(U - x) \cong \tilde{H}_{p-1}(B)$$

para todo $p > 0$. Así pues,

$$H_1(U, U - x) = 0; \quad H_2(U, U - x) = 0; \quad H_3(U, U - x) = 0; \quad H_4(U, U - x) \cong \mathbb{Z}.$$

Además, $H_0(U, U - x) = 0$ trivialmente. Asimismo, los demás grupos (para $n > 4$) serán triviales debido a que la dimensión de B es 3. ∎

5. Conclusiones

En este artículo hemos visto que la esfera estándar S^3 no es la única 3-esfera en homología, sino que existe también la esfera homológica de Poincaré, una 3-esfera de grupo fundamental no trivial. Además, la suspensión de esta variedad homológica sigue siendo una variedad homológica pero ya no es variedad topológica.

Referencias

[1] Boothby, William M. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. Pure and Applied Mathematics, No. 63. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975.

[2] Bourbaki, N. *Éléments de mathématique. Topologie algébrique. Chapitres 1 à 4*. Springer, Heidelberg, 2016. isbn: 978-3-662-49360-1; 978-3-662-49361-8.

[3] Doan, Aleksander. *Easier proof about suspension of a manifold*. https://math.stackexchange.com/. 15 de mayo de 2014.

[4] Hatcher, Allen. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. isbn: 0-521-79160-X; 0-521-79540-0.

[5] Kirby, R. C. y Scharlemann, M. G. «Eight faces of the Poincaré homology 3-sphere». En: *Geometric topology (Proc. Georgia Topology Conf., Athens, Ga., 1977)*. Academic Press, New York-London, 1979, págs. 113-146.

[6] Lang, Serge. *Algebra*. 2.ª ed. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, MA, 1984. ISBN: 978-0-201-05487-3.

[7] Munkres, James R. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984. ISBN: 978-0-201-04586-4.

[8] Prasolov, Viktor V. *Elements of combinatorial and differential topology*. Vol. 74. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. https://doi.org/10.1090/gsm/074.

[9] Rotman, Joseph J. *An introduction to algebraic topology*. Vol. 119. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1988. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4576-6.

[10] Spanier, Edwin H. *Algebraic topology*. McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto-London, 1966.

[11] Thomassen, Carsten. «The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces». En: *American Mathematical Monthly* 99.2 (1992), págs. 116-130. ISSN: 0002-9890. https://doi.org/10.2307/2324180.