TEMat

Sobre las sumas de las potencias de números enteros positivos consecutivos

Víctor Biot Domingo
Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales (UPV)
vicbiodo@mcm.upv.es

Resumen: La suma de las potencias de números enteros positivos es algo que siempre ha atraído a muchos matemáticos. Desde tiempos remotos, al ser humano le surge la necesidad de contar, de tener un orden, control y entendimiento sobre los fenómenos de la naturaleza. En este artículo tratamos esa misma curiosidad matemática relacionada con las sumas finitas, tratando de obtener fórmulas compactas que, de manera automática, nos den la solución a una suma cualquiera, dada una sucesión de números enteros positivos elevados a un exponente entero positivo. El método principal en el que se basa este trabajo es el conocido como sumas telescópicas. Demostramos la fórmula general, en la que la suma que se pretende obtener se halla de manera recurrente, para finalmente implementar unas breves líneas de código informático en un programa de álgebra computacional.

Abstract: Many mathematicians have always found sums of powers of positive integers appealing. From ancient times, humans needed to count, order and have a full understanding of nature's phenomena. Through the current paper we shall discuss the same mathematical curiosity connected to finite series, trying to obtain closed formulas which can automatically work out the solution for every single sum given a positive integer series elevated to a positive integer exponent. This article is based upon the method known as telescoping sum. We shall prove a general formula in which the sum to be obtained will be recursively found and eventually implemented with some lines of code in a computer algebra system.

Palabras clave: sumas de potencias, sumas telescópicas, recurrente, progresión aritmética, método recursivo.

MSC2020: 40C05.

Recibido: 24 de junio de 2020.
Aceptado: 30 de marzo de 2023.

Agradecimientos: Quisiera agradecer en primer lugar a Gemma, Paula y Guillermo, por la paciencia infinita que han tenido conmigo, y su apoyo para poder disfrutar de mi pasión, la Matemática. A mis padres, por todo. A mi colega Esther Sanabria Codesal, por animarme y ayudar a publicar un artículo matemático, así como enseñarme a manejar las ecuaciones diferenciales con las que el ser humano trata de describir la naturaleza, y que están en el corazón de esa rama dominante de la Matemática conocida como Análisis durante más de 300 años. Además, este trabajo no hubiera sido posible sin la ayuda de mi hermano José, al que machaqué durante el bachillerato —si ganó algo conmigo por aquella época creo que fue paciencia— siempre con la curiosidad de hallar sumas de, cada vez, más potencias, sin la necesidad de emplear la "idea" de cancelación diagonal, que por aquel entonces era el único método que conocíamos. También a mi colega Emilio Checa Martínez, por su gran ayuda con el código del lenguaje de programación, completando así el último eslabón de la cadena, y por ende el placer de hacer sumas enormes apoyándonos en la potencia computacional. Y, finalmente, a los revisores y editores de TEMat, por su gran labor y guía durante todo el proceso.

Referencia: Biot Domingo, Víctor. «Sobre las sumas de las potencias de números enteros positivos consecutivos». En: *TEMat*, 7 (2023), págs. 67-75. ISSN: 2530-9633. URL: https://temat.es/articulo/2023-p67.

1. Introducción

En los primeros cursos de ingenierías en la universidad, es fácil encontrarse y, de hecho, más de una vez, con las sumas de las potencias de números enteros positivos (consecutivos). Por ejemplo, durante el empleo de métodos matemáticos para cálculos estadísticos, aparece inevitablemente la clásica suma de orden uno [1], es decir, la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética, a la hora de realizar el cálculo de la media de la distribución uniforme.

Por otro lado, si lo que se pretende es obtener de forma teórica la fórmula del error angular en una poligonación, siguiendo los tradicionales métodos topográficos, nos encontramos de bruces de nuevo con la suma antes citada, si bien en este caso se trataría de una progresión aritmética de segundo orden [3], con lo que estas sumas acaban llamándonos la atención porque parece que estén ocultas en muchos desarrollos matemáticos relacionados con áreas distintas e inconexas.

Es interesante y curioso, por tanto, plantearse la búsqueda de una supuesta fórmula, parece que *a priori* con cierto halo «mágico», que obtenga dichas sumas de manera inmediata, para cualquier exponente entero positivo. Asimismo, parece lógico pensar que, conforme aumente el valor del exponente, el cálculo se prevea cada vez más arduo.

En efecto, veremos cómo el camino seguido conduce a un sistema matricial intratable si n es ligeramente grande, lo que hace inevitable el manejo de la informática. Aún así, si profundizamos más en estos temas, descubrimos que ya existía un método empleado por Jacob Bernoulli —de donde se acuñó, por cierto, el término números de Bernoulli— con el que se pueden resolver estas sumas sin más que teniendo una tabla con dichos números para el orden que nos interese.

Aunque esta conexión entre las sumas y los números de uno de los grandes matemáticos de la saga Bernoulli tiene una gran belleza matemática, no es el objeto de este artículo, en el que el propio curso del desarrollo matemático nos lleva por otros lugares. El propósito de este trabajo no es otro que la obtención de una fórmula general que resuelva de forma automática, ya sea simbólicamente en función de n, o numéricamente, la suma de las n primeras potencias (para el exponente $k = 1$ nos encontramos en el famoso caso de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética). Pero dado que la expresión a la que se llega es un sistema matricial enormemente complicado de resolver conforme aumenta el valor del exponente de la base, se ha automatizado el proceso con la ayuda del programa informático, *Mathematica*, sin más que construyendo un sencillo programa que nos pida el exponente de la base de la potencia y hasta qué término queremos el cálculo, es decir, la suma buscada.

La motivación por la que surge el presente estudio es fruto de la curiosidad, acompañada en todo momento por el disfrute de la propia belleza matemática, con independencia de cualquier utilidad práctica que pudiese tener, como sería el caso de necesitar sumar cantidades importantes de progresiones aritméticas.

En la siguiente sección se pone en contexto histórico las raíces matemáticas de este tipo de problemas. En la sección 3 encontraremos fórmulas para los exponentes $k = 1, k = 2, k = 3$ y $k = 4$, y se obtendrá un patrón para el exponente general k. En la sección 4 se efectuará la demostración del teorema para la fórmula general. En la sección 5 nos apoyaremos en un programa de cálculo simbólico para poder escribir unas breves líneas de código que, de manera automática, nos devuelva las sumas buscadas. Y en la última sección expondremos una serie de conclusiones del trabajo desarrollado.

2. Contexto histórico-matemático

Entre los problemas más antiguos en el arte de la suma nos encontramos con el de obtener fórmulas generales para las sumas de las potencias de números consecutivos. Ya desde épocas arcaicas, como es el caso de la civilización helénica, se tiene constancia de intentos de resolución de este tipo de problemas.

Prácticamente la totalidad de las civilizaciones anteriores a nuestra época moderna han dejado su impronta en la búsqueda hacia una fórmula definitiva que nos devuelva de manera inmediata la suma buscada, sin importar el número de términos, incluso el exponente al que estén elevados. Es de destacar el hecho de que, ya en el siglo XVII, estas sumas de potencias surgían constantemente al tratar de resolver las cuadraturas —lo que hoy conocemos como integrales— de geometrías bien variadas, delimitadas por curvas algebraicas.

El gran matemático suizo Jacob Bernoulli presumía de ser capaz de calcular la suma de las potencias décimas de todos los enteros existentes desde uno hasta mil en un breve período de tiempo, según él mismo decía, en cuestión de *quince minutos*.

En efecto, nos encontramos ante un problema que ya entusiasmaba a la comunidad matemática hace más de 300 años. De hecho, el tema de la suma de potencias está íntimamente ligado a los trabajos sobre las propiedades de factorización que desarrolló el matemático Johann Faulhaber en el primer tercio del siglo XII. En concreto, la conexión de estas sumas está relacionada con los polinomios que llevan su nombre, los polinomios de Faulhaber. Por otro lado, existe una relación entre los números de Jacob Bernoulli y los coeficientes del sistema de ecuaciones que se van formando, y que desemboca en otra demostración para la obtención de la fórmula general de las sumas de potencias. Los números de Bernoulli aparecieron por primera vez en el trabajo póstumo de Jacob Bernoulli en 1713, conocido como *Ars Conjectandi*. Sin embargo, es precisamente Faulhaber quien ya los conocía mucho antes. Uno de los aspectos más maravillosos de la matemática es la infinidad de conexiones que existen. En este caso, nos referimos a la conexión entre el álgebra de los números de Bernoulli y la disposición geométrica del conocido triángulo de Tartaglia-Pascal.

Asimismo, y remontándonos un poquito más en las efermérides matemáticas, es Blaise Pascal, matemático y físico francés, quien en 1654 publica una demostración sobre el grado de los polinomios de las sumas tratadas en este trabajo.

El caso es que echando la vista atrás y tratando de situarnos en la época de Euler, los Bernoulli [8], Jacobi y otros grandes e ilustres matemáticos de la época en la que los desafíos matemáticos planteados constituían una fuente de divertimento y curiosidad por comprobar quién poseía la mente más afilada para resolverlos, es inevitable maravillarse con el dominio y certeza que poseían de la matemática para establecer verdades matemáticas imperecederas.

3. Suma y sigue...

Consideremos la suma $S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ (la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética de diferencia la unidad). Partiendo de la conocida igualdad del binomio de Newton [9] elevado al cuadrado, tenemos que

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1, \tag{1}$$

y, sustituyendo en ella n sucesivamente por $n-1, n-2, \dots, 1$, se obtiene el conjunto de igualdades

$$\begin{array}{rr} n: & (n+1)^2 - n^2 = 2n+1, \\ n-1: & n^2-(n-1)^2 = 2(n-1)+1, \\ n-2: & (n-1)^2-(n-2)^2 = 2(n-2)+1, \\ \vdots & \vdots \\ 1: & 2^2 - 1^2 = 2\cdot 1 + 1, \end{array}$$

que, sumadas, dan origen a la igualdad

$$(n+1)^2 - 1^2 = [2n + 2(n-1) + \cdots + 2\cdot 1] + [1 + 1 + \cdots + 1],$$

donde cada corchete tiene n sumandos. Sacando 2 como factor común del primer corchete, el sumando quedará como $2S_1$, siendo S_1 la suma buscada, y así,

$$(n+1)^2 - 1 = 2S_1 + n. \tag{2}$$

Despejando S_1, obtenemos que

$$\boxed{S_1 = \frac{n(n+1)}{2}}\,. \tag{3}$$

La idea utilizada para hallar S_1 se conoce como cancelación diagonal [6].

Hemos conseguido, por tanto, una fórmula que nos da la suma de los n primeros términos de la progresión

$$S_1 = 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i.$$

Pero, ¿por qué no avanzar más y llegar a alguna fórmula que nos dé la suma de las potencias, cuyo exponente no sea necesariamente la unidad, de los n primeros términos? Este es el fin del presente trabajo, es decir, encontrar fórmulas cerradas que describan sumas del tipo $\sum_{i=1}^{n} i^k$, donde $k, n \in \mathbb{N}$ mediante un método recursivo, en el que será imprescindible la utilización de un software matemático —*Mathematica* en este caso— debido a la celeridad con la que aumenta la dificultad en la búsqueda de la solución generalizada.

Lo que buscamos lleva intrínsecamente asociada la resolución de un sistema matricial, en el que a poco que aumentemos el exponente de los términos de nuestra suma, se hará tremendamente tediosa su realización a mano —incluso los elementos de la matriz de los coeficientes de las incógnitas son *números combinatorios* o *coeficientes binomiales*—, siendo aconsejable el empleo de un potente lenguaje de programación.

Análogamente[1] al método llevado a cabo para S_1, desarrollemos unas cuantas sumas más. En concreto, pretendemos hallar S_2, S_3 y S_4.

$$\begin{aligned} S_2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2, \\ S_3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3, \\ S_4 &= 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \sum_{i=1}^{n} i^4. \end{aligned}$$

Consideremos la suma S_2. Partiendo de la igualdad

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1,$$

y sustituyendo en ella n sucesivamente por $n-1, n-2, \dots, 1$, se obtiene el conjunto de igualdades

$$\begin{array}{rrcl} n: & (n+1)^3 - n^3 &=& 3n^2 + 3n + 1, \\ n-1: & n^3 - (n-1)^3 &=& 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1, \\ n-2: & (n-1)^3 - (n-2)^3 &=& 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1, \\ \vdots & & \vdots & \\ 1: & 2^3 - 1^3 &=& 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1. \end{array}$$

Estas igualdades, sumadas, dan origen a la igualdad

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_2 + 3S_1 + n. \tag{4}$$

Despejando ahora S_2 de la expresión (4),

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{(n+1)^3 - 3S_1 - (n+1)}{3} \\ &= \frac{(n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1)}{3} \\ &= \frac{1}{3}(n+1)\big((n+1)^2 - \tfrac{3}{2}n - 1\big) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n), \end{aligned}$$

[1]Sin otro objetivo que buscar un patrón general, utilizamos la idea de la cancelación diagonal para diferentes potencias (dos, tres y cuatro).

llegamos a

$$\boxed{S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\,.$$

Consideremos ahora la suma S_3. Partiendo de la igualdad

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

y sustituyendo en ella n sucesivamente por $n-1, n-2, \dots, 1$, se obtiene el conjunto de igualdades

$$\begin{aligned} n:&\quad (n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1,\\ n-1:&\quad n^4 - (n-1)^4 = 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1,\\ \vdots\;&\qquad\qquad\quad \vdots\\ 1:&\qquad\quad 2^4 - 1^4 = 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1, \end{aligned}$$

que, sumadas, dan origen a la igualdad

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n. \tag{5}$$

Sustituyamos S_2 y S_1, ya conocidas:

$$\begin{aligned} (n+1)^4 &= 1 + 4S_3 + 6\Big(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\Big) + 4\Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big) + n,\\ (n+1)^4 &= 4S_3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + (n+1),\\ 4S_3 &= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1),\\ 4S_3 &= (n+1)\big((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\big),\\ 4S_3 &= (n+1)(n^3 + n^2),\\ 4S_3 &= (n+1)n^2(n+1), \end{aligned}$$

obteniendo así

$$\boxed{S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = S_1^2}\,.$$

Consideremos finalmente la suma S_4. Partiendo de la igualdad

$$(n+1)^5 = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1,$$

y sustituyendo en ella n sucesivamente por $n-1, n-2, \dots, 1$ llegaríamos a la igualdad

$$(n+1)^5 - 1 = 5S_4 + 10S_3 + 10S_2 + 5S_1 + n. \tag{6}$$

De igual modo, sustituyendo las sumas, función de n, por las fórmulas halladas, obtendríamos la suma S_4, que no vamos a emplear pues ya no vamos a seguir calculando más sumas.

Llegados a este punto, vamos a poner en común las expresiones (2), (4), (5) y (6) y de esta forma ver qué patrón existe para poder hallar un S_k cualquiera.

Nótese que el subíndice k de S_k está directamente relacionado con el orden de la potencia de los términos de las sumas *k-ésimas* que andamos buscando:

$$\begin{aligned} S_1:&\quad (n+1)^2 - (n+1) = 2S_1,\\ S_2:&\quad (n+1)^3 - (n+1) = 3S_1 + 3S_2,\\ S_3:&\quad (n+1)^4 - (n+1) = 4S_1 + 6S_2 + 4S_3,\\ S_4:&\quad (n+1)^5 - (n+1) = 5S_1 + 10S_2 + 10S_3 + 5S_4. \end{aligned}$$

Curiosamente, si mostramos el famoso triángulo de Tartaglia-Pascal, nos daremos cuenta precisamente de que sus términos son los coeficientes de las sumas *k-ésimas* que hemos escrito antes (figura 1). Podemos, por tanto, prever que para la suma cualquiera S_k sus coeficientes vendrán dados por

$$S_k:\quad (n+1)^{k+1} - (n+1) = \binom{k+1}{1}S_1 + \binom{k+1}{2}S_2 + \cdots + \binom{k+1}{k}S_k = \sum_{m=1}^{k}\binom{k+1}{m}S_m. \tag{7}$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Figura 1: Triángulo de Tartaglia-Pascal.

4. Demostración de la hipótesis

Probaremos la validez de la fórmula generalizada (7), planteada al final de la sección anterior.

Teorema 1. *Sean n, k y m números naturales y sea $S_m = \sum_{i=1}^{n} i^m$. Entonces,*

$$
(n+1)^{k+1} - (n+1) = \sum_{m=1}^{k} \binom{k+1}{m} S_m. \tag{8}
$$

Demostración. En efecto, si para S_k aplicamos el mismo procedimiento desarrollado hasta S_3, obtenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
(n+1)^{k+1} - n^{k+1} &= \left(\sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} n^m 1^{k+1-m} \right) - n^{k+1} = \sum_{m=0}^{k} \binom{k+1}{m} n^m \\
n^{k+1} - (n-1)^{k+1} &= \sum_{m=0}^{k} \binom{k+1}{m} (n-1)^m, \\
&\vdots \\
2^{k+1} - 1^{k+1} &= \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} 1^m = \sum_{m=0}^{k} \binom{k+1}{m}.
\end{aligned}
$$

Sumando todas las ecuaciones, obtenemos

$$
(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=0}^{k} \binom{k+1}{m} i^m,
$$

y, como estos sumatorios pueden conmutarse porque sus límites son independientes,

$$
\begin{aligned}
(n+1)^{k+1} - 1 &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=0}^{k} \binom{k+1}{m} i^m \\
&= \sum_{m=0}^{k} \binom{k+1}{m} \sum_{i=1}^{n} i^m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\binom{k+1}{0} \sum_{i=1}^{n} i^0 \right) + \left(\sum_{m=1}^{k} \binom{k+1}{m} i^m \right) \\
&= n + \sum_{m=1}^{k} \binom{k+1}{m} S_m,
\end{aligned}
$$

de donde

$$
(n+1)^{k+1} - (n+1) = \sum_{m=1}^{k} \binom{k+1}{m} S_m. \tag{9}
$$

■

5. Implementación en *Mathematica*

A partir de la fórmula obtenida, podemos plantear el siguiente sistema matricial:

$$
\begin{pmatrix}
(n+1)^2 & -\ (n+1) \\
(n+1)^3 & -\ (n+1) \\
(n+1)^4 & -\ (n+1) \\
\vdots & \\
(n+1)^k & -\ (n+1) \\
(n+1)^{k+1} & -\ (n+1)
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\binom{2}{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\binom{3}{1} & \binom{3}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\binom{k}{1} & \binom{k}{2} & \binom{k}{3} & \cdots & \binom{k}{k-1} & 0 \\
\binom{k+1}{1} & \binom{k+1}{2} & \binom{k+1}{3} & \cdots & \binom{k+1}{k-1} & \binom{k+1}{k}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{k-1} \\ S_k
\end{pmatrix}.
$$

La matriz $k \times k$ es del tipo triangular inferior, es decir, una matriz cuadrada cuyos elementos por encima de su diagonal principal son cero. Esto es importante porque, en los sistemas lineales definidos por este tipo de matrices, se pueden encontrar soluciones más eficientemente que en los sistemas lineales generales.

Estamos ante una ecuación del tipo

$$
B = A \cdot X,
$$

donde

- B: matriz de términos independientes,
- A: matriz de coeficientes,
- X: matriz de las incógnitas,

que podremos resolver según

$$
\begin{aligned}
A^{-1} \cdot B &= A^{-1} \cdot A \cdot X, \\
X &= A^{-1} \cdot B.
\end{aligned}
$$

El sistema de ecuaciones lineales tiene solución y además es única, lo que es equivalente a decir que la matriz A es invertible (o no singular), es decir, admite matriz inversa. De hecho, el determinante del sistema sería el producto de los elementos de la diagonal principal, que es distinto de cero puesto que los números combinatorios son todos no nulos —ninguna de las filas es combinación lineal de otras filas—, por lo que la matriz tiene rango completo y, por tanto, es invertible.

Es aquí cuando nos ayudamos de *Mathematica* para tener la solución automatizada. Uno de los métodos que emplea *Mathematica* para resolver sistemas lineales de ecuaciones es realizar una descomposición LU, que descompone la matriz en dos matrices triangulares $A = LU$ (con L triangular inferior y U triangular superior) y luego realiza sendas sustituciones hacia adelante y hacia atrás. Por lo tanto, gracias a facilitar la matriz en forma triangular, *Mathematica* debería poder resolverlo de forma directa con sustitución, sin necesidad de hallar las matrices triangulares, ya que la matriz U sería la matriz identidad de dimensiones $k \times k$, reduciendo el tiempo de cómputo y la posible pérdida de precisión numérica.

Comenzamos guardando en la variable k el exponente de la potencia de los términos de nuestra suma *n-ésima*

```
k = Input[<<dame el exponente de la base de la potencia de los términos>>];
```

Definimos la matriz de coeficientes mediante función `Table` (otra posibilidad sería mediante la función `Array`)

```
A = Table[If[i >= j,Binomial[i+1, j], 0],{i,1,k}, {j,1,k}],
```

En este caso, la manera en la que le decimos que los elementos `A[[i,j]]` $= \binom{i+1}{j}$ es mediante la función `Binomial`.

De manera similar, la matriz de los términos independientes puede escribirse como

```
B = Table[(n+1)^(i+1)-(n+1),{i,1,k}];
```

La forma en que finalmente resolvemos el sistema será mediante la función `LinearSolve[A,B]`, que es el método más eficiente que aporta *Mathematica* para resolver sistemas de ecuaciones lineales

```
x = LinearSolve[A,B].
```

6. Conclusiones

Aunque este estudio tiene sus raíces en algo aparentemente sencillo de plantear como son las sumas de potencias, es muy interesante lo que vamos encontrando por el camino desde el minuto cero en el que queremos generalizar y llegar a una fórmula infalible que de manera rápida —y aquí entra la informática— nos dé las sumas que buscamos. En ese sentido, la belleza de la matemática aflora inmediatamente puesto que nos asegura que, sin tener que comprobarlo, cualquier suma buscada y bajo las premisas iniciales, va a tener un resultado y no otro, y, por más tamaño que manejemos, vamos a seguir teniendo la certeza de que es la solución buscada. Por tanto, si nos centramos en la necesidad de una búsqueda de sumas de números y potencias considerablemente grandes, también es interesante pararse a pensar la necesidad que tiene el ser humano de ayudarse de la potencia computacional para suplir sus carencias extraordinarias. De otro modo, como está comprobado en campos de la ingeniería o de la física a la hora de aplicar métodos numéricos, por ejemplo, queda latente esa falta de capacidad de cálculo que poseemos en comparación con los ordenadores, quienes pasaron a ser hace algún tiempo nuestros compañeros fieles e inseparables.

Enlazando una vez más con la historia matemática que tantos episodios increíbles y bellos nos ha dado, citar una anécdota del que es considerado por muchos como el más grande matemático nacido en este planeta hasta la fecha. No es otro que el incomparable Johann Carl Friedrich Gauss [4, 7].

Parece ser que un día de colegio cualquiera de 1784, durante una clase de aritmética, el jovencito Gauss [5] que tan sólo contaba con diez años de edad, maravilló a su profesor, el Sr. Büttner, quien parece ser que invadido por el cansancio de tener que contener a una clase descontrolada, encomendó la tarea a todos sus alumnos de sumar los números naturales del 1 al 100. El objetivo no era sino mantener a la clase en silencio para que trabajaran en sus pupitres durante un largo rato. En efecto, si comenzamos a sumar manualmente y de uno en uno dicha suma, veremos cómo la respuesta se va a dilatar considerablemente en el tiempo. Para todos menos para Gauss. Él encontró enseguida un patrón, y se dio cuenta que sumando por parejas los extremos (el uno con el cien, el dos con el noventa y nueve, y así sucesivamente) obtenía en todos los casos la misma cantidad (ciento uno). De esta manera, evitó tener que invertir un enorme tiempo y esfuerzo en ir acumulando sumas cada vez mayores, así como aumentando la probabilidad de cometer algún error. A Gauss le resultó inmediato concluir que estaba frente a 50 parejas de números cuya suma era la misma, 101, y por tanto su producto, 5050. Sin ser consciente todavía, Gauss había empleado la fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética —es decir, la ecuación (3) vista al principio de este trabajo—. La progresión aritmética, tal como ocurre en Matemáticas, es una serie de números de forma que la diferencia de dos términos sucesivos cualesquiera de la secuencia es una constante que conocemos como *diferencia*, siendo uno en el caso de Gauss. En cuanto tuvo el resultado de la suma, salió a la pizarra a escribir el resultado, exclamando a su vez *Ligget se!* («¡Ahí está!») [2].

Finalmente, resulta muy placentero escribir el código informático en el programa citado, o un código similar en otro programa, para pedir precisamente la suma de los primeros números naturales cuyas potencias tengan como exponente la unidad, y comprobar que llegamos al mismo número al que llegó Gauss, y con el que, 239 años después, le rendimos homenaje.

Referencias

[1] Balaguer Beser, Ángel; Capilla Romá, Maria Teresa; Felipe Román, María José; Marín Molina, Josefa, y Monreal Mengual, Llúcia. *Métodos Matemáticos*. Editorial Universitat Politècnica de València, 2014. isbn: 978-84-9048-208-7.

[2] Boyer, Carl B. *Historia de la Matemática*. Trad. por Martínez Pérez, Mariano. 1.ª ed. Manuales. Alianza Editorial, 1999. isbn: 978-84-206-8186-3.

[3] Chueca Pazos, Manuel; Herráez Boquera, José, y Berné Valero, José Luis. *Métodos Topográficos*. Ediciones Paraninfo, 1996. isbn: 978-84-283-2309-3.

[4] Dunham, William. *Viaje a través de los genios. Biografías y teoremas de los grandes matemáticos*. Ediciones Pirámide, 2002. isbn: 978-84-368-1662-4; 84-368-1662-5.

[5] Moreno Castillo, Ricardo. *Gauss. El príncipe de los matemáticos*. 1.ª ed. Vol. 54. La matemática en sus personajes. Nivola, 2018. isbn: 978-84-15913-38-2.

[6] Pérez Carreras, Pedro. *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Universitat Politècnica de València, 1991. isbn: 978-84-7721-135-8.

[7] Rufián Lizana, Antonio. *Gauss, la teoría de números. Si los números pudieran hablar*. RBA, 2016. isbn: 978-84-473-7634-6.

[8] Sánchez Fernández, Carlos y Valdés Castro, Concepción. *Los Bernoulli. Geómetras y viajeros*. 1.ª ed. Tres Cantos, Madrid: Nivola, 2001. isbn: 978-84-95599-21-6.

[9] Spegel, Murray R.; Liu, John, y Abellanas Rapún, Lorenzo. *Fórmulas y tablas de Matemática aplicada*. 2.ª ed. McGraw-Hill, 2004. isbn: 84-481-9840-9; 0-07-038203-4.