

Asociación Nacional de Estudiantes de Matemáticas

TEMat

divulgación de trabajos de estudiantes de matemáticas

volumen 5 mayo de 2021

https://temat.es/volumen/2021/

http://www.anem.es/



Publica



Asociación Nacional de Estudiantes de Matemáticas Plaza de las Ciencias, 3 Despacho 525, Facultad de Ciencias Matemáticas Universidad Complutense de Madrid 28040 – Madrid

temat@temat.es
contacto@anem.es

Colabora



Real Sociedad Matemática Española Plaza de las Ciencias, 3 Despacho 525, Facultad de Ciencias Matemáticas Universidad Complutense de Madrid 28040 – Madrid

Diseño de portada: Roberto Berná Larrosa, rbernalarrosa@gmail.com

TEMat, divulgación de trabajos de estudiantes de matemáticas – volumen 5 – mayo de 2021

e-ISSN: 2530-9633 https://temat.es/

© 2021 Asociación Nacional de Estudiantes de Matemáticas.

© 2021 los autores de los artículos.

© Salvo que se indique lo contrario, el contenido de esta revista está disponible bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento 4.0 Internacional.

Equipo

Editores jefe

Alberto Espuny Díaz, Technische Universität Ilmenau Isaac Sánchez Barrera, Barcelona Supercomputing Center (BSC) y Universitat Politècnica de Catalunya

Editor adjunto

Gregorio Martínez Sempere, Universitat d'Alacant

Edición

Fernando Ballesta Yagüe, Universidad de Murcia Emilio Domínguez Sánchez, Universidad de Murcia Álvaro González Hernández, Universidad de Salamanca Alejandra Martínez Moraian, Universidad de Alcalá Javier Martínez Perales, BCAM - Basque Center for Applied Mathematics

Comité editorial

Pablo Manuel Berná Larrosa, Universidad CEU San Pablo
Domingo García Rodríguez (representante de la RSME), Universitat de València
Álvaro González Hernández, University of Oxford
David González Moro
Midwar López Huapaya (representante de la ANEM), Universidad de Cantabria
Elena López Navarro, Universitat Politècnica de València
Pablo Oviedo Timoneda, University of Birmingham
Eva Primo Tárraga, Universidad Rey Juan Carlos
Juan Miguel Ribera Puchades, Universidad de La Rioja
Israel Pablo Rivera Ríos, Universidad Nacional del Sur - Departamento de Matemática e INMABB - CONICET
Martí Roset Julià, McGill University
Lucía Rotger García, Universidad de La Rioja

Paula Segura Martínez, Universitat Politècnica de València

Víctor Sotomayor, Centro Universitario EDEM - Valencia

Revisiones externas

En este volumen han colaborado realizando revisiones externas:

Rubén Campoy (Universitat de València), Miguel Ángel Goberna Torrent (Universitat d'Alacant), Enrique Jordá Mora (Universitat Politècnica de València), David Jornet Casanova (Universitat Politècnica de València), María Teresa Lozano Imízcoz (Universidad de Zaragoza), Fco. Javier Martínez Sánchez (Universidad de Jaén), Beatriz Molina Samper (Universidad Nacional Autónoma de México), David Mosquera Lois (Universidade de Santiago de Compostela), Gustavo Adolfo Muñoz Fernández (Universidad Complutense de Madrid), Mercedes Pelegrín García (École polytechnique), Antonio Pérez Hernández (Universidad Nacional de Educación a Distancia), Alberto Rodríguez Arenas (Universitat Jaume I), Manuel Sanchis López (Universitat Jaume I), Marithania Silvero (Universidad de Sevilla), Antonio Zarauz Moreno (Universidad de Almería).

Sobre TEMat

TEMat es una revista de divulgación de trabajos de estudiantes de matemáticas publicada sin ánimo de lucro por la Asociación Nacional de Estudiantes de Matemáticas. Se busca publicar trabajos divulgativos de matemáticas, escritos principalmente (pero no exclusivamente) por estudiantes, de todo tipo: breves reseñas, introducciones a temas de investigación complejos, o artículos explicando las bases e incluso algún pequeño resultado de trabajos desarrollados por estudiantes.

TEMat persigue el doble objetivo de dar visibilidad a la calidad y diversidad de los trabajos realizados por estudiantes de matemáticas en los centros españoles a la vez que permite a los estudiantes publicar sus primeros artículos, familiarizándose así con el proceso de redacción, revisión y corrección que va asociado a la actividad investigadora.

Se contemplan para su publicación artículos escritos en castellano de todas las áreas de las matemáticas, incluyendo álgebra, análisis, ciencias de la computación, combinatoria, educación matemática, estadística, geometría, teoría de números y cualquier otra área de las matemáticas (puras y aplicadas), así como aplicaciones científicas o tecnológicas en las que las matemáticas jueguen un papel central.

Índice general

Carta del presidente de la ANEM	VII
« Teoría de nudos y homología de Khovanov », de David Torregrosa Belén	1
«Funciones armónicas en \mathbb{R}^n », de Alba Crespo Pérez	17
«Algunas fórmulas cerradas para productos infinitos y su relación con la función zeta de Riemann»,	
de Miguel Camarasa Buades	35
« Topología y neurociencia: la percepción del espacio », de Erika Magdalena Herrera Machado	43
«Buscando el ADN de un espacio de Banach: el problema de Tingley», de Alexis Béjar López	57

TEMat, 5 (2021) e-issn: 2530-9633

Carta del presidente de la ANEM

Seguimos pasando por tiempos difíciles. Esto, sin embargo, no ha sido impedimento para que *TEMat* saque su quinto volumen, consolidándose como una revista única en el panorama internacional y siendo uno de los proyectos de mayor envergadura e importancia de la ANEM.

Cada vez es mayor el interés por *TEMat* y ejemplo de ello son los artículos enviados este año, así como la publicación, a finales de 2020, del primer volumen de *TEMat monográficos* con los artículos de la *Escuela-Taller de Análisis Funcional*, que seguro que será el primero de muchos y presagio de otros proyectos que seguirán haciendo crecer esta increíble iniciativa.

La pandemia nos ha demostrado que es fundamental defender la investigación científica abierta y tenemos que hacer que el estudiantado pueda introducirse a la misma de cara a su futuro profesional. Creemos firmemente que la educación y la investigación son cimientos indispensables de nuestra sociedad y que las matemáticas son un pilar fundamental para el desarrollo de un ecosistema científico de calidad.

No podría finalizar sin agradecer a todos los miembros del Comité Editorial la gran cantidad de horas dedicadas para que este increíble proyecto siga viento en popa, así como, por supuesto, a los autores y revisores de los artículos sin los cuales nada de esto existiría. Gracias por todo el esfuerzo para que podamos disfrutar de esta edición. Y esperamos, que si no lo habéis hecho ya, os apuntéis a enviar vuestros artículos a *TEMat* o a revisar los de vuestros compañeros para que esta gran apuesta siga adelante.

Alfonso Márquez Martínez, presidente de la ANEM.

Sevilla, mayo de 2021.

TEMat

Teoría de nudos y homología de Khovanov

☑ David Torregrosa Belén Universidad de Alicante david.torregrosa@ua.es

Resumen: Una de las preguntas que nos planteamos en teoría de nudos es determinar si dos nudos son equivalentes. Para intentar responder a esta cuestión es útil considerar invariantes de nudos. La primera parte de este artículo consiste en una introducción a la teoría de nudos y al polinomio de Jones, un invariante que supuso un importante avance en la forma de estudiar esta teoría y construyó puentes con otras ramas de las matemáticas y la física. La segunda parte está dedicada a la homología de Khovanov. Se trata de un refinamiento del polinomio de Jones que da lugar a un invariante homológico.

Abstract: One of the questions asked in knot theory is whether or not two knots are equivalent. Knot invariants are a useful tool in order to give a possible answer to this question. This paper starts with an introduction to knot theory and the Jones polynomial, an invariant that entailed a great advance in the study of this theory and built connections with other branches of mathematics and physics. The second part of the paper is devoted to Khovanov homology. This is an homological invariant, obtained by means of the Jones polynomial but which enlarges the information given by it.

Palabras clave: teoría de nudos, equivalencia de nudos y enlaces, invariantes de nudos, polinomio de Jones, homología de Khovanov.

MSC2010: 57K10, 57K14, 57K18. *Recibido*: 29 de octubre de 2019. *Aceptado*: 8 de diciembre de 2020.

Agradecimientos: Quiero agradecer a Clementa Alonso González por supervisar este trabajo, así como por animarme a solicitar la «Beca de Colaboración» del Ministerio de Educación y Formación Profesional, en el marco de la cuál realicé este trabajo.

Referencia: Torregrosa Belén, David. «Teoría de nudos y homología de Khovanov». En: *TEMat*, 5 (2021), págs. 1-16. ISSN: 2530-9633. URL: https://temat.es/articulo/2021-p1.

1. Introducción

La teoría de nudos es un área de la topología de baja dimensión dedicada al estudio de nudos y su clasificación. Comencemos viendo qué va a ser para nosotros un nudo.

Toma una cuerda con dos extremos, entrelázala entre sí y, una vez hayas concluido, une los extremos. El resultado es un nudo. Considera ahora que tenemos dos nudos. Clasificar nudos hace referencia a responder preguntas del tipo: ¿podemos tomar el primer nudo y transformarlo en el segundo sin cortar la cuerda? Si la respuesta a esta pregunta es afirmativa, es posible cambiar poco a poco y continuamente la forma del primer nudo y obtener el segundo, y diremos que ambos nudos son **equivalentes**. Estas ideas se formalizarán en la sección 2. Además, se introducirá el concepto de **invariante de nudo**, que nos ayuda a determinar, en algunos casos, cuándo dos nudos no son equivalentes. Entre estos invariantes destaca el polinomio de Jones, al que le dedicamos la sección 3. El polinomio de Jones puede refinarse para obtener un invariante más potente, la homología de Khovanov. Esta se presenta en la sección 4, en la cual comenzamos introduciendo las nociones básicas de la teoría de homología. Por último, en la sección 5 se presenta una comparativa entre el polinomio de Jones y la homología de Khovanov.

2. Nudos e invariantes de nudos

Comenzamos esta sección formalizando matemáticamente las definiciones de nudo y equivalencia de nudos. Matemáticamente, un nudo es la imagen de un embebimiento de la circunferencia en \mathbb{R}^3 . Equivalentemente, tenemos la siguiente definición:

Definición 1. Un nudo $K \subset \mathbb{R}^3$ es un subconjunto de puntos homeomorfo a una circunferencia.

Otro objeto de estudio en la teoría de nudos son los enlaces. Los **enlaces** generalizan los nudos al poder considerar más de una componente conexa. Así, un enlace es la unión disjunta de un número finito de nudos. En particular, un nudo es un enlace.

En el libro de Burde, Zieschang y Heusener [4] se puede encontrar una definición de la equivalencia de nudos y enlaces en virtud de embebimientos. Sin embargo, habitualmente se trabaja con nudos y enlaces de una manera combinatoria haciendo uso de diagramas de nudos. Los diagramas son proyecciones, con algunas restricciones (sin puntos triples ni puntos de tangencias), de nudos o enlaces sobre el plano, en las que en los puntos dobles hemos realizado un borrado del trozo de cuerda que queda debajo al proyectar; estos puntos se denominan cruces del diagrama. Al trozo de cuerda que pasa por debajo del cruce lo denominamos **paso inferior**; el que queda por arriba es el **paso superior**.

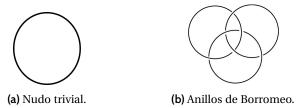


Figura 1: Ejemplos de diagramas de nudos y enlaces.

Dado un enlace¹, siempre es posible obtener un diagrama del mismo. La posibilidad de trabajar por medio de diagramas vino dada por el matemático alemán Reidemeister, quién demostró que la relación de equivalencia para enlaces puede ser expresada por medio de ciertos movimientos realizados sobre sus diagramas. A estos movimientos los denominamos movimientos de Reidemeister y se pueden visualizar en la figura 2.

 $^{^{1}}$ En este artículo trabajaremos únicamente con nudos y enlaces dóciles, que son aquellos que se pueden ver como polígonos enroscados en \mathbb{R}^{3} .



Figura 2: Movimientos de Reidemeister.

Definición 2. Diremos que dos diagramas son equivalentes si se pueden obtener el uno del otro realizando un número finito de movimientos de Reidemeister R_1 , R_2 y R_3 .

El siguiente teorema relaciona equivalencia de nudos y enlaces con equivalencia de diagramas.

Teorema 3 (Reidemeister). Sean D y D' diagramas de dos enlaces L y L', respectivamente. Entonces, L y L' son equivalentes si y solo si D y D' son equivalentes como diagramas.

En particular, de este teorema deducimos que, dado un enlace, todos sus diagramas son equivalentes. Dados dos enlaces que son equivalentes, decimos que son el mismo enlace. Por tanto, a partir de ahora cuando hablamos de nudo o enlace nos referimos a su clase de equivalencia.

Ahora que ya estamos familiarizados con el concepto de equivalencia de nudo nos podemos hacer la siguiente pregunta: ¿existe algún algoritmo que nos permita conectar dos diagramas por medio de movimientos de Reidemeister? La respuesta es, en general, negativa. Este hecho complica el determinar si dos nudos son equivalentes. En su lugar, hacemos uso de invariantes de nudos y enlaces que nos ayudarán a determinar si dos nudos o enlaces **no** son equivalentes.

Definición 4. Dado un nudo (enlace) L, diremos que un valor o propiedad i(L) es un invariante de nudos (enlaces) si se verifica que para cualquier nudo (enlace) L' equivalente a L tenemos que i(L) = i(L').

En virtud del teorema 3, se cumplirá que si una propiedad de un diagrama se conserva al realizar movimientos de Reidemeister, entonces será un invariante de nudos y enlaces. De esta manera somos capaces de calcular invariantes de nudos y enlaces a partir de diagramas.

Encontramos ejemplos de invariantes de muy distintos tipos: el número mínimo de cruces que puede tener un diagrama de un nudo, considerando todos los posibles diagramas del nudo (*crossing num-ber*); si los arcos del diagrama pueden ser coloreados por tres colores siguiendo unas ciertas normas (*tricoloreabilidad*); algebraicos, como el grupo fundamental del complementario de un nudo; invariantes polinómicos...

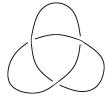
En 1984, el matemático neozelandés Vaughan Jones descubrió un nuevo invariante que supuso una revolución en la teoría de nudos. El trabajo de Jones [7] sobre ciertas álgebras de von Neumann, estudiadas en análisis funcional, le llevó a descubrir este nuevo invariante polinómico que recibe el nombre de **polinomio de Jones**.

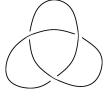
El polinomio de Jones tiene una relevancia doble. Por una parte, dentro de la teoría de nudos, por su sencillez conceptual y puesto que permite distinguir gran cantidad de nudos de su imagen especular: el nudo dado por la imagen del nudo inicial en un espejo. En la figura 3 podemos encontrar un ejemplo de nudo y su imagen especular. Por otro lado, generó un vínculo entre la teoría de nudos y la geometría y la física cuántica. Todo esto llevó a Jones a ser galardonado con la Medalla Fields en 1990. Más información acerca del descubrimiento del polinomio de Jones se puede encontrar en el artículo de *La Gaceta de la RSME* [1].

3. El polinomio de Jones

El polinomio de Jones es un invariante de nudos y enlaces orientados.

Definición 5. Un nudo o enlace orientado es aquel en el que hemos asignado un sentido de recorrido a cada una de sus componentes conexas. Este sentido queda representado en el diagrama por medio de





(a) Trébol a izquierda.

(b) Trébol a derecha.

Figura 3: Diagramas del nudo trébol (izquierda) y su imagen especular (derecha). Estos diagramas no son equivalentes.

flechas. Dos enlaces orientados serán equivalentes si son equivalentes entre sí de acuerdo a la definición de equivalencia de enlaces no orientados y, además, se conserva la orientación de sus componentes conexas.

Poco después del descubrimiento por parte de Jones de este invariante, se encontró una forma axiomática de definir el polinomio de Jones a partir de diagramas de nudos. Para introducirla necesitamos familiarizarnos primero con una nueva notación. Consideremos un diagrama de un enlace orientado L, y fijémonos en un cruce de dicho diagrama. Vamos a asignar un signo a dicho cruce de la siguiente manera. Nos acercamos al punto de cruce por el paso inferior siguiendo la orientación fijada. Ahora, miramos la orientación del paso superior. Si va de izquierda a derecha, asignamos al cruce el signo «+»; si por el contrario va de derecha a izquierda, le asignaremos el signo «-». A partir de esto, fijado un cruce de un enlace orientado L, si dicho cruce tiene signo «-», convenimos $L = L_{-}$ y haciendo los correspondientes cambios en el cruce, de acuerdo a lo que se muestra en la figura 4, construimos los enlaces L_{+} y L_{0} . Por el contrario, si el cruce tiene signo «+», convenimos $L = L_{+}$ y construimos los enlaces L_{-} y L_{0} .



Figura 4: Dado un diagrama de un enlace L y fijado un cruce del mismo, empleamos esta notación para designar a los diagramas obtenidos al hacer la correspondiente modificación sobre dicho cruce.

Ahora ya podemos dar la siguiente definición desde la perspectiva de la teoría de nudos del polinomio de Jones.

Definición 6. El polinomio de Jones² de un nudo o enlace orientado L es el polinomio de Laurent en la variable q, $V_L(q)$, que satisface las siguientes reglas:

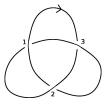
- (JP1) $V_{\varnothing}(q)=1$, donde $V_{\varnothing}(q)$ es el polinomio del nudo vacío.
- (JP2) El polinomio de Jones del nudo trivial será $V_o(q) = q + q^{-1}$.
- (JP3) $q^2V_{L_-}(q) q^{-2}V_{L_+}(q) = (q q^{-1})V_{L_0}(q)$.

Esta versión del polinomio de Jones aquí introducida se conoce formalmente como **polinomio de Jones aumentado**.

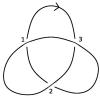
En la siguiente sección veremos que el polinomio de Jones es un invariante de enlaces orientados.

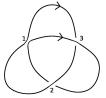
Ejemplo 7. Vamos a calcular el polinomio de Jones del trébol a izquierda. Denotamos al polinomio como $V_T(q)$. Para ello consideramos el siguiente diagrama del nudo orientado, con la orientación indicada por la flecha, y con los cruces numerados como vemos en la siguiente imagen.

²Por motivos prácticos, la definición del polinomio de Jones que usaremos se corresponde a la usada por Asaeda y Khovanov [2] y es diferente a la de la mayoría de libros de texto.



Nos fijamos en el cruce que hemos numerado con el número 1. De acuerdo a la figura 4, a este nudo le corresponde la notación de L_- . Los nudos que denominábamos L_+ y L_0 , en este orden, son los siguientes.



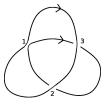


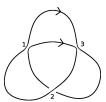
El axioma (JP3) nos da la relación

(1)
$$q^2 V_T(q) - q^{-2} V_{L_+}(q) = (q - q^{-1}) V_{L_0}(q)$$

para los polinomios de Jones de los nudos considerados. Si conocemos los polinomios de V_{L_+} y V_{L_0} podremos obtener el polinomio de Jones del trébol a izquierda. Pasemos a calcularlos.

Si realizamos un movimiento R_2 al diagrama del nudo L_+ y posteriormente un R_1 al único cruce restante, el cruce 2, obtendremos un diagrama del nudo trivial. Al ser L_+ equivalente al nudo trivial y el polinomio de Jones un invariante de nudos, tenemos, por medio de (JP2), que $V_{L_+}(q) = q + q^{-1}$. El diagrama L_0 corresponde a un diagrama del conocido como **enlace de Hopf**, que vamos a denotar por K. Para calcular su polinomio de Jones volvemos a hacer uso de (JP3), pero ahora nos fijamos en el cruce 3. El enlace K se corresponde con el que ahora denotaremos por K_- según las relaciones de la figura 4. Los otros enlaces a considerar son los que denotamos por K_+ y K_0 y que representamos a continuación.





Realizando un movimiento R_1 en el cruce 2 al enlace K_0 , vemos que se trata del nudo trivial. Tendremos que $V_{K_0}(q) = q + q^{-1}$. Por otro lado, si realizamos un movimiento R_2 en K_+ , obtenemos el enlace formado por una unión disjunta de dos nudos triviales. El lector puede comprobar que el polinomio de Jones de este enlace será $V_{K_+}(q) = (q + q^{-1})^2$ (pista: partir de un diagrama del nudo trivial al que se le ha realizado un movimiento R_1 y buscar aplicar (JP3)). En definitiva, de (JP3) tenemos que

$$q^2 V_{K_-}(q) - q^{-2} V_{K_+}(q) = (q - q^{-1}) V_{K_0}(q)$$

y despejando obtendremos que $V_{L_0}(q) = V_{K_-}(q) = q^{-6} + q^{-4} + q^{-2} + 1$. Finalmente, ya podemos despejar $V_{L_-}(q)$ de (1). Obtenemos así el polinomio de Jones del trébol a izquierda,

$$V_T(q) = V_{L_-}(q) = -q^{-9} + q^{-5} + q^{-3} + q^{-1}.$$

Ejemplo 8. Calcular el polinomio de Jones del trébol a derecha, observar que es diferente al del trébol a izquierda y concluir que, puesto que el polinomio de Jones es un invariante de nudos, son nudos no equivalentes.

3.1. El polinomio corchete

Kauffman [8] introdujo una nueva forma de calcular el polinomio de Jones. La idea de Kauffman permite simplificar el cálculo del polinomio de Jones de un enlace partiendo de uno de sus diagramas y trabajando con diagramas más sencillos, obtenidos al hacer desaparecer cruces del diagrama original. De esta manera, se facilita el cómputo del polinomio de Jones. Estudiamos a continuación el enfoque de Kauffman. Comenzamos definiendo el polinomio corchete.

Definición 9. Sea D un diagrama de un enlace L. Definimos su polinomio corchete³ $\langle D \rangle$ como el polinomio de Laurent en la variable q definido por las siguientes reglas:

(BR1)
$$\langle \emptyset \rangle = 1$$
.

(BR2)
$$\langle D \cup \bigcirc \rangle = (q + q^{-1})\langle D \rangle$$
.

(BR3)
$$\langle \rangle = \langle \rangle - q \langle \rangle$$
.

(BR3')
$$\langle \rangle = \langle \rangle \langle \rangle - q \langle \rangle \rangle$$

Esta versión del polinomio corchete de Kauffman se conoce como corchete de Kauffman aumentado.

(BR2) nos relaciona el polinomio corchete de un diagrama D del enlace L con el corchete resultante de añadir un nudo trivial sin enlazar al diagrama D. En particular, tomando $D = \emptyset$, se tiene que $\langle \bigcirc \rangle = q + q^{-1}$.

(BR3) y (BR3'), por su parte, nos relacionan diagramas que únicamente se diferencian en un un entorno de un cruce en el cual toman las formas ahí indicadas.

Nótese que el polinomio corchete, a diferencia del polinomio de Jones, se define para diagramas (tampoco interviene la orientación), no para enlaces. Esto es porque no es un invariante de nudos, no se conserva por movimientos de Reidemeister. Sin embargo, estudiar la manera en la que el polinomio corchete se comporta al realizar estos movimientos nos permitirá obtener a partir de él el polinomio de Jones.

Lema 10. Al realizar un movimiento de Reidemeister de tipo R_1 se dan las siguientes igualdades entre los polinomios corchete de los diagramas que intervienen:

$$\langle \rangle \rangle = -q^2 \langle \rangle \rangle,$$

$$\langle \rangle \rangle = q^{-1} \langle \rangle \rangle.$$

Observación 11. Nótese que la igualdad (2) se da cuando el cruce estudiado tiene signo «—» al darle una orientación cualquiera, mientras que en (3) tiene signo «+».

Demostración. Haremos la demostración para la igualdad (2), la otra se deja como ejercicio.

Partimos de (), y haciendo uso de (BR3) obtenemos que

$$\langle \rangle \rangle = \langle \rangle \rangle - q \langle \rangle \rangle.$$

Finalmente, aplicando (BR2) al segundo sumando tenemos que

$$\left\langle \right\rangle \right\rangle = \left\langle \right\rangle \right\rangle - q(q + q^{-1}) \left\langle \right\rangle \right\rangle = -q^2 \left\langle \right\rangle \right\rangle.$$

Ejemplo 12. Prueba que el polinomio corchete es invariante por movimientos de tipo R_3 y que al realizar un movimiento de tipo R_2 la relación entre los diagramas es

$$\langle \rangle \rangle = -q \langle \rangle \langle \rangle.$$

 $^{^{3}}$ A pesar de que el nombre que usamos es el mismo que el que usa Kauffman, no se trata del mismo polinomio; de hecho, este polinomio no es invariante por los movimientos R_{2} .

Los siguientes resultados nos relacionan el polinomio corchete de un diagrama D de un enlace orientado L con el polinomio de Jones de L.

Teorema 13. Definimos el polinomio f[L] para un enlace orientado L como f[L] = f[D], siendo D un diagrama de L y

(4)
$$f[D] = (-1)^{n} q^{n_{+} - 2n_{-}} \langle D \rangle,$$

donde n_+ y n_- son el número de cruces positivos y negativos según la orientación de D, respectivamente, y el corchete se calcula para el diagrama D obviando la orientación. Entonces, f[D] es un invariante de enlaces orientados.

Demostración. Este resultado se obtiene demostrando que f[D] es invariante por movimientos de Reidemeister. Para ello basta combinar los resultados obtenidos en el lema 10 y el ejemplo 12.

Al probar que es un invariante de enlaces orientados, podemos definir el polinomio f para enlaces orientados en lugar de diagramas. Con el siguiente teorema demostramos que el polinomio de Jones es un invariante de nudos y enlaces.

Teorema 14. El polinomio f es el polinomio de Jones:

$$f[L] = V_L(q).$$

Demostración. El polinomio f es un polinomio de Laurent, necesitamos ver que verifica los axiomas del polinomio de Jones.

Comprobar (JP1) y (JP2) es inmediato. Nos centramos en ver (JP3), esto es, probar que, dado un diagrama de un enlace orientado L y fijado un cruce cualquiera del mismo, se verifica que

(5)
$$q^{2}f[L_{-}] - q^{-2}f[L_{+}] = (q - q^{-1})f[L_{0}],$$

de acuerdo a la notación dada en la figura 4.

Supongamos que el número de cruces positivos y negativos de L_0 es $n_+(L_0) = p$ y $n_-(L_0) = s$. Entonces, como L_- y L_+ coinciden con L_0 salvo en el cruce en cuestión, sus números de cruces de cada signo son $n_+(L_-) = p$, $n_-(L_-) = s + 1$, $n_+(L_+) = p + 1$ y $n_-(L_+) = s$.

Sustituyendo en (5), de acuerdo a la definición del polinomio f dada en (4) y haciendo uso del número de cruces positivos y negativos en cada enlace, se llega a que (5) es equivalente a

$$-\langle L_{\perp}\rangle - q^{-1}\langle L_{\perp}\rangle = (q - q^{-1})\langle L_0\rangle,$$

donde ahora ya no se está considerando la orientación de los enlaces.

Por último la ecuación (6) es cierta al corresponderse a la expresión

$$-q^{-1}(BR3') - (BR3).$$

Corolario 15. El polinomio de Jones es un invariante de nudos y enlaces orientados.

3.2. Suma de estados

Al utilizar los axiomas (BR3) y (BR3')para el cálculo del polinomio corchete de un diagrama, estamos reduciendo el cálculo a obtener el corchete de dos diagramas con un cruce menos. El proceso de hacer desaparecer un cruce de un diagrama de una de las maneras indicadas en (BR3) o (BR3')recibe el nombre de **suavizado** del cruce y le asignamos la notación de acuerdo a la definición siguiente.

Definición 16. Sea L un nudo o enlace, consideramos un diagrama D del mismo. Si nos fijamos en un cruce de D:

- Diremos que hemos realizado un 0-suavizado del cruce si sustituimos el cruce por
- Diremos que hemos realizado un 1-suavizado del cruce si sustituimos el cruce por .

El resultado de realizar un suavizado de todos los cruces de un diagrama es una unión disjunta de nudos triviales que se conoce como **estado** del diagrama. Dado un diagrama D con n cruces podemos obtener 2^n estados. Aplicando (BR3) o (BR3')a cada uno de los cruces de un diagrama, podremos simplificar el polinomio corchete de D como la suma de los corchetes de cada estado, fácil de calcular, multiplicando cada uno por una potencia de q según el número de 1-suavizados realizados para obtener dicho estado.

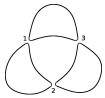
Sea χ el conjunto ordenado de cruces de D. Podemos asociar cada estado de D con un vértice α del cubo n-dimensional $\{0,1\}^{|\chi|}$, asociando a un vértice un 0 si hemos realizado un 0-suavizado y un 1 en el caso de un 1-suavizado. A dicho estado lo denotaremos por s_{α} .

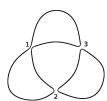
Cada estado consta de un número distinto de nudos triviales; denominamos $|s_{\alpha}|$ a este número para cada estado. Por (BR2), sabemos que el polinomio corchete de una unión disjunta de k nudos triviales es $(q+q^{-1})^k$. Por tanto, obtendremos la siguiente expresión para el corchete de D:

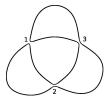
$$\langle D \rangle = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^{|\mathcal{X}|}} (-1)^{r_{\alpha}} q^{r_{\alpha}} (q+q^{-1})^{|s_{\alpha}|},$$

donde r_{α} es el número de 1-suavizados realizados para obtener el estado s_{α} : $r_{\alpha} = \sum_{i \in \{1,...,|\chi|\}} \alpha_i$.

Ejemplo 17. Vamos a ver algunos estados del trébol a izquierda, que dibujábamos en la figura 3a. El número de cruces del trébol es 3. Por tanto, los posibles estados del trébol vendrán determinados por los vectores $\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : \alpha_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3\}$, donde las componentes del vector se corresponden a la enumeración de los cruces que vemos en las imágenes de la figura 5.







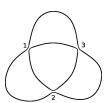


Figura 5: Estados correspondientes a las elecciones de suavizados determinadas por los vectores (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1) y (1, 1, 1), ordenados de izquierda a derecha.

4. Homología de Khovanov

La homología es un recurso empleado en topología algebraica que nos permite asociar a espacios topológicos un conjunto de grupos abelianos los cuales son invariantes topológicos, es decir, se conservan por homeomorfismos. De esta manera, su cálculo resulta de gran utilidad para determinar cuándo dos espacios son homeomorfos o no.

Simplificadamente, la obtención de los grupos de homología de un espacio topológico se puede resumir en tres pasos.

- 1. **Obtención de los grupos de cadenas**. En primer lugar, se asocia al espacio topológico una familia de grupos $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ llamados grupos de cadenas. Existen distintos procedimientos para generar estos grupos según el tipo de homología empleada: simplicial, singular, celular...
- 2. **Definición de los homomorfismos borde**. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ el n-ésimo homomorfismo borde ∂_n será un homomorfismo entre el (n+1)-ésimo grupo de cadenas y el n-ésimo, de manera que se cumpla que la composición $\partial_{n-1}\partial_n$ es el homomorfismo nulo para todo n. La sucesión de grupos de cadenas

y homomorfismos bordes forman lo que se conoce como un **complejo de cadenas**, representado por el siguiente diagrama:

$$(8) \qquad \dots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_n} C_n \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-1} \longrightarrow \dots$$

Generalmente suprimiremos los subíndices cuando quede claro a qué homomorfismos nos referimos. La igualdad que se verifica entonces es $\partial^2 = 0$.

3. **Grupos de homología**. La igualdad $\partial^2 = 0$ que verifican los homomorfismos borde nos asegura que $\operatorname{Im}(\partial_n) \subset \operatorname{Ker}(\partial_{n-1})$ para todo n y, al estar trabajando con grupos abelianos, podemos definir para cada n el n-ésimo grupo de homología como el cociente

$$H_n \coloneqq \frac{\operatorname{Ker}(\partial_{n-1})}{\operatorname{Im}(\partial_n)}.$$

Estos grupos son isomorfos para espacios homeomorfos.

Para el lector que quiera profundizar, una introducción muy visual a la homología se puede encontrar en el libro de Hatcher [6].

Khovanov [9] adaptó la idea de la homología para espacios topológicos a enlaces orientados. La homología definida por Khovanov tiene como pieza fundamental al polinomo de Jones. La idea es expresar este polinomio a partir de los grupos del complejo de cadenas del que partimos para calcular los grupos de homología. Esto lo logramos introduciendo el concepto de **rango** de un **grupo abeliano libre** que veremos a continuación. Este proceso de expresar números naturales o polinomios a partir de propiedades de espacios vectoriales o grupos abelianos se conoce como **categorificación**. Uno de los ejemplos clásicos es la expresión de la característica de Euler de un espacio topológico a partir de sus grupos de homología.

En lo que resta del artículo expondremos una introducción a la homología de Khovanov siguiendo un enfoque combinatorio presentado por Viro [12]. Otro acercamiento a esta teoría de homología, pero que requiere de la introducción de más conceptos algebraicos, es el presentado por Bar-Natan [3]. El primer paso para ello pasa por introducir algunas definiciones de álgebra conmutativa.

Definición 18. Un grupo abeliano A está **finitamente generado** si existen elementos $a_1, a_2, \ldots, a_r \in A$ tales que cualquier elemento $a \in A$ se puede expresar como $a = \sum_{i=1}^r n_i a_i$ para algunos $n_i \in \mathbb{Z}$. Sea $0 \in A$ el elemento neutro. Si el hecho de que $\sum_{i=1}^r n_i a_i = 0$ implica que $n_i = 0$ para todo $1 \le i \le r$, diremos que A es **libre** o está **libremente generado** por a_1, \ldots, a_r . En este caso, al conjunto de elementos a_1, \ldots, a_r se les denomina sistema libre de generadores o base de A.

Ejemplo 19. Sean D un diagrama de un enlace y $s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_r}$ un conjunto de estados de D. Entonces, denominamos grupo abeliano libre generado por los estados $s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_r}$ a

$$C = \{ n_1 s_{\alpha_1} + n_2 s_{\alpha_2} + \dots + n_r s_{\alpha_r} : n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z} \}.$$

Definición 20. Si A es un grupo abeliano libre finitamente generado por un sistema libre de r generadores, decimos que A tiene rango r y lo denotamos por rk(A) = r.

Ejemplo 21. El rango del grupo abeliano libre *C* generado por
$$s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_r}$$
 es $\mathrm{rk}(C) = r$.

Volviendo a nuestra homología para nudos, sea K un enlace orientado y D un diagrama del enlace. La categorificación del polinomio de Jones de K propuesta por Khovanov consiste en generar una familia de complejos de cadenas $\{C^{i,j}(D)\}_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$, donde al diagrama D le asociamos grupos libres finitamente generados que dependerán de un par de enteros i y j, de manera que los rangos de estos grupos cumplan la igualdad

(9)
$$V_{K}(q) = \sum_{i,j} (-1)^{i} q^{j} \operatorname{rk}(C^{i,j}(D)),$$

donde $\operatorname{rk}(C^{i,j}(D))$ denota el rango del grupo $C^{i,j}(D)$. La elección de estos grupos depende del diagrama.

Una vez obtenidos estos grupos, definiremos unos homomorfismos entre ellos que nos permitan construir una serie de complejos de cadenas. Los grupos de homología resultantes de estos complejos serán invariantes de nudos.

4.1. Grupos de cadenas

Vamos a ver qué grupos de cadenas asociamos a un diagrama de nudo. Haciendo uso de las expresiones (4) y (7), podemos expresar el polinomio de Jones de un enlace orientado *K* a partir de uno de sus diagramas *D* como

(10)
$$V_K(q) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^{|\mathcal{X}|}} (-1)^{n_- + r_\alpha} q^{r_\alpha + n_+ - 2n_-} \left(q + q^{-1} \right)^{|\mathcal{S}_\alpha|},$$

donde recordamos que n_- y n_+ son, respectivamente, los números de cruces negativos y positivos de D, $|s_{\alpha}|$ es el número de nudos triviales que conforman el estado s_{α} y $r_{\alpha} = \sum_{i \in \{1,...,|\chi|\}} \alpha_i$.

Cada término del sumatorio de la parte derecha de la expresión (10) corresponde a un estado del diagrama de D. Asociar un grupo de cadenas a cada estado de D no es conveniente, dado que queremos que un grupo de cadenas afecte a una única potencia de q, lo que no conseguiríamos en este caso. Para lograr este objetivo, introducimos una propiedad adicional a los estados para obtener lo que denominamos **estados mejorados**.

Definición 22. Sea D un diagrama de un enlace. Decimos que un **estado mejorado**, que denotaremos con S, es un estado S de D en el cual adicionalmente hemos asignado un signo positivo o negativo a cada uno de los nudos triviales que forman S.

Observación 23. Fijado $\alpha \in \{0, 1\}^{|\chi|}$, asociado al estado s_{α} encontramos $2^{|s_{\alpha}|}$ estados mejorados.

La importancia de esta nueva definición es que nos permite expresar el factor $(q+q^{-1})^{|S_{\alpha}|}$ a partir de monomios que dependen de los estados mejorados como sigue. El teorema del binomio de Newton nos dice que

(11)
$$(q+q^{-1})^{|s_{\alpha}|} = \sum_{k=0}^{|s_{\alpha}|} {|s_{\alpha}| \choose k} q^{|s_{\alpha}|-k} q^{-k}.$$

Interpretando k en cada estado como el número de nudos triviales con signo negativo, entonces $|s_{\alpha}|-k$ será el número de nudos triviales con signo positivo en ese estado y $\binom{|s_{\alpha}|}{k}$ es el número de estados mejorados con k y $|s_{\alpha}|-k$ nudos triviales negativos y positivos, respectivamente. Este hecho demuestra que

(12)
$$(q+q^{-1})^{|s_{\alpha}|} = \sum_{S_{\alpha}} q^{\tau(S_{\alpha})},$$

donde el sumatorio se realiza para todos los estados mejorados del estado s_{α} y $\tau(S_{\alpha})$ es la diferencia entre nudos triviales positivos y negativos, que sería el término $|s_{\alpha}| - 2k$ correspondiente.

Sustituyendo la igualdad (12) en (10) obtenemos la siguiente expresión para el polinomio de Jones del enlace K a partir del diagrama D:

(13)
$$V_K(q) = \sum_{S} (-1)^{n_- + r(S)} q^{r(S) + n_+ - 2n_- + \tau(S)},$$

donde el sumatorio es para todos los estados mejorados del diagrama D. Obsérvese que los términos n_+ y n_- dependen del diagrama orientado D, mientras que el número de 1-suavizados del estado mejorado, que a partir de ahora denotamos por r(S), y $\tau(S)$ variarán en función del estado mejorado S.

Introducimos la siguiente notación para los exponentes de la expresión (13). Sea *S* un estado mejorado del diagrama *D*; escribimos

$$i(S) = n_{-} + r(S),$$
 $j(S) = r(S) + n_{+} - 2n_{-} + \tau(S).$

Entonces, si denotamos por $C^{i,j}(D)$ al grupo abeliano libre generado por los estados mejorados de D con i(S) = i y j(S) = j, podemos expresar el polinomio de Jones de K en función de los rangos de estos grupos de acuerdo a la expresión

$$V_K(q) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} q^j \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \operatorname{rk}(C^{i,j}(D)).$$

4.2. Paso del complejo de cadenas a la homología

En el apartado anterior obtenemos para un diagrama de nudo D los que serán nuestros grupos de cadenas, los grupos $\{C^{i,j}(D)\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$. Para poder definir la homología de Khovanov trabajaremos con una familia de complejos de cadenas de la forma

$$(15) \qquad \dots \longrightarrow C^{i-1,j}(D) \longrightarrow C^{i,j}(D) \longrightarrow C^{i+1,j}(D) \longrightarrow \dots$$

para cada $j \in \mathbb{Z}$. En esta sección definimos homomorfismos $\partial: C^{i,j}(D) \to C^{i+1,j}(D)$ para cada $i, j \in \mathbb{Z}$ que verifiquen $\partial^2 = 0$ y nos permitan definir los grupos de homología de nuestras cadenas.

Observación 24. Hay que notar que los índices del complejo de cadenas (15) del que obtendremos la homología de Khovanov son crecientes, a diferencia del que introducíamos en (8). Esto se debe a que, en realidad, la homología de Khovanov no es propiamente una homología, sino una cohomología. Aún así, por coherencia con la nomenclatura habitual usaremos el término homología para referirnos a ella. Para conocer más sobre la diferencia entre homología y cohomología remitimos al lector interesado nuevamente al libro de Hatcher [6].

Para definir el homomorfismo $\partial: C^{i,j}(D) \to C^{i+1,j}(D)$ basta dar la imagen para los generadores de $C^{i,j}(D)$. Sea S un generador de $C^{i,j}(D)$. Podemos expresar su imagen por ∂ como

$$\partial(S) = \sum_{T} (S : T)T,$$

donde T son generadores del grupo $C^{i+1,j}$ y (S:T) es un número entero que depende de los estados mejorados S y T. Al valor (S:T) lo denominamos **número de incidencia** de S y T. Los números de incidencia son los valores que nos faltan por determinar para acabar de definir el homomorfismo ∂ . A continuación, daremos unas normas, en forma de propiedades, para determinar el valor de los números de incidencia de dos estados y lo ejemplificaremos calculando todos los números de incidencia cuando S es un estado mejorado del trébol a izquierda. Las dimensiones de este documento nos impiden realizar un cálculo completo de la homología de este nudo. El lector interesado podrá encontrar el cálculo de la homología de Khovanov completa del trébol a derecha (con algunas diferencias de notación) en el trabajo de fin de grado de Rivera Bustos [11].

Sean dos estados mejorados S y T cuyo número de incidencia (S: T) es distinto de cero; entonces diremos que S es **incidente** a T. De ahora en adelante, nos centraremos en establecer unas condiciones para descartar aquellos estados no incidentes. La primera de estas condiciones se desprende de la definición del homomorfismo borde, según la cual, para que un estado S sea incidente a uno T, requerimos que, si S pertenece al grupo de cadenas $C^{i,j}(D)$, el estado T debe pertenecer al grupo $C^{i+1,j}(D)$.

Propiedad 25. Para que un estado (mejorado) S sea incidente a un estado (mejorado) T necesariamente debe cumplirse que i(T) = i(S) + 1 y j(S) = j(T).

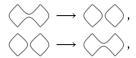
Observación 26. Sean r(S) y r(T) el número de 1-suavizados de S y T, respectivamente. Del hecho de que i(T) = i(S) + 1, deducimos que r(T) = r(S) + 1. Además, como j(S) = j(T), de lo anterior deducimos que $\tau(T) = \tau(S) - 1$.

Recordemos que la obtención de un estado (mejorado) implicaba la elección de un 0- o 1-suavizado a cada uno de los cruces del diagrama, que representábamos en cada caso como un vector $\alpha \in \{0,1\}^{|\mathcal{X}|}$. La observación 26 nos dice que el número de 1-suavizados para todo $T \in C^{i+1,j}(D)$ es mayor que el de S en una unidad y nos permite imponer la siguiente restricción para los números de incidencia.

Propiedad 27. El número de incidencia (S:T) con $S \in C^{i,j}(D)$ y $T \in C^{i+1,j}(D)$ será 0 cuando no se cumpla que la elección de 0- y 1-suavizados de cada uno de los estados (mejorados) coincide en todos los cruces del diagrama D salvo en uno, en el cual en S será un 0-suavizado y en T un 1-suavizado. A dicho cruce lo denotaremos por x(S:T).

TEMat, 5 (2021) e-issn: 2530-9633 11

La sustitución de un 0-suavizado por un 1-suavizado que comentamos en la propiedad 27 puede provocar una de las dos modificaciones siguientes en los nudos triviales de los estados:



donde el cruce que se altera es x(S:T). Es decir, o bien uno de los nudos triviales del estado se divide en dos, o bien dos nudos triviales se unen para dar lugar a una única componente conexa. El resto de nudos triviales de los estados no se verán afectados, lo que nos conduce a la siguiente observación sobre los números de incidencia.

Observación 28. Si S es un estado incidente a T, i. e., $(S:T) \neq 0$, entonces el número de nudos triviales de S y T difiere en 1. Se cumple, aplicando la notación que empleábamos en la sección 3.2 ahora a estados mejorados, que $|T| = |S| \pm 1$.

Además, imponemos una última restricción en forma de propiedad a los números de incidencia. En este caso es resultado de la asignación de signos a los nudos triviales de los estados mejorados.

Propiedad 29. Dados dos estados mejorados S y T, S no será incidente a T a no ser que los nudos triviales comunes, es decir, aquellos que no se ven afectados por la modificación del suavizado del cruce x(S:T), compartan signo en S y T.

Recogemos todos los casos posibles que se deducen de las restricciones que hemos impuesto para que dos estados sean incidentes en la siguiente propiedad.

Propiedad 30. Sean $S \in C^{i,j}(D)$ y $T \in C^{i+1,j}(D)$. Entonces, S es incidente a T si se encuentran en uno de los siguientes casos:

- 1. |T| = |S| 1, los dos nudos triviales de S que se unen para dar lugar a uno en T tienen signo positivo y el nudo trivial resultante tiene signo positivo.
- 2. |T| = |S| 1, los dos nudos triviales de S que se unen tienen signo opuesto y el nudo trivial resultante en T tiene signo negativo.
- 3. |T| = |S| + 1, el nudo trivial de S que se divide en dos en T tiene signo negativo y los dos nudos triviales resultantes de la división tienen signo negativo.
- 4. |T| = |S| + 1, el nudo trivial de S que se divide en dos en T tiene signo positivo y los dos nudos triviales resultantes de la división tienen signo opuesto.

Demostración. La prueba de esta propiedad es consecuencia de las observaciones 26 y 28.

En definitiva, las propiedades 25, 27 y 29 determinan cuándo dos estados son incidentes o no y nos permiten dar una definición completa del homomorfismo ∂ .

Ejemplo 31. Sea S el estado mejorado obtenido a partir del estado del trébol a izquierda correspondiente a las elecciones de suavizados dada por el vector (0,0,0), que ya obteníamos en el ejemplo 17, y en el que le hemos asignado un signo «+» o «-» a cada uno de los tres nudos triviales, y que representamos en la parte superior de la figura 6. Por la propiedad 27, los posibles estados a los que S es incidente son aquellos cuyo vector de suavizados tiene la forma $\{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3):\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1,\alpha_i\in\{0,1\},i=1,2,3\}$. En la figura 6 hemos enumerado con letras todos estos posibles estados mejorados.

La propiedad 29 nos reduce el número de posibles estados a los que nuestro estado mejorado S es incidente. Observando en cada caso el nudo trivial que queda invariante, podemos comprobar que el número de incidencia (S:T) será 0 cuando T es uno de los estados a), c), e), g), j) y l). De esta manera, S no es incidente a estos estados mejorados.

Con ayuda de la propiedad 30, podemos determinar por completo a qué estados mejorados es incidente S. Observamos que en nuestro caso se cumple que siempre |T| = |S| - 1. Estudiamos entonces qué estados mejorados cumplen las condiciones 1 o 2 de la propiedad 30. Comprobamos que solo los estados d) y h) verifican una de estas dos condiciones. Concluimos que S es incidente únicamente a los estados mejorados d) y h).

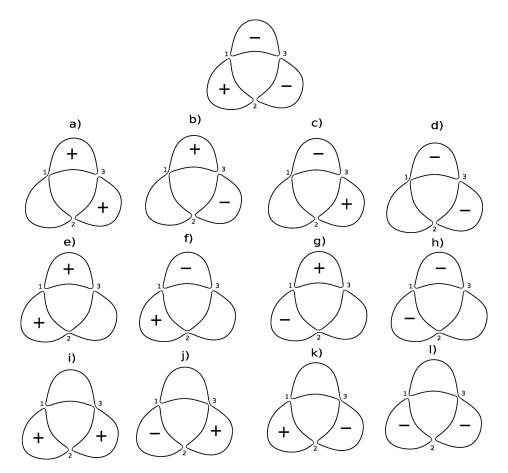


Figura 6: Estado mejorado del trébol a izquierda definido por el vector de suavizados (0,0,0), un nudo trivial con signo positivo y dos negativos. Denotados con letras, los posibles estados mejorados incidentes a él. De acuerdo a las propiedades, el estado incial solo es incidente a d) y h).

Definición 32. Denotando por $S \in C^{i,j}(D)$ y $T \in C^{i+1,j}(D)$ a los generadores de sus respectivos grupos, definimos el homomorfismo $\partial: C^{i,j}(D) \to C^{i+1,j}(D)$, dando la imagen para los generadores, como

$$\partial(S) = \sum_{T} (S : T)T,$$

donde (S:T)=0 si S no es incidente a T. Si S es incidente a T, el número de incidencia es $(S:T)=(-1)^l$, donde l es el número de 1 que quedan a la derecha de la posición del cruce x(S,T) en el vector α que se asocia con el estado S (o bien T, pues será el mismo número), esto es, el cardinal de $\{i\in\chi:i>x(S:T),\alpha(i)=1\}$. El número de incidencia dependerá, por tanto, de la elección en el ordenamiento de los cruces.

Ejemplo 33. Retomando el ejemplo del trébol a izquierda orientado de acuerdo al ejemplo 7, vamos a calcular el homomorfismo $\partial: C^{3,-7}(D) \to C^{4,-7}(D)$. Observamos que el número de cruces negativos de nuestro diagrama es $n_-=3$ y el de positivos, $n_+=0$. De aquí deducimos que los únicos estados mejorados con i=3 son aquellos cuyo vector de suavizados es (0,0,0). Por tanto, el grupo de cadenas $C^{3,-7}(D)$ es el grupo abeliano libre generado por los estados mejorados con vector de suavizado (0,0,0) y las tres mejoras posibles de asociar una etiqueta positiva a un nudo trivial y dos negativas a los restantes. Uno de estos estados mejorados es el estado S del ejemplo 31 y, puesto que los otros dos casos son simétricos, nos centraremos en calcular los números de incidencia para el generador S.

Para calcular el homomorfismo que nos proponemos, necesitamos por tanto conocer los números de incidencia de los estados a los que S es incidente. Vemos en el ejemplo 31 que estos estados son los que enumeramos con d) y h) en la figura 6, y que denotamos ahora por T_d y T_h , respectivamente.

Calculamos primero $(S:T_d)$. Tenemos en cuenta que el cruce $x(S:T_d)$ es el cruce 1. Como el vector de suavizados asociado a S es (0,0,0), vemos que no tenemos ningún 1 a la derecha de la primera posición. Tendremos que $(S:T_d)=(-1)^0=1$. El cruce $x(S:T_h)$ es el cruce 2. Tampoco hay unos a la derecha de la segunda posición en el vector de suavizados de S. Concluimos que igualmente $(S:T_h)=1$.

En definitiva, la imagen de S es

$$\partial(S) = T_d + T_h$$
.

El homomorfismo $\partial: C^{3,-7}(D) \to C^{4,-7}(D)$ quedará determinado por la imagen de S junto con la de los otros dos generadores de $C^{3,-7}(D)$. De manera similar, se comprueba que las imágenes de estos otros generadores son las siguientes. Para el generador S', que se obtiene de realizar la asignación de signo de sus nudos triviales de manera que coincide con rotar los signos de S una posición en sentido horario, la imagen por el homomorfismo borde será

$$\partial(S') = T_l + T_h$$
.

El generador S'', que se obtiene de realizar la asignación de signo de sus nudos triviales de manera que coincide con rotar los signos de S una posición en sentido antihorario, la imagen por el homomorfismo borde será

$$\partial(S'') = T_l + T_d.$$

Proposición 34. *El homomorfismo* ∂ *verifica que* $\partial^2 = 0$.

Demostración. Una demostración de este hecho se puede encontrar en el artículo de Viro [12]. ■

Como consecuencia, dado un enlace orientado K y un diagrama D del mismo, ya podemos asegurar que, para cada $j \in \mathbb{Z}$,

$$(16) \qquad \dots \longrightarrow C^{i-1,j}(D) \xrightarrow{\partial} C^{i,j}(D) \xrightarrow{\partial} C^{i+1,j}(D) \longrightarrow \dots$$

es un complejo de cadenas y podemos calcular sus grupos de homología.

Definición 35. Sea K un enlace orientado y D, uno de sus diagramas. Llamamos grupos de homología de Khovanov del diagrama D, y los denotamos por $H^{i,j}(D)$ con $i,j\in\mathbb{Z}$, a los grupos de homología obtenidos de los complejos de cadenas (16):

$$H^{i,j}(D) = \frac{\operatorname{Ker}(\partial : C^{i,j}(D) \to C^{i+1,j}(D))}{\operatorname{Im}(\partial : C^{i-1,j}(D) \to C^{i,j}(D))}.$$

Ejemplo 36. Vamos a calcular uno de los grupos de homología de nuestro diagrama del trébol a izquierda: el grupo $H^{3,-7}(D)$. Este grupo es el grupo cociente

$$H^{3,-7}(D) = \frac{\operatorname{Ker}(\partial_{3,-7})}{\operatorname{Im}(\partial_{2,-7})},$$

donde $\partial_{3,-7}$ es el homomorfismo borde $\partial_{3,-7}$: $C^{3,-7}(D) \to C^{4,-7}(D)$ y $\partial_{2,-7}$ es el homomorfismo borde $\partial_{2,-7}$: $C^{2,-7}(D) \to C^{3,-7}(D)$. Es evidente que, puesto que $n_-=3$, el grupo $C^{2,-7}(D)$ es el grupo nulo, con lo cual $\partial_{2,-7}=0$ y, con ello, $\operatorname{Im}(\partial_{2,-7})=0$. El homomorfismo $\partial_{3,-7}$ lo estudiábamos en el ejemplo 33, donde lo definíamos dando la imagen de los generadores de $C^{3,-7}(D)$.

Ahora, nos preguntamos qué forma tienen los estados mejorados $R \in C^{3,-7}(D)$ que verifiquen $\partial_{3,-7}(R) = 0$. Para ello, expresamos R en función de los generadores de su grupo de cadenas: existirán números enteros t,t' y t'' de manera que podemos expresar R como R = tS + t'S' + t''S''. Así, la imagen de R por $\partial_{3,-7}$ queda

$$\partial_{3-7}(R) = t\partial(S) + t'\partial(S') + t''\partial(S'').$$

Recurriendo a los cálculos realizados en el ejemplo 33,

$$\partial_{3,-7}(R) = t(T_d + T_h) + t'(T_l + T_h) + t''(T_l + T_d) = (t + t')T_h + (t' + t'')T_l + (t + t'')T_d,$$

por lo que la única solución a la igualdad $\partial_{3,-7}(R)=0$ se obtiene si t=t'=t''=0. De aquí deducimos que $\operatorname{Ker}(\partial_{3,-7})=0$, con lo cual el grupo de homología $H^{3,-7}(D)$ es también el grupo nulo: $H^{3,-7}(D)=0$.

Obsérvese que, en un principio, hemos definido los grupos de homología de Khovanov en función de un diagrama D. A continuación enunciamos el teorema principal de esta sección. Este importante resultado dado por Khovanov [9] nos permite definir los grupos de Khovanov para nudos y enlaces y comprobar que son invariantes de nudos.

Teorema 37. Sean D y D' dos diagramas de nudos o enlaces que se diferencian en un único movimiento de Reidemeister. Entonces, sus respectivos grupos de homología de Khovanov son isomorfos.

Corolario 38. Sea K un nudo o enlace orientado. Sus grupos de homología de Khovanov, que denotamos $como\{H^{i,j}(K)\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$, son invariantes de nudos y enlaces.

En definitiva, la homología de Khovanov se basa en el polinomio de Jones para construir un nuevo invariante de nudos y enlaces. La gran importancia de esta teoría de homología, que veremos en la próxima sección, es que no se limita a darnos la misma información que el polinomio de Jones, sino que además nos aporta nueva información sobre los nudos y enlaces para los que la calculemos.

5. Conclusión

Debido a su estrecha relación con el polinomio de Jones, podría parecer que la homología de Khovanov es el mismo invariante de nudos que el polinomio de Jones, es decir, nudos con el mismo polinomio de Jones tienen los mismos grupos de homología de Khovanov. Sin embargo, este no es el caso. La homología de Khovanov resulta ser un invariante de nudos y enlaces orientados más fuerte que el polinomio de Jones.

Existe una extensión del concepto de rango, que definíamos para grupos abelianos libres finitamente generados, a grupos abelianos finitamente generados no necesariamente libres, como es el caso de los grupos de homología de Khovanov. Así, se puede demostrar que la expresión que obteníamos para los grupos de cadenas en (14) puede ser reescrita por medio de los grupos de homología de Khovanov quedando

$$V_K(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \operatorname{rk}(H^{i,j}).$$

De esta expresión deducimos que nudos con los mismos grupos de homología de Khovanov tendrán el mismo polinomio de Jones. Sin embargo, el recíproco no es cierto, convirtiendo a la homología de Khovanov en un invariante más fuerte que el polinomio de Jones. Algún ejemplo de nudos con mismo polinomio de Jones y distinta homología de Khovanov se puede encontrar en el artículo de Bar-Natan [3]. Otro avance de la homología de Khovanov es el hecho de que permite caracterizar el nudo trivial. No habrá otros nudos o enlaces cuyos grupos $\{H^{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ sean isomorfos a los del nudo trivial. Sin embargo, es desconocido si esto es cierto para el polinomio de Jones. Aún así, y a pesar de su mejora, la homología de Khovanov sigue sin ser un invariante de nudos completo. Podemos encontrar nudos no equivalentes que comparten los mismos grupos de homología.

En 2011, el físico y también ganador de una Medalla Fields Edward Witten impartía una charla en el *Institute of Advanced Studies* de Princeton titulada *Knots and Quantum Theory* [13]. En ella hablaba, entre otras cosas, de la homología de Khovanov y reflexionaba sobre la diferencia que existe en matemáticas entre saber que «algo» es verdad y saber «por qué» es verdad. A pesar de que sabemos que la homología de Khovanov es una herramienta computable, útil y potente para estudiar la equivalencia de nudos y enlaces orientados, y de los muchos resultados surgidos sobre ella, aún no somos capaces de entender realmente la naturaleza de esta teoría y sus implicaciones tanto para la teoría de nudos y la topología como para la física cuántica, como menciona Witten en su ponencia.

Por último, para concluir este artículo, recogemos la cita original de Edward Witten antes mencionada:

Unfortunately, it is not easy to explain to someone who does not work in mathematics or physics or an allied field the differencie between knowing «what» is true and knowing «why» it is true. Yet the beauty of the «why» answer is much of the reason that people do mathematics.

TEMat, 5 (2021) e-issn: 2530-9633 15

Referencias

- [1] ARTAL BARTOLO, Enrique y LOZANO IMÍZCOZ, María Teresa. «Sir Vaughan Frederick Randal Jones». En: La Gaceta de la RSME 14.3 (2011), págs. 579-591. URL: https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id= 1022.
- [2] ASAEDA, Marta y Khovanov, Mikhail. «Notes on link homology». En: *Low dimensional topology*. Ed. por Mrowka, Tomasz R. y Ozsváth, Peter S. IAS/Park City Mathematical Series 15. Providence: American Mathematical Society, 2009, págs. 139-195. https://doi.org/10.1090/pcms/015/06.
- [3] BAR-NATAN, Dror. «On Khovanov's categorification of the Jones polynomial». En: *Algebraic & Geometric Topology* 2 (2002), págs. 337-370. ISSN: 1472-2747. https://doi.org/10.2140/agt.2002.2.337.
- [4] Burde, Gerhard; Zieschang, Heiner, y Heusener, Michael. *Knots.* Studies in Mathematics 5. Berlín: De Gruyter, 2013. https://doi.org/10.1515/9783110270785.
- [5] GILBERT, Nick D. y Porter, Timothy. *Knots and surfaces*. Oxford Science Publications. Oxford: Oxford University Press, 1994. ISBN: 978-0-19-853397-9.
- [6] HATCHER, Allen. *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN: 978-0-521-79540-1. URL: http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html.
- [7] Jones, Vaughan F. R. «A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras». En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 12.1 (1985), págs. 103-111. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1985-15304-2.
- [8] KAUFFMAN, Louis H. «State models and the Jones polynomial». En: *Topology. An International Journal of Mathematics* 26.3 (1987), págs. 395-407. ISSN: 0040-9383. https://doi.org/10.1016/0040-9383(87)90009-7.
- [9] Khovanov, Mikhail. «A categorification of the Jones polynomial». En: *Duke Mathematical Journal* 101.3 (2000), págs. 359-426. ISSN: 0012-7094. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-00-10131-7.
- [10] Murasugi, Kunio. *Knot theory and its applications*. Boston: Birkhäuser, 1996. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4719-3.
- [11] RIVERA BUSTOS, Ana Alicia. *Homología de Khovanov*. Trabajo de Fin de Grado. Universidad de Sevilla, 2018. URL: https://hdl.handle.net/11441/79504.
- [12] Viro, Oleg. «Khovanov homology, its definitions and ramifications». En: *Fundamenta Mathematicae* 184 (2004), págs. 317-342. ISSN: 0016-2736. https://doi.org/10.4064/fm184-0-18.
- [13] WITTEN, Edward. *Knots and Quantum Theory*. Vídeo. 2010. URL: https://www.youtube.com/watch?v=cuJY14BYac4.



Funciones armónicas en \mathbb{R}^n

Alba Crespo Pérez Universidad de La Laguna alu0100846461@ull.edu.es

Resumen: En este trabajo presentamos algunas propiedades básicas de las funciones armónicas en \mathbb{R}^n (aquellas $u \in C^2$ tales que $\Delta u = 0$), tales como la propiedad de la media, el principio del máximo, el problema de Dirichlet y algunos resultados relacionados con el problema de uno y dos radios, para terminar con el lema de regularidad de Weyl.

Abstract: In this work we present some basic properties for harmonic functions on \mathbb{R}^n (those $u \in C^2$ such that $\Delta u = 0$), such as the mean value property, the maximum principle, Dirichlet's problem and some results related to the one and two radius problem, to finish with Weyl's regularity lemma.

Palabras clave: funciones armónicas, propiedad de la media, principio del máximo, núcleo de Poisson, problema de Dirichlet, problemas de uno y dos radios, lema de Weyl.

MSC2010: 31B05, 35B05.

Recibido: 22 de abril de 2020.

Aceptado: 12 de octubre de 2020.

Agradecimientos: Gracias en especial al Prof. Manuel Tomás Flores Mederos, por haberme guiado siempre con sabiduría y mano experta por el maravilloso mundo de las matemáticas. Agradezco también a los revisores de TEMat sus valiosos consejos durante la revisión de este artículo.

Y gracias, sobre todo, a mi madre, por hacer con su magia que todo haya sido posible.

Referencia: Crespo Pérez, Alba. «Funciones armónicas en \mathbb{R}^n ». En: *TEMat*, 5 (2021), págs. 17-34. ISSN: 2530-9633. URL: https://temat.es/articulo/2021-p17.

€ Este trabajo se distribuye bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento 4.0 Internacional https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

1. Introducción

En el presente trabajo profundizaremos en las propiedades básicas de las funciones armónicas, es decir, aquellas que satisfacen que $\Delta u = 0$, donde Δ es el operador de Laplace

$$\Delta = \nabla^2 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Entre ellas se encuentran la propiedad de la media y el principio del máximo. En este último se ha basado la definición relativamente reciente de *soluciones viscosas* para operadores no lineales más generales.

Tras caracterizar el operador de Laplace mediante sus propiedades de invarianza, a lo largo de la sección 3 caracterizaremos las funciones armónicas vía la propiedad del valor medio y terminaremos con el lema de regularidad de Weyl, que refleja el carácter elíptico de Δ .

La sección 4.1 debe considerarse independiente del resto del trabajo. La razón de incluirla ha sido para completarlo con algunos resultados (unos actuales y otros no tanto) que, aunque clásicos, no se suelen incluir en los contenidos estándar sobre este tipo de materia. Es aquí donde usamos las funciones de Bessel y algunas de sus propiedades. Puesto que nuestro objetivo es fundamentalmente expositivo, no incluiremos las pruebas de estas propiedades (algunas nada triviales).

2. El operador de Laplace

El *operador de Laplace* o *laplaciano* es quizás el operador diferencial más importante de todos los operadores en derivadas parciales, no solo por sus aplicaciones sino por el papel que juega en fenómenos más generales. Está definido por

$$\Delta = \nabla^2 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Aquí, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \dots, \partial/\partial x_n)$ denota el operador *gradiente* y $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$, el producto interior formal. Recuérdese también que si $\vec{V} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ es un campo de vectores de clase C^1 en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, la divergencia de \vec{V} se denota formalmente por $\nabla \cdot \vec{V}$ y se define como $\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial V_n}{\partial x_n}$. Así, formalmente.

$$\Delta u = \nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

La electrostática proporciona un marco físico en el que presentar el operador de Laplace: de acuerdo con las ecuaciones de Maxwell, un campo electrostático \vec{E} en el espacio (un campo que representa la fuerza sobre una unidad de carga positiva) está relacionado con la densidad de carga f por la ecuación $\nabla \cdot \vec{E} = f$ y también satisface que $\nabla \times \vec{E} = 0$ (en n dimensiones, $\nabla \times \vec{E}$ denota la matriz antisimétrica $(\frac{\partial E_j}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_j})_{i,j}$). La última condición significa que, al menos localmente, $\vec{E} = -\nabla u$ para alguna función u llamada potencial electrostático. Así se tiene que $-\Delta u = \nabla \cdot \vec{E} = f$ y, por tanto, el laplaciano relaciona el potencial con la densidad de carga.

2.1. Propiedades de invarianza

Una de las propiedades fundamentales del laplaciano es que conmuta con traslaciones y rotaciones y genera el anillo de operadores diferenciales con esta propiedad. De aquí que aparezca en procesos físicos cuya física subyacente sea homogénea (independiente de la posición) e isotrópica (independiente de la dirección).

Los operadores diferenciales que consideramos en esta sección son de la forma

(1)
$$L[u](x) = \sum_{|\alpha| < m} a_{\alpha}(x) \partial^{\alpha} u(x),$$

donde m=1,2,... es un entero positivo, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2...,\alpha_n)\in\mathbb{N}_0^n$ es una n-tupla de enteros no negativos, $|\alpha|=|\alpha_1|+|\alpha_2|+...+|\alpha_n|, \ \alpha_\alpha\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y

$$\partial^{\alpha} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

L tiene orden m si $a_{\alpha} \neq 0$ para algún α con $|\alpha| = m$. Si para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ denotamos $\xi^{\alpha} = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$, a tales operadores se les puede asociar el polinomio con coeficientes variables $P(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) \xi^{\alpha}$ (llamado s imbolo de L) y, formalmente, (1) se escribe como $L = P(x, \partial)$. En caso de que las funciones a_{α} sean constantes y $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha} \xi^{\alpha}$, el operador con coeficientes constantes asociado se denota por $L = P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha} \partial^{\alpha}$.

Que el operador definido en (1) conmute con traslaciones y rotaciones significa que $L[u \circ \psi] = L[u] \circ \psi$ para toda traslación o rotación ψ en \mathbb{R}^n . De hecho, que L sea invariante por traslaciones equivale a que presente coeficientes constantes. En efecto, si $\tau_v(x) := x + y$ denota la traslación por $y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\big[L(u\circ\tau_y)\big](\cdot)=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha(\cdot)\big[\partial^\alpha(u\circ\tau_y)\big](\cdot)=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha(\cdot)\big[(\partial^\alpha u)\circ\tau_y\big](\cdot),$$

mientras que

$$\big[(Lu)\circ\tau_y\big](\cdot)=\sum_{|\alpha|\leq m}\big[a_\alpha\circ\tau_y\big](\cdot)\big[(\partial^\alpha u)\circ\tau_y\big](\cdot).$$

Esto implica que $a_{\alpha} = a_{\alpha} \circ \tau_y$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$ y, por tanto, $a_{\alpha}(x) \equiv a_{\alpha}$ es constante si $|\alpha| \leq m$.

De igual forma, que L conmute con rotaciones significa que $L[u \circ g_O] = L[u] \circ g_O$ para toda $O \in \mathfrak{o}_n$, donde g denota la acción del *grupo ortogonal* \mathfrak{o}_n (aquel formado por todas las matrices cuadradas O de orden n tales que $O^TO = I$) en \mathbb{R}^n , dada por $g_O(x) = O(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

El hecho aludido anteriormente de que el laplaciano genera el anillo de los operadores diferenciales que conmutan con traslaciones y rotaciones es el contenido del siguiente teorema.

Teorema 1. Sea L un operador diferencial en derivadas parciales en \mathbb{R}^n como en (1). Entonces, L conmuta con traslaciones y rotaciones si y solo si L es un polinomio en Δ , esto es, $L = \sum_j a_j \Delta^j$, donde la suma es finita y $a_j \in \mathbb{R}$.

Demostración. Un operador $L = P(\partial) = \sum_{|\alpha| \le m} a_{\alpha} \partial^{\alpha}$ con coeficientes constantes (por lo dicho antes, ahora este es el caso general) conmuta con rotaciones si

$$(2) L(u \circ \varrho_O) = (Lu) \circ \varrho_O$$

para todo $O \in \mathfrak{o}_n$. Pero si $\omega \in \mathbb{R}^n$, para $u = e_\omega$ donde $e_\omega(x) \coloneqq \mathrm{e}^{\omega \cdot x}$, tenemos que

$$(Le_{\omega}) \circ \varrho_{O} = (P(\omega)e_{\omega}) \circ \varrho_{O} = P(\omega)[e_{\omega} \circ \varrho_{O}]$$

y

$$L(e_{\omega} \circ \varphi_{O}) = L(e_{O^{\top}(\omega)}) = P(O^{\top}(\omega))e_{O^{\top}(\omega)}$$
$$= P(O^{\top}(\omega))[e_{\omega} \circ \varphi_{O}]$$

ya que, como se puede comprobar fácilmente, $e_{\omega} \circ g_O = e_{O^{\top}(\omega)}$. Así, que L sea \mathfrak{o}_n -invariante equivale a decir que $P(O^{\top}(\omega)) = P(\omega)$ para todo $O \in \mathfrak{o}_n$ y $\omega \in \mathbb{R}^n$ (basta con evaluar (2) en x = 0), esto es, P debe ser radial. Puesto que la acción de \mathfrak{o}_n conserva la descomposición homogénea de polinomios, podemos, sin pérdida de generalidad, suponer que $P = P_s$ es homogéneo de grado s. Esto implica que $P_s(\xi) = c|\xi|^s$ con s par $(P_s$ es un polinomio) y, por tanto, el polinomio original es de la forma

$$P(\xi) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} a_k |\xi|^{2k} = Q(|\xi|^2)$$

con

$$Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} a_j \lambda^j.$$

Así,
$$L = Q(\Delta) = \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} a_j \Delta^j$$
.

Para el recíproco será suficiente probar (2) para $L=\Delta$. Si $O=\left(o_{ij}\right)_{i,j}\in\mathfrak{o}_n$ es ortogonal, entonces

$$\frac{\partial (u \circ \varrho_O)}{\partial x_k}(x) = \sum_{i=1}^n o_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} (O(x))$$

y, de igual forma,

$$\frac{\partial^2 (u \circ \varrho_O)}{\partial x_k^2}(x) = \sum_{i,\ell=1}^n o_{jk} o_{\ell k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j x_\ell} \left(O(x) \right)$$

si k = 1, 2, ..., n. Por tanto,

$$[\Delta(u \circ \varphi_O)](x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2(u \circ \varphi_O)}{\partial x_k^2}(x) = \sum_{k,j,\ell=1}^n o_{jk} o_{\ell k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j x_\ell} (O(x)) = \sum_{j,\ell=1}^n \left(\sum_{k=1}^n o_{jk} o_{\ell k}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j x_\ell} (O(x))$$

$$= \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ O \in \mathfrak{D}_n}}^n \int_{j,\ell=1}^{j} \delta_{j\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j x_\ell} (O(x)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} (O(x)) = \Delta u (O(x)) = [(\Delta u) \circ \varphi_O](x).$$

Puesto que el laplaciano conmuta con rotaciones, conserva la clase de las funciones radiales, sobre la que se reduce a un operador diferencial ordinario conocido como la *parte radial* del laplaciano.

Proposición 2. Si u(x) = f(r), donde r = |x| es una función C^2 radial en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $(f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es C^2 en $(0, +\infty)$, entonces

$$\Delta u(x) = f''(r) + \frac{(n-1)}{r}f'(r).$$

Demostración. Puesto que $\partial r/\partial x_i = x_i/r$, tenemos que

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{j}} \left[\frac{x_{j}}{r} f'(r) \right] = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{x_{j}^{2}}{r^{2}} f''(r) + \left(\frac{1}{r} - \frac{x_{j}^{2}}{r^{3}} \right) f'(r) \right] = f''(r) + \frac{(n-1)}{r} f'(r).$$

Corolario 3. Si u(x) = f(r) es como en la proposición anterior, entonces u satisface la ecuación $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si y solo si

$$f(r) = \begin{cases} a + b \ln r & \sin n = 2, \\ a + br^{2-n} & \sin n > 2, \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes.

Demostración. Por la proposición 2, $\Delta u = 0$ significa que $f''(r) + \frac{(n-1)}{r}f'(r) = 0$, por lo que, tras multiplicar por el factor integrante r^{n-1} , tenemos que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r^{n-1}f'(r)] = 0$. Así, $f'(r) = cr^{1-n}$, y el corolario se deduce sin más que integrar tomando $b = \frac{c}{2-n}$ para n > 2 y b = c si n = 2.

3. Propiedades básicas de las funciones armónicas

Una función $u \in C^2(\Omega)$ se dice *armónica* en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si $\Delta u = 0$ en Ω .

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado que suponemos con frontera regular y positivamente orientada, esto es, de modo que $\partial\Omega$ es una hipersuperficie regular orientada por su normal unitaria exterior \vec{n} . Recordamos el teorema de Gauss [18] (véase también el libro de Flores y Sadarangani [6, teorema 6.37]).

Teorema 4 (teorema de Gauss o de la divergencia). $Si \ \vec{V} \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, entonces

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{V} \, \mathrm{d}x = \int_{\partial \Omega} \vec{V} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S$$

donde dx es el «elemento diferencial de volumen» y dS, el «elemento diferencial de área».

Teorema 5 (identidades de Green). Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado con frontera regular y u, v son dos funciones C^2 y C^1 en $\overline{\Omega}$, respectivamente, entonces

(3)
$$\int_{\partial\Omega} v \,\partial_{\vec{n}} u \,\mathrm{d}S = \int_{\Omega} (v \Delta u + \nabla v \cdot \nabla u) \,\mathrm{d}x.$$

Si además $v \in C^2(\Omega)$

(4)
$$\int_{\partial \Omega} (v \partial_{\vec{n}} u - u \partial_{\vec{n}} v) \, dS = \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx.$$

Demostración. (3) no es más que el teorema 4 aplicado al campo $\vec{V} = v\nabla u$. Ahora (4) se sigue de (3) restando tras intercambiar u y v.

Corolario 6 (teorema integral de Gauss). Si u es una función armónica en Ω , entonces

$$\int_{\partial\Omega}\partial_{\vec{n}}u\,\mathrm{d}S=0.$$

Demostración. Basta tomar v = 1 en (3) o (4).

3.1. La propiedad del valor medio

Si d σ denota la medida de Lebesgue invariante por rotaciones en $\mathbb{S}^{n-1} = \partial \mathbb{B}_n$ (la esfera y la bola unidad, respectivamente) normalizada de modo que $\sigma(\mathbb{S}^{n-1}) = 1$, el siguiente análogo multidimensional del lema 4.4.10 del libro de Berenstein y Gay [3] (véase también la proposición 2.6 del trabajo de Maciá Medina [15]) demuestra que el laplaciano de una función C^2 se puede recuperar a partir de sus medias esféricas.

Proposición 7. Si $u \in C^2(\mathbb{B}_n)$, entonces

(5)
$$\Delta u(0) = \lim_{r \to 0^+} \frac{2n}{r^2} \int_{S^{n-1}} (u(r\zeta) - u(0)) \, d\sigma(\zeta).$$

Demostración. Atendiendo al desarrollo de Taylor, para $\zeta \in \mathbb{S}^{n-1}$ y 0 < r < 1,

$$u(r\zeta) = u(0) + r\nabla u(0) \cdot \zeta + \frac{r^2}{2} \left(\mathcal{H}u(0)\zeta \right) \cdot \zeta + o(r^2),$$

donde $\mathcal{H}u(0)$ denota la matriz hessiana de u evaluada en x=0. Integrando,

(6)
$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(r\zeta) \, d\sigma(\zeta) = u(0) + r \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_{j}}(0) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_{j} \, d\sigma(\zeta) + \frac{r^{2}}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^{2} u}{\partial x_{j} \partial x_{k}}(0) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_{j} \zeta_{k} \, d\sigma(\zeta) + o(r^{2})$$
$$= u(0) + \frac{r^{2}}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^{2} u}{\partial x_{j}^{2}}(0) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_{j}^{2} \, d\sigma(\zeta) + o(r^{2}) = u(0) + \frac{r^{2}}{2n} \Delta u(0) + o(r^{2})$$

ya que, si $j = 1, 2, ..., n \ y \ j \neq k$,

(7)
$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_j \, d\sigma(\zeta) = 0,$$

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_j^2 \, d\sigma(\zeta) = \frac{1}{n} \quad y$$

(9)
$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_j \zeta_k \, \mathrm{d}\sigma(\zeta) = 0.$$

TEMat, 5 (2021) e-issn: 2530-9633 21

Para ver esto, obsérvese que la función

(10)
$$Q(x) = \int_{S^{n-1}} (\zeta \cdot x)^2 d\sigma(\zeta) = \int_{S^{n-1}} \left(\sum_{j=1}^n \zeta_j x_j\right)^2 d\sigma(\zeta)$$
$$= \sum_{j=1}^n \left(\int_{S^{n-1}} \zeta_j^2 d\sigma(\zeta)\right) x_j^2 + 2 \sum_{1 \le j < k \le n} \left(\int_{S^{n-1}} \zeta_j \zeta_k d\sigma(\zeta)\right) x_j x_k$$

es radial puesto que, para toda transformación ortogonal $O \in \mathfrak{o}_n$

$$Q(Ox) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (\zeta \cdot (Ox))^2 d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} ((O^{\mathsf{T}}\zeta) \cdot x)^2 d\sigma(\zeta)$$
$$= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (\zeta \cdot x)^2 d\sigma(\zeta) = Q(x)$$

porque σ es invariante por rotaciones. De la expresión (10), (9) es evidente (los coeficientes de los monomios mixtos x_jx_k para $j\neq k$ deben anularse). Además, como para cada $1\leq i< j\leq n$ la transformación $T_{ij}(\zeta_1,\ldots,\zeta_i,\ldots,\zeta_j,\ldots,\zeta_i)=(\zeta_1,\ldots,\zeta_j,\ldots,\zeta_i,\ldots,\zeta_n)$ preserva la medida σ , tenemos que

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_1^2 \, d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_2^2 \, d\sigma(\zeta) = \dots = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_n^2 \, d\sigma(\zeta)$$

y, por tanto,

$$n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_j^2 \, d\sigma(\zeta) = \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_k^2 \, d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\zeta|^2 \, d\sigma(\zeta) = \sigma(S^{n-1}) = 1$$

para todo j=1,2,...,n. Esto prueba (8). El razonamiento para ver (7) es similar: basta considerar la función

$$\widetilde{Q}(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta \cdot x \, d\sigma(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_j \, d\sigma(\zeta) \right) x_j,$$

que, por la misma razón, también es radial. Puesto que \widetilde{Q} es lineal y $\widetilde{Q}(0) = 0$, tenemos que $\widetilde{Q} \equiv 0^1$. Ahora (5) se sigue haciendo $r \to 0^+$ en (6) (recuérdese que $\sigma(\mathbb{S}^{n-1}) = 1$).

Ejemplo 8. Si n = 2, (5) se reduce al lema 4.4.10 en el libro de Berenstein y Gay [3]. En notación compleja, $z = re^{i\theta}$ se reduce a

$$\Delta u(0) = \lim_{r \to 0^+} \frac{4}{r^2} \int_0^{2\pi} (u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) - u(0)) \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}.$$

Para n = 3, la medida d σ en coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \sin \varphi \cos \theta, \\ y = \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \cos \varphi, \end{cases} \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \ 0 \le \varphi \le \pi,$$

tiene la expresión

$$d\sigma(\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi} \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \frac{\sin \varphi}{4\pi} d\theta d\varphi.$$

La identidad (5) se convierte así en

$$\Delta u(0) = \lim_{r \to 0^+} \frac{3}{2\pi r^2} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \varphi \left(\int_0^{2\pi} u(r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, r \cos \varphi) \, \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\varphi.$$

 $^{^1}$ Esto también es consecuencia inmediata de que la función $\zeta o \zeta_j$ es impar en \mathbb{S}^{n-1} .

El siguiente teorema establece que el valor de una función armónica en un punto coincide con su valor medio sobre cualquier esfera centrada en dicho punto.

Teorema 9 (del valor medio). *Sea u una función armónica en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Si* $x \in \Omega$ *y además* $0 < r < \operatorname{dist}(x, \partial \Omega)$, *entonces*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|\zeta-x|=r} u(\zeta) \, \mathrm{d}S(\zeta) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\zeta|=1} u(x+r\zeta) \, \mathrm{d}S(\zeta) = \int_{|\zeta|=1} u(x+r\zeta) \, \mathrm{d}\sigma(\zeta).$$

Aqui, $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ denota el área de la esfera unidad en \mathbb{R}^n (véase el libro de Flores y Sadarangani [6, ejercicio 4.28], aunque allí ω_n denota el volumen de \mathbb{B}_n) y Γ , la función de Euler

(11)
$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt, \ p > 0.$$

Demostración. Primero obsérvese que la segunda igualdad se sigue de la primera haciendo el cambio de variables $\zeta \to x + r\zeta$, que la tercera es otra forma de reescribir la segunda ($d\sigma = dS/\omega_n$) y que, componiendo con una traslación, podemos suponer que x=0. Para probar la primera usaremos el teorema integral de Gauss (corolario 6). Si

$$\Theta(r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\zeta|=1} u(r\zeta) \, \mathrm{d}S(\zeta),$$

entonces

$$\Theta'(r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\zeta|=1} \zeta \cdot \nabla u(r\zeta) \, \mathrm{d}S(\zeta) = \int_{\substack{n=r\zeta\\n=r\zeta}} \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|\eta|=r} \partial_{\vec{n}} u(\eta) \, \mathrm{d}S(\eta) = 0.$$

Esto implica que Θ es constante y, por tanto,

$$u(0) = \Theta(0) = \Theta(r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\zeta|=1} u(r\zeta) \, \mathrm{d}S(\zeta).$$

Integrando en *r*, podemos enunciar la siguiente versión del teorema 9 en volumen.

Corolario 10. Si Ω , u y r > 0 son como en el teorema 9, entonces

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{|y| \le r} u(x+y) \, \mathrm{d}y = \frac{n}{\omega_n} \int_{|y| \le 1} u(x+ry) \, \mathrm{d}y.$$

Demostración. El resultado sigue sin más que multiplicar la relación

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\zeta| - 1} u(x + \varrho \zeta) \, \mathrm{d}S(\zeta)$$

por g^{n-1} e integrar para $0 \le g \le 1$ tras aplicar la generalización de la fórmula de integración en polares

(12)
$$\int_{|x| \le r} v(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^r \varrho^{n-1} \left(\int_{|\zeta| = 1} v(\varrho \zeta) \, \mathrm{d}S(\zeta) \right) \mathrm{d}\varrho,$$

válida, por ejemplo, para cualquier función continua v [8, theorem 2.49]. La última igualdad se obtiene realizando el cambio de variables $y \rightarrow ry$.

Observación 11. (a) Nótese que el factor n/ω_n en el corolario 10 coincide con $1/|\mathbb{B}_n|$ (el volumen n-dimensional de \mathbb{B}_n). Esto sigue de (12) con v = 1 y r = 1.

(b) Puesto que $d\sigma = dS/\omega_n$, la fórmula (5) muestra que para funciones C^2 el recíproco del teorema 9 también es cierto. De hecho, bastaría con que a cada $x \in \Omega$ corresponda una sucesión de radios $0 < r_i < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega), j = 1, 2, ...,$ tales que $r_i \to 0$ cuando $j \to \infty$ para los que

(13)
$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\zeta|=1} u(x + r_j \zeta) \, dS(\zeta), \quad j = 1, 2, ...$$

El siguiente resultado es el análogo armónico del teorema 1.2.4 del libro de Hörmander [13] (véase también el trabajo de Maciá Medina [15, teorema 1.10]).

Corolario 12. Sea u una función armónica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Para todo compacto $K \subset \Omega$ y todo entorno abierto $U \subset \Omega$ de K existe C > 0 (que solo depende de K y U pero no de u) tal que

$$\sup_{K}|u|\leq C||u||_{L^{1}(U)}.$$

Demostración. Sea $\delta < \operatorname{dist}(K, \partial U)/2$. Si $x_0 \in K$ y $|x - x_0| \le \delta$, por el corolario 10 tenemos que

$$|u(x)| \le \frac{n}{\omega_n \delta^n} \int_{|y| \le \delta} |u(x+y)| \, \mathrm{d}y \le \frac{n}{\omega_n \delta^n} \int_U |u(y)| \, \mathrm{d}y = \frac{n}{\omega_n \delta^n} ||u||_{L^1(U)}.$$

Observación 13. El corolario 12 muestra que, para sucesiones de funciones armónicas, la convergencia uniforme en compactos es equivalente a la convergencia en L^1_{loc} , es decir, en L^1 sobre compactos. Otra forma de decir esto es que las correspondientes topologías sobre el espacio de funciones armónicas coinciden. De hecho, ¡cualquier topología «medianamente razonable» que se considere en el espacio de funciones armónicas implica convergencia uniforme en compactos!

3.2. El recíproco del teorema del valor medio

El siguiente teorema muestra que la hipótesis de regularidad en la observación 11(b) puede relajarse sustancialmente.

Teorema 14. Supongamos que u sea continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y que

(14)
$$u(x) = \int_{|\zeta|=1} u(x + r\zeta) \, \mathrm{d}\sigma(\zeta)$$

para todo $x \in \Omega$ y todo $0 < r < \mathrm{dist}(x \partial \Omega)$. Entonces, $u \in C^{\infty}(\Omega)$ y es armónica en Ω .

Demostración. De acuerdo con la observación 11(b), basta probar que $u \in C^{\infty}(\Omega)$. Sea $\phi \in C^{\infty}_c(\mathbb{B}_n)$ radial tal que $\int_{\mathbb{B}_n} \phi \, \mathrm{d}v = 1$ y $\phi(x) = \psi(|x|)$ con $\psi \in C^{\infty}_c(0,1)$. Para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, sean $\phi_{\varepsilon}(x) \coloneqq \varepsilon^{-n} \phi(x/\varepsilon)$ y $\Omega_{\varepsilon} \coloneqq \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, \partial \Omega) > \varepsilon\}$. Entonces, si $x \in \Omega_{\varepsilon}$, la función $y \to \phi_{\varepsilon}(x - y)$ tiene soporte en Ω y

$$\begin{split} u * \phi_{\varepsilon}(x) &= \int_{\Omega} u(y) \phi_{\varepsilon}(x-y) \, \mathrm{d}y = \int_{\Omega} u(x-y) \phi_{\varepsilon}(y) \, \mathrm{d}y = \varepsilon^{-n} \int_{|y| \le \varepsilon} u(x-y) \phi(y/\varepsilon) \, \mathrm{d}y \\ &= \int_{|y| \le 1} u(x-\varepsilon y) \phi(y) \, \mathrm{d}y = \int_{(12)}^{1} \varphi^{n-1} \psi(\varphi) \left(\int_{|\zeta| = 1} u(x-\varepsilon \varphi \zeta) \, \mathrm{d}S(\zeta) \right) \mathrm{d}\varphi \\ &= \omega_{n} u(x) \int_{0}^{1} \varphi^{n-1} \psi(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi = u(x) \int_{\mathbb{B}_{n}} \phi(y) \, \mathrm{d}y = u(x). \end{split}$$

Puesto que $\phi \in C^{\infty}$, $u = u * \phi_{\varepsilon}$ también lo es en Ω_{ε} (no es difícil ver que es lícito derivar bajo el signo integral y que $\partial^{\alpha}(u*\phi_{\varepsilon}) = u*(\partial^{\alpha}\phi_{\varepsilon})$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_{0}^{n}$ [8, proposition 8.10]). Como $\varepsilon > 0$ es arbitrariamente pequeño, concluimos que $u \in C^{\infty}(\Omega)$.

Corolario 15. *Si u es una función armónica en* Ω *, entonces u* \in $C^{\infty}(\Omega)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de los teoremas 9 y 14 aplicados sucesivamente.

Corolario 16. Si $\{u_k\}$ es una sucesión de funciones armónicas en Ω que converge uniformemente en compactos de Ω a una función u, entonces u es armónica en Ω .

Demostración. Puesto que cada u_k satisface las hipótesis del teorema 14, u_k también.

 $^{^2 \}text{Otra}$ manifestación de la elipticidad de $\Delta.$

3.3. El principio del máximo

Teorema 17. Sea Ω un dominio en \mathbb{R}^n . Si u es una función armónica en Ω y

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = A < +\infty$$

entonces u(x) < A para todo $x \in \Omega$ o u(x) = A para todo $x \in \Omega$.

Demostración. La prueba sigue un razonamiento de conexidad en la línea de la demostración del teorema 2.10 del trabajo de Maciá Medina [15]. Claramente, se verifica que el conjunto $\mathcal{U} := \{x \in \Omega \mid u(x) = A\}$ es relativamente cerrado en Ω . Pero por el teorema del valor medio, si $x_0 \in \mathcal{U}$ entonces u(x) = A para todo x en cualquier bola cerrada centrada en x_0 y contenida en Ω , y, por tanto, \mathcal{U} también es abierto. Como Ω es conexo, $\mathcal{U} = \emptyset$, con lo que u < A en Ω , o $\mathcal{U} = \Omega$, en cuyo caso u = A en Ω .

Corolario 18. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es acotado y u es una función armónica en Ω continua en $\overline{\Omega}$, entonces

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}u(x)=\max_{\zeta\in\partial\Omega}u(\zeta) \qquad y \qquad \min_{x\in\overline{\Omega}}u(x)=\min_{\zeta\in\partial\Omega}u(\zeta).$$

Demostración. El máximo se alcanza en algún punto de $\overline{\Omega}$: si esto sucede en un punto interior, u es constante en la componente conexa que lo contiene (teorema 17); por tanto, el máximo también se alcanza en $\partial\Omega$. La igualdad entre los mínimos sigue de la de los máximos sin más que reemplazar u por -u.

Corolario 19 (teorema de unicidad). *Sea* Ω *acotado y u, v dos funciones armónicas en* Ω *continuas en* $\overline{\Omega}$. *Si* u = v *en* $\partial \Omega$, *entonces* u = v *en* Ω .

Demostración. Las funciones u-v y v-u son armónicas en Ω y se anulan en $\partial\Omega$. Por el corolario 18, u=v en Ω .

Observación 20. Como hemos visto, la propiedad del valor medio es característica de las funciones armónicas, pero el principio del máximo y sus corolarios siguen siendo válidos para ecuaciones en derivadas parciales más generales.

El siguiente resultado generaliza el teorema de Liouville clásico relativo a funciones enteras de variable compleja [17, theorem 10.23; *cf.* 1, 7, 15].

Teorema 21 (Liouville). Toda función armónica acotada u en \mathbb{R}^n es constante.

Demostración. Si $x \in \mathbb{R}^n$ y r > |x|, por el corolario 10 tenemos que

$$|u(x) - u(0)| = \frac{n}{\omega_n r^n} \left| \int_{|y| \le r} u(x+y) \, \mathrm{d}y - \int_{|y| \le r} u(y) \, \mathrm{d}y \right|$$

$$\leq \frac{n}{\omega_n r^n} ||u||_{\infty} \int_{D_r} \mathrm{d}y = ||u||_{\infty} \frac{n|D_r|}{\omega_n r^n},$$
(15)

donde D_r denota la diferencia simétrica de las bolas $B_r(x)$ y $B_r(0)$. Pero como D_r está contenido en el anillo esférico $A_r := \{y \mid r - |x| < |y| < r + |x|\}$ (figura 1),

$$|D_r| \le |\mathcal{A}_r| = \int_{\mathcal{A}_r} \mathrm{d}y = \omega_n \int_{r-|x|}^{r+|x|} \varrho^{n-1} \, \mathrm{d}\varrho = \frac{\omega_n}{n} ((r+|x|)^n - (r-|x|)^n),$$

lo que implica que³

$$|u(x)-u(0)|\lesssim \frac{(r+|x|)^n-(r-|x|)^n}{r^n}=\left(1+\frac{|x|}{r}\right)^n-\left(1-\frac{|x|}{r}\right)^n\xrightarrow[r\to\infty]{}0.$$

Por tanto, u(x) = u(0) para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y u es constante.

 $^{^3}$ Como es usual en análisis, para dos cantidades A y B, $A\lesssim B$ significa que $A\leq CB$ para alguna constante C>0 sin especificar.

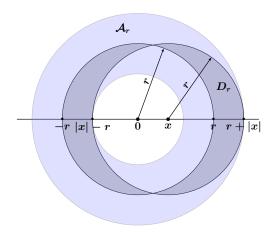


Figura 1: Diferencia simétrica $D_r \subset \mathcal{A}_r$.

Observación 22. Cabe señalar que la misma demostración del teorema 21 permite relajar su hipótesis: basta suponer que u sea positiva [1]. En efecto, puesto que u es positiva ahora se puede prescindir del valor absoluto en (15) de la siguiente forma:

$$\begin{split} |u(x)-u(0)| &= \frac{n}{\omega_n r^n} \bigg| \int_{|y| \le r} u(x+y) \, \mathrm{d}y - \int_{|y| \le r} u(y) \, \mathrm{d}y \bigg| \underset{u>0}{=} \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{D_r} u(y) \, \mathrm{d}y \\ &\leq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{\mathcal{A}_r} u(y) \, \mathrm{d}y = \frac{n}{\omega_n r^n} \bigg(\int_{|y| \le r + |x|} u(y) \, \mathrm{d}y - \int_{|y| \le r - |x|} u(y) \, \mathrm{d}y \bigg) \\ &= u(0) \bigg(\frac{(r+|x|)^n - (r-|x|)^n}{r^n} \bigg). \end{split}$$

Corolario 23. Toda función armónica positiva en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es constante.

Demostración. Si u es armónica y positiva en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, la función $z \to u(e^z)$ es armónica positiva en $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ y, atendiendo a la observación 22, u es constante. ■

El análogo al corolario 23 es falso cuando n > 2: por el corolario 3, la función $u(x) := |x|^{2-n}$ es positiva y armónica en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}^4$.

3.4. El problema de Dirichlet en la bola. El núcleo de Poisson

Uno de los problemas fundamentales en teoría del potencial donde aparece el operador de Laplace es el problema de Dirichlet: si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado con frontera regular y f es una función continua en $\partial\Omega$, encontrar una función u armónica en Ω y continua en $\overline{\Omega}$ tal que u=f en $\partial\Omega$.

En esta sección estudiaremos este problema en el caso particular, pero importante, de la bola unidad \mathbb{B}_n . Si la solución al problema de Dirichlet existe entonces, el razonamiento en el libro de Rudin [17, sections 5.22–5.24], con las modificaciones apropiadas a dimensiones superiores, permite ver que existe una función P definida en $\mathbb{B}_n \times \mathbb{S}^{n-1}$ (el *núcleo de Poisson*) tal que

(16)
$$u(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} P(x, \zeta) f(\zeta) \, d\sigma(\zeta), \quad x \in \mathbb{B}_n.$$

Por la propiedad de la media (teorema 9), debemos tener que $P(0,\zeta)=1$ para todo $\zeta\in\mathbb{S}^{n-1}$.

⁴Que este es esencialmente el único contraejemplo es consecuencia de un teorema debido a Bôcher [1] (véase también el trabajo de Crespo Pérez [4, corolario 5.24]) que implica que cualquier función armónica positiva en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (n > 2) es de la forma $u(x) = a + b|x|^{2-n}$ para ciertas constantes a, b > 0.

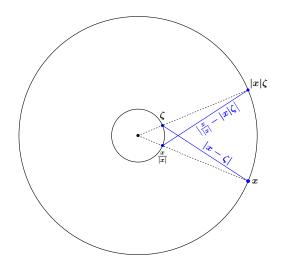


Figura 2: Simetría de módulos.

Supongamos que u es armónica en \mathbb{B}_n y sea $x \in \mathbb{B}_n \setminus \{0\}$. Por el corolario 3, tenemos que la función $v(y) \coloneqq w(y) - |x|^{2-n} |y - \frac{x}{|x|^2}|^{2-n}$, donde $w(y) = |y - x|^{2-n}$, es armónica en $\mathbb{B}_n \setminus \{x\}$ y, ya que $|\zeta - x| = ||x|\zeta - \frac{x}{|x|}|$ si $\zeta \in \mathbb{S}^{n-1}$ (como queda ilustrado en la figura 2),

$$v(\zeta) = w(\zeta) - \left| |x|\zeta - \frac{x}{|x|} \right|^{2-n} = w(\zeta) - |\zeta - x|^{2-n} = 0$$

para $\zeta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Si $0 < \varepsilon < \frac{1-|x|}{2}$ (para que $\overline{B}(x,\varepsilon) \subset \mathbb{B}_n$) y aplicamos la identidad de Green (4) en $\Omega_{\varepsilon} = \mathbb{B}^n \setminus \overline{B}(x,\varepsilon)$, tenemos que

$$\begin{split} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u \partial_{\vec{n}} v \, \mathrm{d}S &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(u \partial_{\vec{n}} v - v \partial_{\vec{n}} u \right) \mathrm{d}S \\ &= \int_{\Omega_{\varepsilon}} \left(u \Delta v - v \Delta u \right) \mathrm{d}x + \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \left(u \partial_{\vec{n}} v - v \partial_{\vec{n}} u \right) \mathrm{d}S \\ &= \int_{\Delta u = \Delta v = 0 \text{ en } \Omega_{\varepsilon}} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \left(u \partial_{\vec{n}} v - v \partial_{\vec{n}} u \right) \mathrm{d}S \\ &= \int_{v - w \text{ armónica en } \mathbb{B}_{n}} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \left(u \partial_{\vec{n}} w - w \partial_{\vec{n}} u \right) \mathrm{d}S \xrightarrow[\varepsilon \to 0^{+}]{} (2 - n) \omega_{n} u(x), \end{split}$$

ya que, como $|w| = \varepsilon^{2-n}$ en $\partial B(x, \varepsilon)$,

$$\left| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} w \partial_{\vec{n}} u \, dS \right| \lesssim \varepsilon^{2-n} S(\partial B(x,\varepsilon)) = \omega_n \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0$$

y

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u \partial_{\vec{n}} w \ \mathrm{d}S = (2-n)\varepsilon^{1-n} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u \ \mathrm{d}S = (2-n)\omega_n u(x)$$

por la propiedad de la media y $\partial_{\vec{n}} w(y) = \partial_{\vec{n}_y} |y-x|^{2-n} = (2-n)|y-x|^{1-n}$.

Consecuentemente, si $n \ge 3$, (16) es válido con

$$\begin{split} P(x,\zeta) &= \frac{1}{2-n} \partial_{\vec{n}} \upsilon(\zeta) = \frac{1}{2-n} \Big(\big[\big(\nabla_y |y-x|^{2-n} \big)(\zeta) \big] - |x|^{2-n} \big[\big(\nabla_y |y-x/|x|^2 \big]^{2-n} \big)(\zeta) \big] \Big) \cdot \vec{n}_{\zeta} \\ &= \big(|\zeta-x|^{-n} (\zeta-x) - |x|^{2-n} |\zeta-x/|x|^2 \big]^{-n} (\zeta-x/|x|^2) \big) \cdot \zeta \\ &= \big(|\zeta-x|^{-n} (\zeta-x) - |x|^2 ||x|\zeta-x/|x||^{-n} (\zeta-x/|x|^2) \big) \cdot \zeta \\ &= \big(|\zeta-x|^{-n} (\zeta-x) - |x|^2 |\zeta-x|^{-n} (\zeta-x/|x|^2) \big) \cdot \zeta \\ &= |\zeta-x|^{-n} \big((\zeta-x) - (|x|^2 \zeta-x) \big) \cdot \zeta = \frac{(1-|x|^2)|\zeta|^2}{|\zeta-x|^n} = \frac{1-|x|^2}{|\zeta-x|^n}. \end{split}$$

Aquí hemos usado que $\partial_{\vec{n}}v(\zeta) = \nabla v(\zeta) \cdot \vec{n}_{\zeta}$, la identidad $\nabla_y |y-a|^{\kappa} = \kappa |y-a|^{\kappa-2}(y-a)$ (válida para todo $a \in \mathbb{R}^n$ y $\kappa \in \mathbb{R}$) y que la normal exterior a \mathbf{S}^{n-1} en $\zeta \in \mathbf{S}^{n-1}$ es $\vec{n}_{\zeta} = \zeta$. Nótese que, como se había observado anteriormente, $P(0,\zeta) = 1$ si $|\zeta| = 1$.

Resulta que esta misma expresión es válida en dos dimensiones (n=2), es decir, en notación compleja, $P(z, e^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{1-|z|^2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-z|^2} \ (|z|<1) \ [15, \mathrm{sección}\ 2.3].$

Con el núcleo de Poisson a nuestra disposición podemos resolver el problema de Dirichlet en \mathbb{B}_n .

Teorema 24. Sea $f \in C(\mathbb{S}^{n-1})$ y

$$P[f](x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} P(x,\zeta)u(\zeta) \, \mathrm{d}\sigma(\zeta) & \text{si } x \in \mathbb{B}_n, \\ f(x) & \text{si } x \in \mathbb{S}^{n-1}. \end{cases}$$

Entonces, P[f] es armónica en \mathbb{B}_n y continua en $\overline{\mathbb{B}}_n$.

La demostración de este teorema es estándar y se basa en las siguientes propiedades del núcleo de Poisson (ver el libro de Axler, Bourdon y Ramey [1]):

- $P(x,\zeta) > 0$ y es armónica en $x \in \mathbb{B}_n$ para todo $\zeta \in \mathbb{S}^{n-1}$ (esto sigue de la propia construcción de P ya que v es armónica en $\mathbb{B}_n \setminus \{x\}$).
- $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} P(x,\zeta) d\sigma(\zeta) = 1$ para todo $x \in \mathbb{B}_n$.
- Para cualquier $\zeta_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ y todo $\delta > 0$, $\int_{|\zeta \zeta_0| > \delta} P(x, \zeta) d\sigma(\zeta) \xrightarrow[x \to \zeta_0]{} 0$.

4. La propiedad del valor medio revisada

En la observación 11(b) se apuntaba que la propiedad (13) es suficiente para concluir que una función $u \in C^2(\Omega)$ es armónica en Ω . Siguiendo la demostración del teorema 11.13 del libro de Rudin [17] veremos que, como en el teorema 14, la hipótesis de regularidad sobre u puede relajarse.

Teorema 25. Si u es continua en Ω y satisface (13), entonces u es armónica en Ω .

Demostración. Supongamos que $\bar{B}(a,r)\subset\Omega$ y sea $v=P[u|_{\partial B(a,r)}]$ la extensión armónica de $u|_{\partial B(a,r)}$ a B(a,r) dada por el teorema 24. Probaremos el teorema viendo que u=v en B(a,r).

Supongamos que w=v-u es positiva en algún punto de B(a,r) y consideremos $E\subset \bar{B}(a,r)$ el conjunto donde w toma su valor máximo. Puesto que E es compacto, contiene un punto x más alejado de a. Claramente, $x\in B(a,r)$ ya que w=0 en $\partial B(a,r)$ y, por tanto, existe j tal que $B(x,r_j)\subset B(a,r)$ en donde u(x) es el promedio de u sobre $\partial B(x,r_j)$. Ahora bien, como v es armónica en B(a,r),

$$w(x) = \int_{|\zeta|=1} w(x + r_j \zeta) \, d\sigma(\zeta),$$

pero $w(x + r_j \zeta) \le w(x)$ para todo $|\zeta| = 1$ y, por continuidad, $w|_{\partial B(x,r_j)} = w(x)$, lo que contradice nuestra elección de x. Así $v - u \le 0$ en $\bar{B}(a,r)$. De forma similar $v - u \ge 0$ en $\bar{B}(a,r)$ (basta razonar con -u en lugar de u).

Observación **26**. Nótese que la demostración del teorema anterior proporciona un principio del máximo para la clase de funciones que satisfacen (13), es más, permite ver que el teorema **25** sigue siendo válido si *u* tiene la propiedad del valor medio para un solo radio, ya que tales funciones satisfacen el principio del máximo.

4.1. Generalizaciones

Sorprendentemente, para que una función continua u en \mathbb{R}^n sea armónica, basta que (14) se verifique para dos valores distintos de r (y todo $x \in \mathbb{R}^n$) siempre que estos radios no estén relacionados de una manera muy especial. Más precisamente, si

$$j_n(z) = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_0^{\pi} e^{iz\cos\theta} \operatorname{sen}^{n-1} \theta \, d\theta = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{2}{z}\right)^{(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(z),$$

donde Γ es la función de Euler definida en (11) y J_{ν} , la función de Bessel de primera especie y orden ν definida, por ejemplo, mediante la fórmula de Schlömilch [20] (J_{ν} satisface la ecuación diferencial (20)⁵ y en la ecuación (21) se puede consultar su desarrollo en serie de potencias)

(17)
$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_{\nu}(z)t^{\nu}, \quad z \in \mathbb{C}, \ t \neq 0.$$

Sea

$$H_n = \{z_1/z_2 > 0 \mid j_n(z_1) = j_n(z_2) = 1\}$$

el conjunto de cocientes positivos de ceros de la función $j_n - 1$. Se debe a J. Delsarte [5] que, si (14) se verifica para $r = r_1$ y $r = r_2$ y $r_1/r_2 \notin H_n$, entonces u es armónica en \mathbb{R}^n [21-23]. El desarrollo asintótico de las funciones de Bessel se puede usar para demostrar que, para n > 1, H_n es finito y, de hecho, $H_3 = \{1\}$ [5], por lo que en dimensión 3 es suficiente con dos radios distintos. El caso n = 1 es especial: $j_1(z) = \cos z$ y el conjunto de cocientes excepcionales es $H_1 = \mathbb{Q}^+$ (racionales no negativos). Que el conjunto excepcional es no vacío para todo n > 1 sigue siendo una cuestión abierta [23].

También existen versiones locales de este teorema [2, 19]: si u es continua en B(0,r) y satisface (14) para $r = r_1, r_2$ $(r_1/r_2 \notin H_n)$ y $x \in B(0,r)$ tal que $|x| + r_j < r$, entonces u es armónica en B(0,r) siempre que $r_1 + r_2 < r$.

A este respecto hemos de mencionar el *problema de un radio de Littlewood* resuelto por W. Hansen y N. Nadirashvili: sea u continua y acotada en el disco unidad abierto $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ y supongamos que para cada $z \in \mathbb{D}$ existe un radio r = r(z) < 1 - |z| tal que

(18)
$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z + r(z)e^{i\theta}) d\theta.$$

¿Debe u ser armónica en \mathbb{D} ? La respuesta resulta ser NO [12]. Por otro lado, la condición sobre un radio que se obtiene al reemplazar el promedio de línea por el de área sobre el disco de radio r(z) SÍ que implica armonicidad [11]. Este último resultado se puede extender a funciones definidas en dominios acotados de \mathbb{R}^n (y a otros no acotados también) incluso relajando la hipótesis de acotación sobre u a que esta admita una mayorante armónica, es decir, que |u| < h para alguna función armónica positiva h. Recopilaciones sobre estos y otros resultados relacionados se pueden encontrar en los trabajos de Hansen [9] y Netuka y Veselý [16].

TEMat, 5 (2021) e-issn: 2530-9633 29

⁵Lógicamente llamada ecuación de Bessel.

- Observación 27. 1. Sin embargo, si u es continua en $\overline{\mathbb{D}}$ y tiene la propiedad de un radio (18), entonces u es armónica en \mathbb{D} . Para ver esto, sean $M = \max_{\overline{\mathbb{D}}} u$ y $E = \{z \in \overline{\mathbb{D}} \mid u(z) = M\}$ el conjunto de puntos de $\overline{\mathbb{D}}$ donde u alcanza su máximo. Como en la demostración del teorema 25, puesto que E es compacto, $E \cap \partial \mathbb{D} \neq \emptyset$, por lo que máx $\overline{\mathbb{D}}$ $u = \max_{\partial \mathbb{D}} u$. Así, $u = P[u|_{\partial \mathbb{D}}]$.
 - 2. Aunque la respuesta al problema de Littlewood es negativa, para el caso del plano es afirmativa si se imponen condiciones adicionales a r, a saber, si r es una función estrictamente positiva en \mathbb{R}^2 tal que, para alguna constante M > 0,

(19)
$$r(z) \le |z| + M$$
 siempre que $|z| > M$,

entonces cualquier función continua y acotada u en \mathbb{R}^2 que satisfaga (18) debe ser constante. ¡La conclusión es falsa si la condición (19) se reemplaza por $r(z) \le 4|z| + M$ [10]!

En la recta (n = 1), el promedio (18) podría reemplazarse por (f(x - r(x)) + f(x + r(x)))/2. Con $r(x) \equiv 2\pi$, la función $u(x) = \sin x$ muestra que el resultado análogo es falso en una dimensión.

Por último, cabe señalar que ya en \mathbb{R}^3 no se sabe si existe un análogo de este resultado.

Para ver cómo aparecen las funciones de Bessel, consideremos n=2 y $u_0(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ $(z=x+\mathrm{i}y)$. Entonces,

$$\begin{split} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0 \left(z + r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(y + r \sin \theta)} \, \mathrm{d}\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}r \sin \theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \\ &= u_0(z) \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\frac{r}{2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = u_0(z) \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\nu = -\infty}^{\infty} J_{\nu}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\theta}\right) \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = J_0(r) u_0(z) \end{split}$$

por (17).

Nótese que u_0 es una autofunción del laplaciano; más precisamente, satisface la ecuación de Helmholtz $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ con $\kappa = 1$. Es más, si u es cualquier solución de esta ecuación y

$$\Theta(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta}) d\theta,$$

de la demostración del teorema 2.4 en el trabajo de Maciá Medina [15] tenemos que

$$\begin{split} \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}r}(r) &= \frac{1}{2\pi r} \iint_{|z| \le r} \Delta u(z) \, \mathrm{d}A(z) = -\frac{\kappa^2}{2\pi r} \iint_{|z| \le r} u(z) \, \mathrm{d}A(z) \\ &= -\frac{\kappa^2}{2\pi r} \int_0^r \varphi\left(\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \, \mathrm{d}\theta\right) \mathrm{d}\varphi = -\frac{\kappa^2}{r} \int_0^r \varphi\Theta(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi. \end{split}$$

Esto quiere decir que Θ satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}r}\right) + \kappa^2 r\Theta = 0$$

y, por tanto, la función $\Psi(t) = \Theta(t/\kappa)$ satisface que⁶

$$\frac{\mathrm{d}^2 \Psi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{t} \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} + \Psi = 0.$$

Esta última es la ecuación de Bessel de orden cero, de la que sabemos que solo tiene a los múltiplos de J_0 como soluciones acotadas para $t \to 0^+$. Puesto que Θ (y por ende Ψ) está acotada cerca de 0 y $J_0(0) = 1$, deducimos que $\Theta(r) = J_0(\kappa r)\Theta(0) = J_0(\kappa r)u(0)$, es decir,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta}) d\theta = J_0(\kappa r)u(0).$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) + \kappa^2 r = \kappa \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) + \kappa t = \kappa t \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 1\right).$$

⁶Con el cambio de variables $r = t/\kappa$, $d/dr = \kappa d/dt$ y r d/dr = t d/dt, por lo que

Además, como la ecuación de Helmholtz es invariante por traslaciones, también se tendrá que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta = J_0(\kappa r) u(z)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ y r > 0.

Siguiendo la demostración del teorema 9, un razonamiento análogo prueba que en n dimensiones, si u es solución de la ecuación de Helmholtz y

$$\Theta(r) = \int_{|\zeta|=1} u(r\zeta) \, \mathrm{d}\sigma(\zeta),$$

entonces

$$\begin{split} \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}r}(r) &= \int_{|\zeta|=1} \zeta \cdot \nabla u(r\zeta) \, \mathrm{d}\sigma(\zeta) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|\eta|=r} \partial_{\vec{n}} u(\eta) \, \mathrm{d}S(\eta) \underset{(3) \text{ con } v=1}{=} \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|x| \le r} \Delta u(x) \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\kappa^2}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|x| \le r} u(x) \, \mathrm{d}x = -\frac{\kappa^2}{\omega_n r^{n-1}} \int_0^r \varrho^{n-1} \left(\int_{|\zeta|=1} u(r\zeta) \, \mathrm{d}S(\zeta) \right) \mathrm{d}\varrho \\ &= -\frac{\kappa^2}{r^{n-1}} \int_0^r \varrho^{n-1} \left(\int_{|\zeta|=1} u(r\zeta) \, \mathrm{d}\sigma(\zeta) \right) \mathrm{d}\varrho = -\frac{\kappa^2}{r^{n-1}} \int_0^r \varrho^{n-1} \Theta(\varrho) \, \mathrm{d}\varrho, \end{split}$$

por lo que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^{n-1}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}r}\right) + \kappa^2 r^{n-1}\Theta = 0.$$

Si $\nu=(n-2)/2$, con el cambio de función $\Psi(r)=r^{\nu}\Theta(r)$ esta ecuación se transforma en

$$\frac{\mathrm{d}^2 \Psi}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}r} + \left(\kappa^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) \Psi = 0,$$

que, a su vez, con el cambio de variable independiente $t = \kappa r$ se reduce a

(20)
$$\frac{\mathrm{d}^2 \Psi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{t} \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} + \left(1 - \frac{v^2}{t^2}\right) \Psi = 0.$$

Como antes, esta es la ecuación de Bessel de orden ν y, por tanto, Ψ (que es continua en t=0) debe ser proporcional a J_{ν} . Deshaciendo los cambios y ajustando la constante de proporcionalidad vemos que

$$\Theta(r) = \Gamma(\nu + 1) \left(\frac{2}{\kappa}\right)^{\nu} r^{-\nu} J_{\nu}(\kappa r) \Theta(0) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{2}{\kappa r}\right)^{(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(\kappa r) \Theta(0) = j_{n}(\kappa r) \Theta(0)$$

ya que

(21)
$$J_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu + 2k},$$

y, por tanto, $\left(\frac{2}{r}\right)^{\nu} J_{\nu}(r) \rightarrow 1/\Gamma(\nu+1)$ cuando $r \rightarrow 0^+$.

Consecuentemente, hemos probado que si *u* es solución de la ecuación de Helmholtz (que sigue siendo invariante por traslaciones), entonces

(22)
$$\int_{|\zeta|=1} u(x+r\zeta) \, \mathrm{d}\sigma(\zeta) = j_n(\kappa r) u(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y r > 0.

Recíprocamente, de (21) vemos que

$$j_n(z) = \Gamma \left(\frac{n}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma \left(\frac{n}{2} + k\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

TEMat, 5 (2021) e-issn: 2530-9633 31

Así, $j_n(0) = 1$, $j_n'(0) = 0$ y $j_n''(0) = -1/n$. Ahora la ecuación (5) implica que, si $u \in C^2$ satisface (22), entonces

$$\Delta u(x) = 2n \left. \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} \right|_{r=0} j_n(\kappa r) u(x) = -\kappa^2 u(x).$$

Por tanto, y como ocurre con la propiedad del valor medio para funciones armónicas, al menos para funciones C^2 , (22) caracteriza las soluciones de la ecuación de Helmholtz.

Observación 28. Si r>0 es un cero de j_n-1 , sigue inmediatamente de (22) que cualquier solución de la ecuación de Helmholtz con $\kappa=1$ satisface (14) en circunferencias de radio r pero no es armónica, esto es, la propiedad del valor medio para un solo radio no implica armonicidad. De igual forma, si $r_1/r_2 \in H_n$, es decir, $r_1/r_2 = z_1/z_2 > 0$ con $j_n(z_1) = j_n(z_2) = 1$, para $\kappa = z_1/r_1 = z_2/r_2$ tendremos que $j_n(\kappa r_1) = j_n(\kappa r_2) = 1$ y cualquier solución de la ecuación de Helmholtz con parámetro κ satisface (14) para circunferencias de radios r_1 y r_2 . Puesto que $\kappa \neq 0$, tal solución tampoco es armónica.

5. El lema de Weyl

La sección 2.5 del trabajo de Maciá Medina [15] está, como aquí, dedicada al aspecto de regularidad para las funciones armónicas. Maciá Medina prueba el teorema 30 para el caso del plano \mathbb{R}^2 pero, como bien indica en la observación 2.37, no hay nada particular en la prueba que no permita su generalización al caso multidimensional. Para otra prueba ligeramente diferente pero esencialmente equivalente, véase el libro de Jost [14, corollary 1.2.1]. Como en el trabajo de Maciá Medina [15], empezamos recordando las definiciones pertinentes.

Si u es armónica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$, de (4) (con $v = \varphi$),

$$\langle u, \Delta \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) \, \mathrm{d}v(x) = \int_{\Omega} \varphi(x) \Delta u(x) \, \mathrm{d}v(x) = 0.$$

Esta condición tiene sentido incluso para funciones que no sean continuas en Ω , como, por ejemplo, si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es localmente integrable. Esto sugiere la siguiente definición.

Definición 29. Una función localmente integrable u en un abierto Ω de \mathbb{R}^n se dice armónica en sentido débil o que satisface la ecuación $\Delta u = 0$ en sentido débil si

$$\langle u, \Delta \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) \, \mathrm{d}v(x) = 0$$

para toda función $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$.

Obsérvese que no sigue de la definición 29 que si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es armónica en sentido débil lo sea en el sentido usual (para ello u debe ser al menos C^2).

Este hecho se recoge, y es parte de un resultado más general, en el siguiente teorema.

Teorema 30 (Weyl). *Si* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $\Delta u = 0$ *en sentido débil, entonces u es armónica, esto es,* $\Delta u = 0$ *en sentido clásico en* Ω .

Para ser más precisos, en la conclusión se debe entender que *u* es armónica tras posiblemente ser modificada en un conjunto de medida nula.

Demostración. Sean Ω_{ε} y ϕ como en la demostración del teorema 14. Si $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$, entonces $\varphi * \phi_{\varepsilon} \in C_c^{\infty}(\Omega)$ y $u_{\varepsilon} := u * \phi_{\varepsilon} \in C^{\infty}(\Omega_{\varepsilon})$.

Por (4) se tiene que

$$\begin{split} \int_{\Omega} \Delta u_{\varepsilon}(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}v(x) &= \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \Delta \varphi(x) \, \mathrm{d}v(x) \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} u(y) \phi_{\varepsilon}(x-y) \, \mathrm{d}v(y) \right) \Delta \varphi(x) \, \mathrm{d}v(x) \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \phi_{\varepsilon}(x-y) \Delta \varphi(x) \, \mathrm{d}v(x) \right) u(y) \, \mathrm{d}v(y) \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \phi_{\varepsilon}(x) \Delta \varphi(x+y) \, \mathrm{d}v(x) \right) u(y) \, \mathrm{d}v(y) \\ &= \int_{\Omega} u(y) \left(\Delta_{y} \int_{\Omega} \phi_{\varepsilon}(x) \varphi(x+y) \, \mathrm{d}v(x) \right) \mathrm{d}v(y) \\ &= \int_{\Omega} u(y) \Delta \chi(y) \, \mathrm{d}v(y) = 0, \end{split}$$

ya que la función

$$\chi(y) := \int_{\Omega} \phi_{\varepsilon}(x) \varphi(x+y) \, \mathrm{d}v(x)$$

es $C_c^{\infty}(\Omega)$ y u es armónica en sentido débil en Ω . Por tanto, u_{ε} es armónica en sentido clásico en Ω .

Por último observemos que, para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, como consecuencia de la demostración del teorema 14,

$$u_{\varepsilon} = u_{\varepsilon} * \phi_{\delta} = (u * \phi_{\varepsilon}) * \phi_{\delta} = u * (\phi_{\varepsilon} * \phi_{\delta}) = u * (\phi_{\delta} * \phi_{\varepsilon}) = (u * \phi_{\delta}) * \phi_{\varepsilon} = u_{\delta} * \phi_{\varepsilon} = u_{\delta}$$

en $\Omega_{\max\{\varepsilon,\delta\}}$ (Ω_{ε} decrece con ε) y, puesto que $u_{\varepsilon} \to u$ en $L^1_{loc}(\Omega)$ cuando $\varepsilon \to 0$, del corolario 12 (o la observación 13), u_{ε} converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω a una función u_* que, por el corolario 16, es armónica en Ω y coincide con u en casi todo punto.

Referencias

- [1] AXLER, Sheldon; BOURDON, Paul, y RAMEY, Wade. *Harmonic function theory*. 2.ª ed. Graduate Texts in Mathematics 137. Nueva York: Springer-Verlag, 2001. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-8137-3.
- [2] Berenstein, Carlos A. y Gay, Roger. «A local version of the two-circles theorem». En: *Israel Journal of Mathematics* 55.3 (1986), págs. 267-288. ISSN: 0021-2172. https://doi.org/10.1007/BF02765026.
- [3] Berenstein, Carlos A. y Gay, Roger. *Complex variables. An introduction*. Graduate Texts in Mathematics 125. Nueva York: Springer-Verlag, 1991. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3024-3.
- [4] Crespo Pérez, Alba. *Funciones armónicas*. Trabajo de Fin de Grado. Universidad de La Laguna, 2017. URL: https://riull.ull.es/xmlui/handle/915/6221.
- [5] Delsarte, Jean. Lectures on topics in mean periodic functions and the two-radius theorem. Lectures on mathematics and physics. Mathematics 22. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1961. URL: http://www.math.tifr.res.in/~publ/ln/tifr22.pdf.
- [6] FLORES, Manuel y SADARANGANI, Kishin. *Cálculo Diferencial e Integral*. Manuales y textos universitarios. La Laguna: Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna, 2013. ISBN: 978-84-15910-53-4. URL: https://www.ull.es/servicios/publicaciones/publicacion/calculo-diferencial-e-integral.
- [7] FOLLAND, Gerald B. *Introduction to partial differential equations*. 2.^a ed. Princeton: Princeton University Press, 1995. ISBN: 978-0-691-04361-6.
- [8] FOLLAND, Gerald B. *Real analysis. Modern techniques and their applications*. 2.^a ed. Pure and Applied Mathematics. Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1999. ISBN: 978-0-471-31716-6.

- [9] HANSEN, Wolfhard. «Restricted mean value property and harmonic functions». En: *Proceedings of the International Conference on Potential Theory*. Potential Theory ICPT (Kouty, 1994). Berlín: De Gruyter, 1996, págs. 67-90. https://doi.org/10.1515/9783110818574.67.
- [10] Hansen, Wolfhard. «A strong version of Liouville's theorem». En: *American Mathematical Monthly* 115.7 (2008), págs. 583-595. ISSN: 0002-9890. https://doi.org/10.1080/00029890.2008.11920570.
- [11] Hansen, Wolfhard y Nadirashvili, Nikolai. «A converse to the mean value theorem for harmonic functions». En: *Acta Mathematica* 171.2 (1993), págs. 139-163. issn: 0001-5962. https://doi.org/10.1007/BF02392531.
- [12] Hansen, Wolfhard y Nadirashvill, Nikolai. «Littlewood's one circle problem». En: *Journal of the London Mathematical Society. Second Series* 50.2 (1994), págs. 349-360. ISSN: 0024-6107. https://doi.org/10.1016/j.exmath.2008.04.001.
- [13] HÖRMANDER, Lars. *An introduction to complex analysis in several variables*. 3.ª ed. North-Holland Mathematical Library 7. Ámsterdam: North-Holland Publishing Co., 1990. ISBN: 978-0-444-88446-6.
- [14] Jost, Jürgen. *Partial differential equations*. 2.ª ed. Graduate Texts in Mathematics 214. Nueva York: Springer, 2007. https://doi.org/10.1007/978-0-387-49319-0.
- [15] Maciá Medina, Víctor J. Análisis Complejo: la ecuación $\bar{\partial}$ y funciones armónicas en el plano. Trabajo de Fin de Grado. Universidad de La Laguna, 2017. URL: https://riull.ull.es/xmlui/handle/915/4265.
- [16] NETUKA, Ivan y VESELÝ, Jiří. «Mean value property and harmonic functions». En: *Classical and modern potential theory and applications* (Chateau de Bonas, 1993). NATO Science Series C: Mathematical and Physical Sciences 430. Dordrecht: Springer, 1994, págs. 359-398. https://doi.org/10.1007/978-94-011-1138-6_29.
- [17] RUDIN, Walter. *Real and complex analysis*. 3.ª ed. Nueva York: McGraw-Hill Book Co., 1987. ISBN: 978-0-07-054234-1.
- [18] Spivak, Michael. *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus.* Nueva York-Ámsterdam: W. A. Benjamin, Inc., 1965. ISBN: 978-0-8053-9021-6.
- [19] Volchkov, Vitaly V. «The final version of the mean value theorem for harmonic functions». En: *Mathematical Notes* 59.3 (1996), págs. 247-252. ISSN: 0025-567X. https://doi.org/10.1007/BF02308535.
- [20] Watson, George N. *A treatise on the theory of Bessel functions*. 2.ª ed. Cambridge Mathematical Library. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. ISBN: 978-0-521-48391-9.
- [21] ZALCMAN, Lawrence. «Analyticity and the Pompeiu problem». En: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 47 (1972), págs. 237-254. ISSN: 0003-9527. https://doi.org/10.1007/BF00250628.
- [22] ZALCMAN, Lawrence. «Real proofs of complex theorems (and vice versa)». En: *American Mathematical Monthly* 81 (1974), págs. 115-137. ISSN: 0002-9890. https://doi.org/10.2307/2976953.
- [23] ZALCMAN, Lawrence. «Offbeat integral geometry». En: *American Mathematical Monthly* 87.3 (1980), págs. 161-175. issn: 0002-9890. https://doi.org/10.2307/2321600.

TEMat

Algunas fórmulas cerradas para productos infinitos y su relación con la función zeta de Riemann

Miguel Camarasa Buades Universitat de València

miguel.camarasa.buades@gmail.com

Resumen: El principal objetivo es obtener una fórmula cerrada para los productos infinitos de la forma

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^k}{n^k}\right),\,$$

donde $z \in \mathbb{C}$ y $k \geq 2$. Esto nos permitirá, por ejemplo, obtener algunos productos infinitos como

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right), \quad \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) \quad \text{o} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^4}\right).$$

Abstract: The main goal is to obtain a closed-form for infinite products of the form

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^k}{n^k} \right),\,$$

where $z \in \mathbb{C}$ and $k \geq 2$. It will allow us, for example, to obtain some infinite products such as

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right), \quad \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^3} \right) \quad \text{o} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^4} \right).$$

Palabras clave: productos infinitos, función zeta de Riemann.

MSC2010: 40A20.

Recibido: 6 de noviembre de 2019. Aceptado: 16 de junio de 2020.

Referencia: CAMARASA BUADES, Miguel. «Algunas fórmulas cerradas para productos infinitos y su relación con la función zeta de Riemann». En: *TEMat*, 5 (2021), págs. 35-42. ISSN: 2530-9633. URL: https://temat.es/articulo/2021-p35.

1. Introducción

El problema de Basilea consiste en la obtención de una fórmula cerrada para la suma de los recíprocos de los números naturales al cuadrado,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Es un famoso problema de teoría de números que tardó muchos años en ser resuelto, hasta que en 1735 Leonhard Euler encontró que la suma anterior vale $\pi^2/6$. Hoy en día es natural relacionarlo con la función zeta de Riemann ζ , definida de la siguiente manera:

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$
 para Re(z) > 1.

De este modo, se tiene que $\zeta(2) = \pi^2/6$. Es más, todos los valores pares de esta función pueden ser expresados mediante los números de Bernoulli [2] como

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2 \cdot (2n)!} B_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En cambio, para valores impares no se conoce una fórmula cerrada. Por ejemplo,

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots = 1,202\,056\,9\dots,$$

conocida como la constante de Apéry, debida al matemático Roger Apéry, no dispone actualmente de una fórmula cerrada conocida. Apéry demostró en 1978 que esta constante era un número irracional [1], pero a día de hoy no se sabe si es trascendente.

El principal objetivo de este artículo es presentar un problema similar relacionado con productos infinitos en vez de series. Así pues, nos preguntamos si es posible obtener una fórmula cerrada para los productos infinitos de la forma

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^k}\right),$$

donde $k \ge 2$. Un producto infinito es convergente si uno de sus factores es nulo (entonces diremos que converge a 0) o si su sucesión de productos parciales converge a un valor no nulo.

Para las propiedades elementales de los productos infinitos se puede consultar el libro de Rao *et al.* [5]. En él se demuestra el siguiente resultado, aplicable a una sucesión arbitraria de números complejos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, que justifica que el producto infinito (1) es convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \implies \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \quad \text{converge.}$$

Lo anterior motiva a hacerse la siguiente pregunta: ¿existe una fórmula cerrada para los siguientes productos infinitos:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right), \quad \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^3} \right) \quad \text{o} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^4} \right) ?$$

¿Habrá una fórmula cerrada para cada uno de ellos, o solo para los valores pares de k, como en el caso de las series? La respuesta es que se puede obtener una fórmula cerrada para cada uno de ellos en términos de la función gamma de Euler.

Una de las mejores formas de abordar esta clase de problemas es a través del análisis complejo. Como bien dijo el matemático francés Jacques Hadamard: «El camino más corto entre dos verdades del análisis real

pasa por el análisis complejo». Así pues, nuestro siguiente objetivo va a ser obtener una fórmula cerrada, en términos de la función gamma de Euler, para la siguiente familia de productos en variable compleja:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^k}{n^k}\right),$$

donde $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$ y $z \in \mathbb{C}$. Es bien conocido que para k = 2 el producto anterior puede ser escrito en términos de la función seno, usando la representación de Euler [3]:

$$\operatorname{sen}(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

Esto mismo es una especie de «factorización infinita» de la función seno, pues los valores donde se anula este producto infinito son precisamente los enteros. Es por eso que, con esta inspiración, nos vamos a preguntar cuáles son los ceros del producto infinito en (2) y si conocemos alguna función con estas propiedades.

2. Ceros

El conjunto de ceros de la función entera

$$P_k(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^k}{n^k}\right), \quad k \ge 2,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, está dado por

$$Z(P_k) = \{z \in \mathbb{C} : z = nw_i \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, 0 \le j \le k-1\},$$

donde

$$w_j = \exp\left(\frac{2\pi j}{k}i\right), \quad 0 \le j \le k-1,$$

son las k-ésimas raíces de la unidad. El punto importante aquí es que, para un j fijo, los ceros de la forma $z = n \cdot w_j$ son lineales en n. En la figura 1 se representa el conjunto de ceros de P_5 y P_8 .

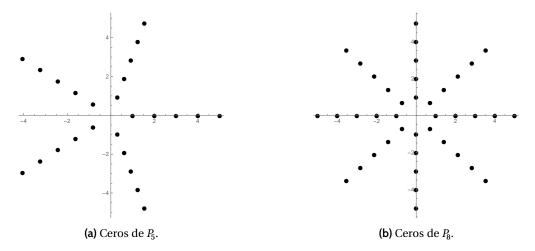


Figura 1: Ceros de P_k para k = 5 y k = 8.

Nuestro objetivo es encontrar una expresión, tan simple como sea posible, de una función cuyo conjunto de ceros sea $Z(P_k)$. En este contexto es casi natural considerar la función gamma de Euler, ya que sus polos son precisamente los enteros no positivos y, por tanto, los ceros de su función recíproca serán precisamente estos mismos. Recordemos que

(3)
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{Re}(z) > 0.$$

Además, la función gamma satisface la siguiente ecuación funcional:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Esta función se extiende de manera holomorfa a todo el plano complejo excepto a los enteros no positivos, por lo que su función recíproca puede ser extendida a una función entera, ya que Γ no tiene ceros. Esta también tiene una representación como producto infinito, uniformemente convergente en conjuntos compactos,

(4)
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n},$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni [5]. Se sigue que

$$Z\left(\frac{1}{\Gamma(z)}\right) = \{0, -1, -2, ...\}.$$

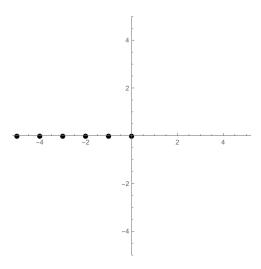


Figura 2: Ceros de $1/\Gamma(z)$.

Este conjunto está representado en la figura 2. Ahora bien, si a este conjunto de ceros se le aplica una determinada transformación lineal, se puede construir una función entera con los ceros deseados, $Z(P_k)$. De hecho, la composición con $z\mapsto 1-z$ tiene por ceros el conjunto $\{1,2,3,\ldots\}$, los cuales son parte de los ceros de, por ejemplo, la función P_5 . Además, después de componer con la transformación $z\mapsto z/w_1$, los ceros son movidos a la segunda línea (en sentido antihorario) de la figura 1. En general, el producto finito

(5)
$$\prod_{j=0}^{\frac{1}{k-1}} \Gamma\left(1 - \frac{z}{w_j}\right)$$

tiene el mismo conjunto de ceros que $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{z^k}{n^k}\right)$. Veamos que en realidad son la misma función.

3. Teorema principal

Se presenta ahora un resultado que muestra que la expresión (5) coincide con el producto $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^k}{n^k}\right)$. Primero necesitamos otro resultado acerca de las raíces de la unidad.

Lema 1. Sean $k \in \mathbb{N}$ con $k \ge 2$ y $\{w_j\}_{j=0}^{k-1}$ el conjunto de las k-ésimas raíces de la unidad. Entonces,

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{w_j} = 0, \quad \prod_{j=0}^{k-1} w_j = (-1)^{k+1}.$$

Demostración. Usando la representación

$$p_k(z) = z^k - 1 = \prod_{i=0}^{k-1} (z - w_i),$$

si se desarrolla el producto de la derecha y se comparan ambos lados de la igualdad, se deduce inmediatamente que

$$-1 = \prod_{j=0}^{k-1} -w_j = (-1)^k \prod_{j=0}^{k-1} w_j \quad \text{y} \quad 0 = -\sum_{k=0}^{k-1} w_j.$$

Ya estamos en condiciones de presentar el resultado principal.

Teorema 2. Sea $k \in \mathbb{N}$, con $k \ge 2$. Entonces,

(6)
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^k}{n^k} \right) = \left(\prod_{j=0}^{k-1} \Gamma \left(1 - \frac{z}{w_j} \right) \right)^{-1}.$$

Demostración. Sea $p_k(z)=z^k-1$. Se tiene por la segunda igualdad del lema 1 que

$$p_k(z) = \prod_{j=0}^{k-1} (z - w_j) = \prod_{j=0}^{k-1} (-w_j) \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{z}{-w_j} \right) = -\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{z}{-w_j} \right).$$

Por la primera igualdad del lema 1,

$$\prod_{j=0}^{k-1} \exp\left(\frac{z}{w_j}\right) = 1$$

y, por tanto,

$$p_k(z) = -\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{z}{-w_j}\right) \exp\left(\frac{z}{w_j}\right).$$

Consecuentemente,

$$\begin{split} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^k}{n^k} \right) &= \prod_{n=1}^{\infty} -p_k \left(\frac{z}{n} \right) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{z}{-nw_j} \right) \exp \left(\frac{z}{nw_j} \right) \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{-nw_j} \right) \exp \left(\frac{z}{nw_j} \right) \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} \left(\Gamma \left(\frac{-z}{w_j} \right) \frac{-z}{w_j} \exp \left(\gamma \frac{-z}{w_j} \right) \right)^{-1} \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} \left(\Gamma \left(\frac{-z}{w_j} \right) \frac{-z}{w_j} \right)^{-1} \\ &= \left(\prod_{j=0}^{k-1} \Gamma \left(1 - \frac{z}{w_j} \right) \right)^{-1} . \end{split}$$

Una versión más general del teorema 2 se puede encontrar en *A course of modern analysis* [7], el cual expresa el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_k)}{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_k)},$$

para $k \ge 2$ y bajo ciertas condiciones sobre $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$, en términos de la función gamma.

Ejemplo 3. Imaginemos que queremos calcular el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)$. De acuerdo con el teorema 2, se puede escribir

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^3}{n^3}\right) = \left(\prod_{j=0}^{2} \Gamma\left(1 - \frac{z}{w_j}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{\Gamma(1-z) \Gamma\left(1 - \frac{z}{\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)}\right) \Gamma\left(1 - \frac{z}{\exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right)}\right)}.$$

Para z = -1 obtenemos que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^3} \right) = \frac{1}{\Gamma(2) \Gamma\left(1 + \exp\left(\frac{-2\pi i}{3}\right) \right) \Gamma\left(1 + \exp\left(\frac{-4\pi i}{3}\right) \right)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

$$= \frac{1}{\pi} \cosh\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\right).$$

La última igualdad se sigue de la fórmula de reflexión de Euler,

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Trabajar con valores no enteros de la función gamma de Euler es un poco difícil. Por esta razón, se presenta un resultado complementario para el caso en el que k es un número par. Este relaciona la familia de funciones P_k con el producto finito de funciones seno, las cuales son más fáciles de tratar.

Corolario 4. Sea $m \in \mathbb{N}$ y sean $\{w_i\}_{i=0}^{2m-1}$ las raíces 2m-ésimas de la unidad. Entonces,

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^{2m}}{n^{2m}} \right) = \frac{\mathrm{i}^{m-1}}{(\pi z)^m} \prod_{i=0}^{m-1} \mathrm{sen}\left(\frac{\pi z}{w_i}\right).$$

Demostración. La clave es agrupar el producto de funciones gamma en parejas:

$$\begin{split} \Gamma\bigg(1-\frac{z}{w_j}\bigg)\Gamma\bigg(1-\frac{z}{w_{j+m}}\bigg) &= -\frac{z}{w_j}\Gamma\bigg(-\frac{z}{w_j}\bigg)\Gamma\bigg(1-\frac{z}{w_{j+m}}\bigg) \\ &= -\frac{z}{w_i}\Gamma\bigg(-\frac{z}{w_i}\bigg)\Gamma\bigg(1+\frac{z}{w_i}\bigg). \end{split}$$

Ahora, por la fórmula de reflexión de Euler, se obtiene que

$$\Gamma\left(1 - \frac{z}{w_j}\right)\Gamma\left(1 - \frac{z}{w_{j+m}}\right) = \frac{z}{w_j} \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{w_i}\right)}.$$

Por el teorema 2, finalmente obtenemos que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^{2m}}{n^{2m}} \right) = \left(\prod_{j=0}^{m-1} \frac{z}{w_j} \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{w_j}\right)} \right)^{-1} = \frac{\mathrm{i}^{m-1}}{(\pi z)^m} \prod_{j=0}^{m-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{w_j}\right).$$

El término i $^{m-1}$ en la última igualdad es debido a que

$$\prod_{j=0}^{m-1} w_j = \prod_{j=0}^{m-1} \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}}{2m} j\right) = \exp\left(\frac{\pi \mathrm{i}}{m} \sum_{j=0}^{m-1} j\right) = \exp\left(\frac{\pi \mathrm{i}(m-1)}{2}\right) = \mathrm{i}^{m-1}.$$

4. Relación con la función zeta de Riemann

Puede resultar extraño que se pueda encontrar una fórmula cerrada para $P_k(z)$ para cualquier k y que, en cambio, no se haya encontrado todavía una fórmula cerrada para valores impares de la función zeta de Riemann, ya que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^k}{n^k} \right) = 1 - \zeta(k)z^k + \dots$$

Así pues, a primera vista parece ser que, como tenemos una fórmula cerrada para el producto infinito en términos de la función gamma, deberíamos poder expresar $\zeta(k)$ de igual forma para cualquier $k \ge 2$, pero esto no es así.

Esto se ve reflejado a través del corolario 4. Cuando k es par, podemos expresar P_k en términos de la función seno, de la cual el desarrollo de Taylor es conocido. Así pues, reagrupando los coeficientes es posible, por ejemplo, resolver el problema de Basilea. En cambio, para valores impares de k, se debe trabajar con el recíproco de la función gamma, y la clave aquí es que no se dispone de una fórmula cerrada para todos los coeficientes de su desarrollo de Taylor. De hecho, solo se conocen los tres primeros:

(7)
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z + \gamma z^2 + \left(\frac{\gamma^2}{2} - \frac{\pi^2}{12}\right) z^3 + \dots$$

Nosotros estamos interesados en el desarrollo de Taylor de la función recíproca de $\Gamma(1-z)$,

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = 1 - \gamma z + \left(\frac{\gamma^2}{2} - \frac{\pi^2}{12}\right) z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

donde $a_3 \in \mathbb{R}$.

Por el teorema 2,

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^k}{n^k} \right) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{z}{w_j}\right)}.$$

Entonces, $-\zeta(k)$ es el coeficiente de z^k en el desarrollo en serie de Taylor de la función en el lado derecho. Por ejemplo, para k=3 y después de varias manipulaciones, se llega a que

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)\Gamma\left(1-\frac{z}{\exp\left(\frac{2\pi i}{z}\right)}\right)\Gamma\left(1-\frac{z}{\exp\left(\frac{4\pi i}{z}\right)}\right)} = 1 + \left(3a_3^3 + \frac{\gamma^3}{2} - \frac{1}{4}\gamma\pi^2\right)z^3 + \dots$$

Así pues, $\zeta(3) = 1/4\gamma\pi^2 - 3a_3^3 - \gamma^3/2$. En otras palabras, podemos obtener una fórmula cerrada para $\zeta(3)$ si obtenemos una fórmula cerrada para el tercer coeficiente del desarrollo de Taylor de $1/\Gamma(1-z)$. Es más, si la encontramos para cada uno de sus coeficientes también encontramos una fórmula cerrada para $\zeta(k)$ en general. Un estudio completo sobre estos coeficientes se puede consultar en «Taylor series for the reciprocal gamma function and multiple zeta values» [6]. Recientemente, una representación integral ha sido descubierta por Fekih-Ahmed [4]:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\pi n!} \int_0^\infty e^{-t} \operatorname{Im}((\log(t) - i\pi)^n) dt.$$

TEMat, 5 (2021) e-issn: 2530-9633 41

Referencias

- [1] APÉRY, Roger. «Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ ». En: Astérisque 61 (1979): Journées arithmétiques de Luminy, 20 Juin 24 Juin 1978. Colloque international du CNRS, Marseille-Luminy, págs. 11-13. ISSN: 0303-1179.
- [2] APOSTOL, Tom M. «Another elementary proof of Euler's formula for $\zeta(2n)$ ». En: *American Mathematical Monthly* 80 (1973), págs. 425-431. ISSN: 0002-9890. https://doi.org/10.2307/2319093.
- [3] EBERLEIN, William F. «On Euler's infinite product for the sine». En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 58.1 (1977), págs. 147-151. ISSN: 0022-247X. https://doi.org/10.1016/0022-247X(77)90234-7.
- [4] FEKIH-AHMED, Lazhar. «On the Power Series Expansion of the Reciprocal Gamma Function». En: *arXiv e-prints* (2014). arXiv: 1407.5983 [math.NT].
- [5] RAO, Murali; STETKÆR, Henrik; FOURNAIS, Søren, y Møller, Jacob Schach. *Complex analysis. An invitation.* 2.ª ed. Hackensack: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2015. https://doi.org/10.1142/9062.
- [6] SAKATA, Mika. «Taylor series for the reciprocal gamma function and multiple zeta values». En: *Proceedings of the Japan Academy. Series A* 93.6 (2017), págs. 47-49. ISSN: 0386-2194. https://doi.org/10.3792/pjaa.93.47.
- [7] WHITTAKER, Edmund T. y WATSON, George N. *A course of modern analysis*. 4.ª ed. Cambridge Mathematical Library. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. https://doi.org/10.1017/CB09780511608759.

TEMat

Topología y neurociencia: la percepción del espacio

☐ Erika Magdalena Herrera Machado^a Universidad de La Laguna erikaherreramachado@gmail.com

Resumen: La introducción de herramientas matemáticas en la neurociencia ha contribuido al rápido progreso y expansión experimental de esta disciplina. En este trabajo se pretende dar una visión de algunas aplicaciones de la topología en neurociencia. Comenzaremos con la interpretación matemática de ciertos fenómenos experimentales relacionados con las neuronas de posicionamiento. Seguidamente se definirá el código neuronal, para continuar con una pequeña introducción a los complejos simpliciales, elementos matemáticos que nos ayudarán a abordar la cuestión de interpretar estos fenómenos. Tras presentar la noción de nervio, una conocida herramienta de la topología algebraica, presentaremos un importante resultado: el lema del nervio, clave para entender el funcionamiento de las células de posicionamiento. Finalizaremos el trabajo estudiando los llamados códigos convexos y algunos resultados sobre obstrucciones locales a la convexidad de los códigos.

Abstract: The introduction of mathematical tools in neuroscience has contributed to the rapid progress and experimental expansion of this discipline. This paper aims to give a vision of some applications of topology in neuroscience. We will begin with the mathematical interpretation of certain experimental phenomena related to place neurons. The neural code will then be defined, to continue with a short introduction to simplicial complexes, the mathematical elements that will help us to interpret these phenomena. After presenting the notion of nerve, a known tool of algebraic topology, we will present an important result: the nerve lemma, key to understanding the functioning of place cells. We will finish the work by studying the so called convex codes and some results on local obstructions to the convexity of the codes.

Palabras clave: complejo simplicial, código neuronal, códigos convexos, células de posicionamiento, lema del nervio.

MSC2010: 55U05, 55U10.

Recibido: 13 de octubre de 2019. Aceptado: 3 de febrero de 2021.

Agradecimientos: Quisiera dar las gracias a mis tutores, Francisco Javier Díaz Díaz y Edith Padrón Fernández, por su tiempo, dedicación e inestimables consejos, y a las Matemáticas, por su inconmensurable aportación a mi

Referencia: Herrera Machado, Erika Magdalena. «Topología y neurociencia: la percepción del espacio». En: *TEMat*, 5 (2021), págs. 43-55. ISSN: 2530-9633. URL: https://temat.es/articulo/2021-p43.

 $[^]a$ El actual trabajo se desarrolló como parte de la asignatura Trabajo de Fin de Grado del Grado en Matemáticas, Universidad de La Laguna.

1. Introducción

Sin haberse percatado, cuando el lector se ha movido por el ambiente en el que se encuentra leyendo este artículo, su cerebro, en un proceso natural, ha formado una representación de tal experiencia, dotándolo de contexto espacial para los recuerdos y experiencias pasadas. En este trabajo se pretende estudiar mediante técnicas matemáticas la manera en la que la actividad del cerebro representa la información espacial del entorno. Las referencias esenciales han sido los artículos de Curto [3] y Curto *et al.* [4].

Lo que acabamos de comentar es solo un ejemplo de las muchas aplicaciones de la neurociencia. Esta ciencia multidisciplinar estudia la estructura, el desarrollo y el funcionamiento del sistema nervioso, centrándose en el cerebro y su impacto en el comportamiento y funciones cognitivas del individuo.

Los primeros estudios se atribuyen a los egipcios, autores del texto médico más antiguo que conoce la historia, denominado «papiro Edwin Smith». Este data de 1700 a. C. y en él se analizan el cerebro, las meninges, la médula espinal y el líquido cefalorraquídeo, aunque tanto los egipcios como el griego Aristóteles adoptaron la creencia de que nuestra conciencia, imaginación y memoria estaban enraizadas en el corazón. Fue aproximadamente en el año 170 a. C. cuando el trabajo del médico griego Galeno cuestionó esta opinión.

Importantes descubrimientos en esta ciencia han acontecido hasta nuestros días, destacando nombres como Descartes, Galvani, Golgi, Ramón y Cajal o Rabi, entre otros, por sus aportaciones. Sin embargo, no es hasta el siglo xx cuando la neurociencia pasa a ser reconocida como una disciplina académica en sí misma, experimentando su más rápido progreso a mitad de siglo. A ello ha contribuido en gran medida la introducción de técnicas matemáticas y, en particular, topológicas.

Para poner al lector en contexto, imagínese explorando un entorno. A medida que avanza, una *neurona de posicionamiento* se activa cuando se sitúa en una zona del espacio bien delimitada, llamada *campo de posicionamiento*. De esta manera, el entorno completo puede quedar determinado por la actividad de un conjunto de estas neuronas. Considerando los campos de posicionamiento como una colección de abiertos en un espacio topológico, es posible definir un código neuronal a partir de dicha colección. Es más, ciertos estudios revelan que los campos de posicionamiento son esencialmente convexos, lo cual motiva que en este trabajo pongamos énfasis en examinar los llamados *códigos neuronales convexos*.

Para estudiar satisfactoriamente lo mencionado anteriormente, serán claves los complejos simpliciales, utilizados históricamente en la triangulación de espacios topológicos y que no son otra cosa que conjuntos de estructuras geométricas elementales: segmentos lineales, triángulos, tetraedros y sus análogos en mayor dimensión. Sin embargo, para nuestras aplicaciones en neurociencia utilizaremos su versión puramente combinatoria: el complejo simplicial abstracto.

2. Topología en neurociencia

Nuestro cerebro cuenta con más de 86 000 millones de neuronas, células eléctricamente activas conectadas entre sí mediante complejas redes. Para transmitir información, una neurona se comunica con su vecina mediante impulsos eléctricos, que se generan como respuesta a estímulos o de manera espontánea. La neurociencia estudia el sistema nervioso, su estructura y funcionamiento, centrándose en el cerebro y su impacto en el comportamiento y las funciones cognitivas.

La pregunta a responder sería: ¿cómo la actividad conjunta de las neuronas representa la información del mundo exterior?

Los primeros descubrimientos relevantes en esta temática tuvieron lugar en la década de los 50, cuando Hodgkin y Huxley estudiaron la dinámica de los impulsos eléctricos para una neurona aislada [10]. En ese momento, incluso sin tener en cuenta la red neuronal que la rodeaba, ya parecía una quimera predecir cuándo una neurona iba a activarse.

Sin embargo, Hubel y Wiesel, ambos premio Nobel en 1981 por sus aportaciones en el estudio del área visual de la corteza cerebral, realizaron en los años 60 un experimento consistente en mostrarle a un gato despierto patrones de barras negras sobre un fondo blanco. Estudiando algunas neuronas por separado, encontraron que cada una respondía a un ángulo diferente de dicha barra, como se muestra en la figura 1, donde la frecuencia de impulsos eléctricos de una neurona se dispara para un ángulo de 45°.

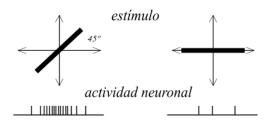


Figura 1: Respuesta neuronal a estímulo visual.

Hubel y Wiesel habían descubierto las *neuronas de orientación* [6], cuya actividad, por tanto, se podría predecir mirando únicamente los estímulos de la pantalla. Se pensó entonces que cada neurona actuaba como un sensor para una característica particular de la escena visual.

Una década más tarde tiene lugar un descubrimiento similar, llevado a cabo por el neurocientífico John O'Keefe, premio Nobel de Medicina en 2014 por sus descubrimientos de células asociadas al posicionamiento espacial del individuo. Mediante experimentos consistentes en estudiar un roedor moviéndose por un entorno acotado, O'Keefe se percató de que ciertas neuronas del *hipocampo* respondían de forma selectiva a diferentes localizaciones de su entorno físico [9]. Estas células, que sirven como sensores de posición en el espacio, se conocen como *neuronas de posicionamiento*. Profundizaremos sobre este tema en la siguiente sección.

Nota 1. El hipocampo es un pequeño órgano situado en lo que se conoce como el *sistema límbico* (conjunto de estructuras interconectadas cuya función se relaciona con los estados emocionales). Se le asocian procesos ligados a la memoria, las emociones y la navegación espacial.

Sistema Límbico Cuerpo calloso Giro cingulado Giro parahipocampal Hipotálamo Cuerpo mamilar Cuerpo amigdalino

Figura 2: Sistema límbico. Imagen modificada a partir de un original de Blausen.com [1] con licencia ⊚⊕ CC BY 3.0 Unported.

3. Neuronas de posicionamiento

Como hemos mencionado previamente, existe un tipo de células cerebrales conocidas como neuronas de posicionamiento cuyo ratio de impulsos eléctricos aumenta cuando el individuo se sitúa en una zona de su entorno físico denominada *campo de posicionamiento* asociado a la neurona. En nuestro estudio consideraremos un solo campo de posicionamiento asociado a cada neurona, aunque en entornos más grandes que los reproducidos en un laboratorio, cada neurona puede llegar a tener varios de estos campos asociados. Los campos de posicionamiento describen circuitos con importantes implicaciones para la memoria, dado que proveen el contexto espacial para los recuerdos y experiencias pasadas.

Durante un largo tiempo solo se podía monitorizar una neurona. Sin embargo, cuando la monitorización simultánea de varias células fue posible, se demostró mediante inferencia estadística que la posición del individuo podía deducirse de la actividad colectiva de las células de posicionamiento [2].

La figura 3 esquematiza el experimento que pasamos a detallar.

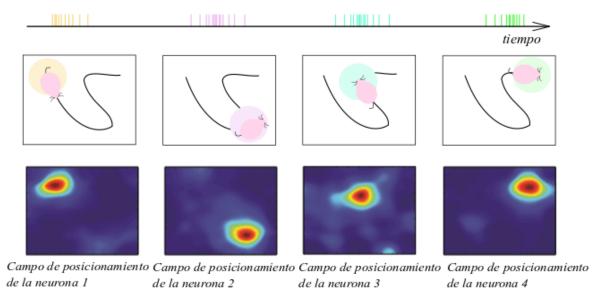


Figura 3: Mapa de calor. Republicado con autorización de la American Mathematical Society a partir de un trabajo de Curto [3, figure 2]; permiso obtenido a través de Copyright Clearence Center, Inc. Figura no sujeta a licencia Creative Commons.

Supongamos que un ratón comienza a explorar su entorno desde la esquina superior izquierda. En ese momento se activa la neurona de posicionamiento 1, cuya actividad se refleja como en la barra superior de la imagen. A medida que el animal avanza se activará el resto de neuronas monitorizadas. La parte inferior de la imagen representa un mapa de calor de la concentración de actividad neuronal en cada campo de posicionamiento. Las áreas rojas reflejan un alto ratio de impulsos eléctricos, mientras que las azules denotan actividad nula (véase el artículo de Giusti *et al.* [5]).

Los estudios sobre las neuronas de posicionamiento se abordan fundamentalmente desde dos perspectivas. Por un lado, la *teoría de la red neuronal* se centra en entender cómo la actividad de las neuronas depende de las propiedades de la red. Sin embargo, en este trabajo nos centraremos en la *teoría del código neuronal*, que presta atención a las relaciones entre la actividad neuronal y los estímulos externos.

Como nos muestra la figura 3, una vez calculados los campos de posicionamiento de las neuronas de posicionamiento del animal, basta ver cuál de estas células se activa para conocer su posición en su entorno físico. Por consiguiente, la idea principal de la investigación que se aborda desde esta perspectiva es que las neuronas de posicionamiento disparan impulsos eléctricos en diferentes lugares del ambiente de tal forma que el entorno entero se representa por la actividad del conjunto de neuronas.

Partiendo de los conceptos de neuronas de posicionamiento y campos de posicionamiento, veremos que se puede inferir información sobre la topología del espacio donde se mueve el ratón.

4. Código neuronal

Los campos de posicionamiento pueden interpretarse como un recubrimiento abierto del entorno físico considerado, donde cada abierto corresponde al lugar donde se activa una neurona.

Ejemplo 2. Consideremos cuatro neuronas monitorizadas cuyos campos de posicionamiento son los de la figura 4. $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = U_2$ representa el lugar donde se activan la neurona 1, 2 y 3 a la vez, hecho que se puede representar con la cadena 1110, conocida como palabra de un código neuronal (colección de cadenas formadas por ceros y unos). En este caso, las palabras están formadas por cuatro dígitos, dado que estamos considerando cuatro neuronas, donde el 1 significa que la neurona está activa y el 0 que está en estado de reposo.

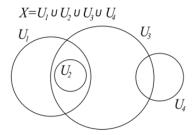


Figura 4: Campos de posicionamiento de cuatro neuronas.

Para simplificar en ciertas ocasiones la notación, es interesante considerar una representación alternativa para las palabras de un código \mathcal{C} . Así, definimos el **soporte** de una palabra $c = a_1 \cdots a_n \in \mathcal{C}$ como

$$supp(c) = \{i \in \{1, ..., n\} \mid a_i = 1\} \subset \{1, ..., n\},\$$

donde n representa el número de neuronas monitorizadas.

Para la palabra 1110 tenemos que supp $(1110) = \{1, 2, 3\}$. Obsérvese que supp $(00 \cdots 0) = \emptyset$.

Por tanto, para referirnos a las palabras de un código neuronal, podemos utilizar indistintamente cadenas de unos y ceros o subconjuntos de $\{1, ..., n\}$.

Sin embargo, para formar un código neuronal a partir de una colección de abiertos, no consideraremos todas las posibles palabras, sino aquellas que representen una intersección de abiertos no cubierta por el resto, como muestra la siguiente definición.

Definición 3. Sea X un espacio topológico y consideremos una colección de abiertos $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ de X. El **código de** \mathcal{U} se define por

$$\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \Big\{ \sigma \subset \{1, \dots, n\} \; \Big| \; \bigcap_{i \in \sigma} U_i - \Big(\bigcup_{j \in \{1, \dots, n\} - \sigma} U_j\Big) \neq \emptyset \Big\}.$$

Nota 4. Para facilitar la lectura, utilizaremos la notación $U_{\sigma} = \bigcap_{i \in \sigma} U_i$.

Cada palabra $\sigma \in \mathcal{C}(\mathcal{U})$ corresponde a una intersección de abiertos no cubierta por el resto. Nótese que $U_{\emptyset} = \bigcap_{i \in \emptyset} U_i = X$, por lo que \emptyset estará en el código cuando la colección \mathcal{U} no recubra el espacio en su totalidad. Por otro lado, como el número de neuronas a estudiar es finito, las colecciones de abiertos que consideraremos también lo serán.

Observemos en la figura 5 que la palabra 0100 no está incluida en el código. Esto es debido a que el abierto U_2 está contenido en U_1 y U_3 , y esta palabra no estaría reflejando que en esa porción del espacio también se activan las neuronas 1 y 3.

En definitiva, las intersecciones cubiertas por uniones de otros abiertos no reflejan toda la información sobre la relación de activación entre las neuronas.

Por otro lado, podríamos pensar en un código, no necesariamente asociado a un recubrimiento, de la siguiente manera.

TEMat, 5 (2021) e-issn: 2530-9633 47

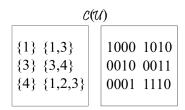


Figura 5: Las dos representaciones del código de la colección de abiertos de la figura 4.

Definición 5. Se conoce como **código neuronal**, o simplemente **código**, a toda colección de cadenas binarias $\mathcal{C} \subset \{0,1\}^n$. Cada elemento de \mathcal{C} se denomina **palabra**.

Hemos visto que toda colección de abiertos de un espacio topológico define un código neuronal. Es natural plantearse si todo código neuronal puede ser asociado a una colección de abiertos en algún espacio real *d*-dimensional. El siguiente resultado da respuesta a esta pregunta.

Proposición 6. Sea $\mathcal{C} \subset \{0,1\}^n$ un código neuronal. Para todo $d \ge 1$ existirá una colección \mathcal{U} de abiertos en \mathbb{R}^d tal que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$.

Demostración. En primer lugar, ordenamos los elementos de \mathcal{C} como $\{c_1,\ldots,c_m\}$. Como \mathbb{R}^d es un espacio de Hausdorff¹, para cada $c_k \in \mathcal{C}$ existe un punto distinto $x_k \in \mathbb{R}^d$ y un entorno abierto N_k de x_k , de forma que ningún par de conjuntos N_k se intersequen. Definimos, para cada $j \in \{1,\ldots,n\}$,

$$U_j = \bigcup_{k \in A_j} N_k$$
, donde $A_j = \{k \in \{1, \dots, m\} \mid j \in \text{supp}(c_k)\},$

y tomamos $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$. Por construcción, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$.

Visualicemos la anterior demostración con un ejemplo en R.

Ejemplo 7. Tomamos el código $\mathcal{C} = \{000, 010, 110, 101\} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, asociado a tres neuronas. Elegimos el abierto $N_i = (i - 3/2, i - 1/2)$ para la palabra c_i , como en la figura 6, con i = 1, ..., 4.

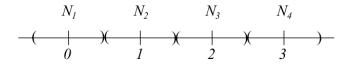


Figura 6: Abiertos en la recta real.

Tenemos que supp $(c_1) = \emptyset$, supp $(c_2) = \{2\}$, supp $(c_3) = \{1, 2\}$ y supp $(c_4) = \{1, 3\}$, luego $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$, con $U_1 = N_3 \cup N_4$, $U_2 = N_2 \cup N_3$ y $U_3 = N_4$, como se muestra en la figura 7.

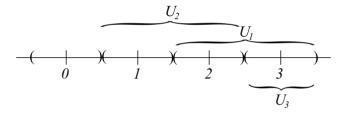


Figura 7: Colección de abiertos resultado de uniones de los abiertos anteriores.

¹Un espacio de Hausdorff es un espacio topológico en el que puntos distintos tienen entornos disjuntos.

Calculamos su código:

$$\sigma = \{1\} \to U_1 - (U_2 \cup U_3) = \emptyset, \qquad \sigma = \{1, 3\} \to U_{\{1,3\}} - U_2 \neq \emptyset,
\sigma = \{2\} \to U_2 - (U_1 \cup U_3) \neq \emptyset, \qquad \sigma = \{2, 3\} \to U_{\{2,3\}} - U_1 = \emptyset,
\sigma = \{3\} \to U_3 - (U_1 \cup U_2) = \emptyset, \qquad \sigma = \{1, 2, 3\} \to U_{\{1,2,3\}} = \emptyset,
\sigma = \{1, 2\} \to U_{\{1,2\}} - U_3 \neq \emptyset, \qquad \sigma = \emptyset \to U_{\emptyset} - U_{\{1,2,3\}} \neq \emptyset.$$

Y obtenemos que $\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\} = \{000, 010, 110, 101\} = \mathcal{C}.$

Cabe puntualizar que hemos obtenido una colección de abiertos en \mathbb{R} , pero puede ser generalizado para dimensiones superiores.

5. Complejos simpliciales asociados a un código

Comenzaremos la sección introduciendo las nociones de complejo simplicial y complejo simplicial abstracto, y veremos cómo asociarlas a los códigos neuronales (se recomienda consultar el libro de Munkres [8]). Consideraremos únicamente complejos simpliciales finitos, dado que, como comentamos previamente, el número de neuronas monitorizadas es siempre finito.

Los complejos simpliciales finitos son espacios topológicos construidos utilizando estructuras más sencillas, los *símplices*.

Será necesario introducir previamente la idea de conjunto de puntos geométricamente independiente.

Definición 8. Diremos que un conjunto de puntos $\{a_0, \dots, a_n\}$ de \mathbb{R}^N es **geométricamente independiente** si los vectores $\{\overline{a_0a_1}, \dots, \overline{a_0a_n}\}$ son linealmente independientes.

Así, se define la noción de símplice como sigue.

Definición 9. Sea $\{a_0, \dots, a_n\}$ un conjunto de puntos geométricamente independiente de \mathbb{R}^N . Un *n***-símplice** σ generado por a_0, \dots, a_n , que denotaremos por $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$, consiste en el conjunto de todos los puntos x de \mathbb{R}^N de la forma

$$x = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i$$
, donde $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$ y $t_i \ge 0$ para todo i .

Como podemos apreciar en la figura 8, un 0-símplice es un punto; un 1-símplice, un segmento; un 2-símplice, un triángulo, y un 3-símplice, un tetraedro en \mathbb{R}^3 .

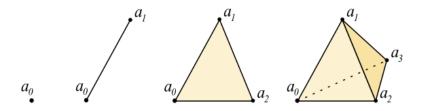


Figura 8: Símplices con hasta cuatro vértices.

Los n+1 puntos a_0, \ldots, a_n que generan el símplice σ se denominan *vértices*, y n es la *dimensión* de σ . Cualquier símplice generado por un subconjunto de $\{a_0, \ldots, a_n\}$ se denomina *cara* de σ .

Definición 10. Llamaremos **complejo simplicial** K en \mathbb{R}^N a una colección finita de símplices en \mathbb{R}^N tal que:

- 1. Cada cara de un símplice de *K* es también un símplice de *K*.
- 2. La intersección de cualquier par de símplices de *K* da como resultado una cara de ambos o el conjunto vacío.

Ejemplo 11. Para la figura 9 tenemos el complejo simplicial K formado por el 2-símplice $\langle a_0, a_1, a_2 \rangle$, el 1-símplice $\langle a_2, a_3 \rangle$, el 2-símplice $\langle a_3, a_4, a_5 \rangle$ y todas sus caras.

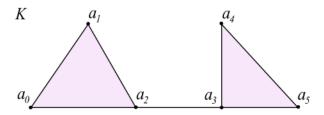


Figura 9: Complejo simplicial K.

Definición 12. Se llama **espacio subyacente** o **poliedro** de K, y se denota por |K|, a la unión de los símplices de K como subconjunto de \mathbb{R}^N , con N suficientemente grande, dotado de la topología inducida por la usual en \mathbb{R}^N .

El concepto de complejo simplicial abstracto que introduciremos a continuación será el principal nexo de unión entre las matemáticas y los estudios en el campo de la neurociencia que tratamos en este trabajo.

Definición 13. Llamamos **complejo simplicial abstracto** a una colección S de conjuntos finitos no vacíos verificando que, si A es un elemento de S, entonces también lo es cada subconjunto no vacío de A.

Cada elemento A de $\mathcal S$ se llamará símplice de $\mathcal S$, y su dimensión es su cardinal menos uno. Cada subconjunto no vacío de A se denominará cara de A. La dimensión de $\mathcal S$ es la mayor de las dimensiones de sus símplices, y el conjunto de vértices V de $\mathcal S$ es la unión de todos los 0-símplices de $\mathcal S$.

Definición 14. Sea K un complejo simplicial y $V = \{a_0, \ldots, a_n\}$ su conjunto de vértices. Se llama **esquema de vértices** de K a la colección $\mathcal K$ de todos los subconjuntos $\{a_{i_0}, \ldots, a_{i_k}\}$ de V tales que los vértices a_{i_0}, \ldots, a_{i_k} generan un símplice de K.

Definición 15. Llamamos **realización geométrica** de un complejo simplicial abstracto S a un complejo simplicial K satisfaciendo que existe una biyección entre el esquema de vértices de K y S.

A continuación, veamos cómo asociar un complejo simplicial abstracto a un código neuronal.

Definición 16. Sea $\mathcal{C} \subset \{0,1\}^n$ un código neuronal. Se llama **complejo simplicial del código** \mathcal{C} , denotado por $\Delta(\mathcal{C})$, al complejo simplicial abstracto más pequeño con conjunto de vértices $\{1, \dots, n\}$ que contiene al soporte de todas las palabras de \mathcal{C} . Las palabras correspondiendo a las caras de $\Delta(\mathcal{C})$ de dimensión máxima se dirán **maximales.**

Por la definición de complejo simplicial abstracto, los subconjuntos de los soportes de todas las palabras de $\mathcal C$ deben pertenecer a $\Delta(\mathcal C)$. Por tanto,

$$\Delta(\mathcal{C}) = \{ \sigma \subset \{1, \dots, n\} \mid \sigma \neq \emptyset \text{ y } \sigma \subset \text{supp}(c) \text{ para algún } c \in \mathcal{C} \}.$$

Nota 17. Obsérvese que de ahora en adelante se denotarán de la misma manera los complejos simpliciales abstractos y sus realizaciones geométricas. Con el fin de visualizar mejor lo que se expondrá en las siguientes secciones, el lector puede pensar los complejos simpliciales abstractos como sus realizaciones geométricas.

Ejemplo 18. A continuación, retomando el código de la figura 5, veamos una realización geométrica del complejo simplicial abstracto asociado al mismo.

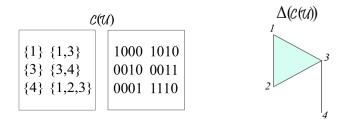


Figura 10: Código y realización geométrica del complejo simplicial abstracto que genera.

De la palabra 1110, cuyo soporte es $\{1, 2, 3\}$, se obtiene el 2-símplice de vértices 1, 2 y 3, y al tratarse del menor complejo simplicial abstracto que lo contiene, consideramos también todas sus caras. Esto explica que en $\Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U}))$ consideremos el símplice $\{1, 2\}$ aunque la palabra 1100 no esté en el código.

6. Nervio y lema del nervio

Comenzaremos esta sección introduciendo la noción de nervio de un recubrimiento abierto, otra herramienta para modelizar la información espacial que codifican las neuronas de posicionamiento. Seguidamente, veremos la relación entre el nervio de un recubrimiento finito \mathcal{U} y el complejo simplicial del código del recubrimiento. El resultado principal es el lema del nervio, que relaciona la estructura del nervio de un recubrimiento finito con la estructura topológica del espacio recubierto, mediante lo que definiremos como equivalencia homotópica.

Definición 19. Llamamos nervio de un recubrimiento finito de abiertos $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ de un espacio topológico X al conjunto

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \Big\{ \sigma \subset \{1, \dots, n\} \ \Big| \ \sigma \neq \emptyset \ \mathbf{y} \ \bigcap_{i \in \sigma} U_i \neq \emptyset \Big\}.$$

El nervio de un recubrimiento finito es un complejo simplicial abstracto, cuyos símplices están formados por los índices de los abiertos con intersección no vacía.

Ejemplo 20. Si retomamos el ejemplo que se ha ido presentando a lo largo del trabajo, se tiene que una realización geométrica del nervio del recubrimiento finito que mostramos de nuevo es la que se aprecia en la figura 11.

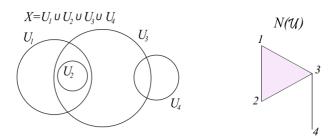


Figura 11: Recubrimiento finito de abiertos de un espacio topológico X y nervio asociado.

Una intersección no vacía de dos abiertos, como $U_3 \cap U_4$, se traduce en el símplice $\{3,4\}$, mientras que una intersección no vacía de tres abiertos, como $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ genera el 2-símplice $\{1,2,3\}$. U_2 y U_4 no tienen intersección, por lo que no hay ningún símplice de vértices $\{2,4\}$.

El lector, al observar las figuras 10 y 11, se habrá podido percatar de que el nervio $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ del recubrimiento y el complejo simplicial $\Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U}))$ asociado al código coinciden. En efecto, esto es cierto en general.

TEMat, 5 (2021) e-issn: 2530-9633 51

Proposición 21. Sea \mathcal{U} un recubrimiento finito de un espacio topológico. Entonces, $\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U}))$.

Demostración. Por definición, está claro que toda palabra del código pertenece al nervio, por lo que deducimos que $\mathcal{C}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{U})$. Entonces, $\Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U})) \subset \mathcal{N}(\mathcal{U})$, ya que vimos que el nervio es un complejo simplicial abstracto y $\Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U}))$ se define como el complejo simplicial abstracto más pequeño que contiene al código.

Por otro lado, toda palabra $\sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$ tiene una palabra maximal $\omega \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$ tal que $\sigma \subset \omega$. Entonces, $\bigcap_{i \in \omega} U_i \neq \emptyset$ y, para todo $\tau \not\subset \omega$, $\bigcap_{j \in \tau \cup \omega} U_j = \emptyset$ (en otro caso, ω no sería maximal). Por tanto, deducimos que $\bigcap_{i \in \omega} U_i - \bigcup_{j \notin \omega} U_j = \bigcap_{i \in \omega} U_i \neq \emptyset$, es decir, $\omega \in \mathcal{C}(\mathcal{U})$.

Por otra parte, cabe añadir que el nervio, bajo determinadas condiciones, refleja la topología del espacio. Veamos previamente un ejemplo que ilustra esta situación.

Ejemplo 22. La figura 12 representa dos recubrimientos finitos diferentes de un anillo. En el primero tenemos tres abiertos cuyas intersecciones son contráctiles. En el segundo caso, tenemos un recubrimiento formado por dos abiertos cuya intersección no es contráctil. Asimismo, en el primer caso, el nervio del recubrimiento refleja la topología del espacio recubierto, lo que no ocurre con el nervio del segundo recubrimiento del anillo.

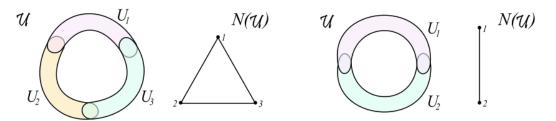


Figura 12: Buenos y malos recubrimientos.

Definición 23. Para un espacio topológico X, un recubrimiento finito abierto $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ es un **buen recubrimiento** si toda intersección no vacía de abiertos de \mathcal{U} es contráctil.

Nota 24. Intuitivamente, un espacio contráctil es aquel que puede ser reducido de forma continua a un punto dentro de ese mismo espacio. Tras estudiar los conceptos que siguen, conoceremos la definición matemática de esta idea, que se recoge en la definición 27.

El siguiente concepto topológico nos permite introducir cuándo dos espacios se pueden deformar continuamente uno en el otro, en cuyo caso diremos que los espacios son *homotópicamente equivalentes*.

Definición 25. Dos aplicaciones continuas $f, g: X \to Y$ se dicen **homótopas** si existe una aplicación continua $F: X \times [0, 1] \to Y$ tal que F(x, 0) = f(x) y F(x, 1) = g(x), para todo $x \in X$. Se denota por $F: f \simeq g$, y la aplicación F se denomina **homotopía** entre f y g.

Definición 26. Se dice que dos espacios X e Y son **homotópicamente equivalentes**, y lo denotaremos $X \simeq Y$, si existen aplicaciones continuas $f: X \to Y$ y $g: Y \to X$ tales que $g \circ f \simeq \operatorname{id}_X: X \to X$ y $f \circ g \simeq \operatorname{id}_Y: Y \to Y$.

Definición 27. Un espacio topológico *X* se dice **contráctil** si la aplicación identidad sobre *X* es homótopa a una aplicación constante.

A continuación, presentaremos el resultado que muestra lo que ya anunciábamos previamente: para buenos recubrimientos finitos, el nervio proporciona información de la topología del espacio.

Teorema 28 (lema del nervio). *Sea* \mathcal{U} *un buen recubrimiento finito de un espacio topológico* X. *Entonces, el poliedro* $|\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ *asociado al nervio de* \mathcal{U} *es homotópicamente equivalente a* X.

Se puede consultar la demostración de este resultado en el libro de Kozlov [7].

El lema del nervio establece, en otras palabras, que el nervio codifica la percepción del espacio. Para comprender por qué nos resulta realmente práctico este resultado, supongamos que hemos monitorizado las neuronas de posicionamiento de un roedor que se mueve por un espacio X cuya forma no conocemos. Según el lema del nervio, no necesitamos mirar directamente al espacio X para saber su forma (por ejemplo, para ver si tiene agujeros), pues el poliedro del nervio (o, equivalentemente, el poliedro del complejo simplicial del código) del recubrimiento finito que definen las neuronas con sus campos de posicionamiento (siempre y cuando sea un buen recubrimiento) ya proporciona esa información.

$$\begin{array}{c}
\mathcal{U} \setminus \\
\downarrow & \mathcal{C}(\mathcal{U}) \\
\downarrow & \downarrow \\
\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U}))
\end{array}$$

Por otro lado, se nos podría plantear lo siguiente: si los campos de posicionamiento de nuestras neuronas monitorizadas definen un buen recubrimiento $\mathcal U$ del espacio y tenemos un camino directo para estudiar la forma topológica del lugar (que es considerar directamente $\mathcal N(\mathcal U)$ y aplicar el lema del nervio), ¿por qué resulta de interés estudiar el código $\mathcal C(\mathcal U)$? La respuesta se apoya en que determinadas investigaciones demuestran que el código captura información que el nervio pierde, como, por ejemplo, la relación de contenido entre los abiertos del recubrimiento [4]. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 29. La figura 13a muestra una colección $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}$ de conjuntos convexos abiertos en \mathbb{R}^N .

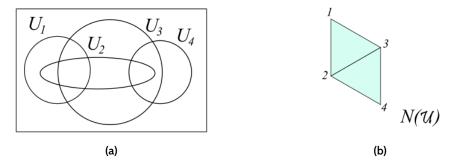


Figura 13: Colección de conjuntos convexos abiertos en \mathbb{R}^N y realización geométrica del nervio de la misma.

Se tiene que

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U}) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

Y, además,

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

 $\{1,2,3\}$ y $\{2,3,4\}$ corresponden a las palabras maximales. El nervio (realización geométrica en la figura 13b), como comentábamos, pierde información acerca de las relaciones de contenidos de los abiertos U_i de \mathcal{U} , pero esta información sí la recoge el código. Por ejemplo, el hecho de que $U_2 \subset U_1 \cup U_3$ se refleja en \mathcal{C} , dado que cualquier palabra que contenga un 2 contiene también un 1 o un 3.

7. Códigos convexos

Se ha observado experimentalmente que los campos de posicionamiento son esencialmente convexos [5] (véase la figura 3), entendiéndolos como campos de posicionamiento en \mathbb{R}^N . Es decir, que dado cualquier par de puntos del conjunto, el segmento que los une está incluido en él. Esto motiva que pongamos énfasis

en estudiar los llamados códigos convexos, que no son otra cosa que códigos asociados a una colección de abiertos convexos. En caso de que esta familia de abiertos determine un recubrimiento, está claro que sería un buen recubrimiento, dado que toda intersección de convexos es convexa y, por tanto, contráctil.

Para facilitar la labor de determinar si un código es o no convexo, utilizaremos como herramienta las relaciones, que se definen en el artículo de Curto *et al.* [4] como sigue.

Definición 30. Dado $\mathcal{C}(\mathcal{U})$, se define una **relación** como el par (σ, τ) , con $\sigma, \tau \in \{1, ..., n\}$, tal que $\bigcap_{i \in \sigma} U_i \subset \bigcup_{j \in \tau} U_j$, donde $\sigma \neq \emptyset$, $\sigma \cap \tau = \emptyset$ y $\bigcap_{i \in \sigma \cup \{j\}} U_i \neq \emptyset$ para todo $j \in \tau$.

Ejemplo 31. Para nuestro recubrimiento, el conjunto de relaciones es

$$\{(\{1,4\},\varnothing), (\{1,2,4\},\varnothing), (\{1,3,4\},\varnothing), (\{2,3,4\},\varnothing), (\{1,2,3,4\},\varnothing), \\ (\{2\},\{1\}), (\{2\},\{3\}), (\{2\},\{1,3\}), (\{1,2\},\{3\}), (\{2,3\},\{1\})\}.$$

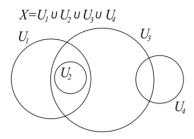


Figura 14: Recubrimiento finito de abiertos de un espacio topológico *X*.

A modo de ejemplo, el par ($\{1,2\}$, $\{3\}$) es una relación dado que $U_1 \cap U_2 = U_2$ está contenido en U_3 y $U_1 \cap U_2 \cap U_3 \neq \emptyset$.

Las obstrucciones locales a la convexidad son la condición que impide a un código ser convexo. Para caracterizarlas, usamos los pares definidos anteriormente y razonamos de la siguiente manera.

Supongamos que partimos de un recubrimiento finito donde todos los abiertos U_j son convexos. Si (σ, τ) es una relación asociada al recubrimiento, por el lema del nervio, el nervio asociado al recubrimiento de $\bigcap_{i \in \sigma} U_i$, que se denota $\mathcal{N}(\{\bigcap_{i \in \sigma \cup \{j\}} U_i\}_{j \in \tau})$, debe tener el mismo tipo de homotopía que $\bigcap_{i \in \sigma} U_i$, luego debe ser contráctil. Así, si $\mathcal{N}(\{\bigcap_{i \in \sigma \cup \{j\}} U_i\}_{j \in \tau})$ resulta no ser contráctil, concluimos que algunos U_j no son convexos.

Esto da pie a definir el concepto de obstrucción local a la convexidad de un código como sigue.

Definición 32. Una relación (σ, τ) es una obstrucción local de \mathcal{C} si $\tau \neq \emptyset$ y $\mathcal{N}(\{\bigcap_{i \in \sigma \cup \{j\}} U_i\}_{j \in \tau})$ no es contráctil.

Por tanto, si \mathcal{C} tiene obstrucciones locales, entonces \mathcal{C} no es un código convexo.

Proposición 33. Si para cada relación (σ, τ) se tiene que $\bigcap_{i \in \sigma \cup \tau} U_i \neq \emptyset$, entonces \mathcal{C} no tiene obstrucciones locales.

Demostración. La condición $\bigcap_{i\in\sigma\cup\tau}U_i\neq\varnothing$ implica que $\mathcal{N}(\{\bigcap_{i\in\sigma\cup\{j\}}U_i\}_{j\in\tau})$ es el símplice completo con conjunto de vértices τ , que es contráctil. Si esto se cumple para toda relación del código, entonces ninguna puede dar lugar a una obstrucción local.

Cabe comentar que la ausencia de obstrucciones locales a la convexidad del código no garantiza que el código sea convexo. Sin embargo, conocer de antemano que no se pueden encontrar obstrucciones locales a la convexidad es de utilidad para evitar buscar este tipo de obstrucciones.

8. Conclusión

En la actualidad, la experimentación en neurociencia está presenciando un periodo de rápido progreso y expansión, generando un gran volumen de nuevos datos que pueden comprenderse mejor con la introducción de técnicas y herramientas matemáticas. En particular, a lo largo de la última década, se han estado implementando cada vez más los métodos topológicos.

Con este trabajo se ha pretendido mostrar que la topología puede desempeñar un papel relevante en el desarrollo de la neurociencia.

Hemos comprobado que, a medida que un individuo camina a través de un entorno, la actividad de sus neuronas define los campos de posicionamiento. Estos, que pueden entenderse como un recubrimiento finito $\mathcal U$ de un espacio topológico X, además, generan un código neuronal $\mathcal C(\mathcal U)$. A su vez, hemos visto que a todo código $\mathcal C$ se le puede asociar una colección de abiertos en $\mathbb R^d$, con $d \geq 1$, de forma que $\mathcal C = \mathcal C(\mathcal U)$. A partir de estos códigos, se puede definir un complejo simplicial abstracto, $\Delta(\mathcal C(\mathcal U))$, que coincidirá con el nervio asociado al recubrimiento finito $\mathcal U$, $\mathcal N(\mathcal U)$. El resultado principal del artículo, el lema del nervio, afirma que si $\mathcal U$ constituye lo que llamamos un buen recubrimiento finito de X, la forma del espacio se puede conocer estudiando las propiedades del elemento matemático $\mathcal N(\mathcal U)$. Además de ello, hemos prestado atención a estudiar si los códigos son códigos convexos, afirmación que se puede descartar si se identifica la presencia de obstrucciones locales a la convexidad.

Referencias

- [1] BLAUSEN.COM. «Medical gallery of Blausen Medical 2014». En: WikiJournal of Medicine 1.2 (2014). ISSN: 2002-4436. https://doi.org/10.15347/WJM/2014.010.
- [2] Brown, Emery N.; Frank, Loren M.; Tang, Dengda; Quirk, Michael C., y Wilson, Matthew A. «A Statistical Paradigm for Neural Spike Train Decoding Applied to Position Prediction from Ensemble Firing Patterns of Rat Hippocampal Place Cells». En: *Journal of Neuroscience* 18.18 (1998), págs. 7411-7425. ISSN: 0270-6474. https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.18-18-07411.1998.
- [3] Curto, Carina. «What can topology tell us about the neural code?» En: *American Mathematical Society. Bulletin. New Series* 54.1 (2017), págs. 63-78. ISSN: 0273-0979. https://doi.org/10.1090/bull/1554.
- [4] Curto, Carina; Gross, Elizabeth; Jeffries, Jack; Morrison, Katherine; Omar, Mohamed; Rosen, Zvi; Shiu, Anne, y Youngs, Nora. «What makes a neural code convex?» En: SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry 1.1 (2017), págs. 222-238. https://doi.org/10.1137/16M1073170.
- [5] GIUSTI, Chad; PASTALKOVA, Eva; CURTO, Carina, y ITSKOV, Vladimir. «Clique topology reveals intrinsic geometric structure in neural correlations». En: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 112.44 (2015), págs. 13455-13460. ISSN: 0027-8424. https://doi.org/10.1073/pnas.1506407112.
- [6] Hubel, David H. y Wiesel, Torsten N. «Receptive fields of single neurones in the cat's striate cortex». En: *The Journal of Physiology* 148.3 (1959), págs. 574-591. https://doi.org/10.1113/jphysiol. 1959.sp006308.
- [7] Kozlov, Dmitry. *Combinatorial algebraic topology*. Vol. 21. Algorithms and Computation in Mathematics. Berlín: Springer, 2008. https://doi.org/10.1007/978-3-540-71962-5.
- [8] MUNKRES, James R. *Elements of algebraic topology*. Menlo Park: Addison-Wesley Publishing Company, 1984. ISBN: 978-0-201-04586-4.
- [9] O'KEEFE, John y Dostrovsky, Jonathan. «The hippocampus as a spatial map. Preliminary evidence from unit activity in the freely-moving rat». En: *Brain Research* 34.1 (1971), págs. 171-175. ISSN: 0006-8993. https://doi.org/10.1016/0006-8993(71)90358-1.
- [10] RINZEL, John. «Discussion: Electrical excitability of cells, theory and experiment: Review of the Hodgkin-Huxley foundation and an update». En: *Bulletin of Mathematical Biology* 52.1 (1990), págs. 5-23. ISSN: 0092-8240. https://doi.org/10.1016/S0092-8240(05)80003-5.



Buscando el ADN de un espacio de Banach: el problema de Tingley

Alexis Béjar López Facultad de Ciencias Universidad de Granada alexisbjl@correo.ugr.es Resumen: Sabemos que, mediante el ADN, es posible distinguir a dos personas comparando solamente una pequeña parte de ellas. Trasladando este hecho a los espacios de Banach y entendiendo que dos de estos espacios son idénticos cuando entre ellos existe un isomorfismo isométrico (isometría lineal y sobreyectiva), al preguntar dónde está contenido el ADN de un espacio de Banach, nos estamos refiriendo a qué porción necesitamos conocer de un espacio de Banach para poder distinguirlo de otro. Tras varios avances, el punto en el que se encuentra esta pregunta actualmente es en el de tratar de averiguar si el ADN de un espacio de Banach está contenido en su esfera unidad, dando lugar al conocido como problema de Tingley. Este artículo se centra fundamentalmente en recoger algunas de las respuestas afirmativas que admite este problema cuando se plantea entre ciertos espacios de Banach conocidos.

Abstract: We know that, through DNA, it is possible to distinguish two people by comparing only a small part of them. Transferring this fact to Banach spaces and understanding that two of these spaces are identical when there is an isometric isomorphism between them (linear and surjective isometry), when we ask where the DNA of a Banach space is contained, we are referring to what portion we need to know about a Banach space to distinguish it from another. After several advances, the current state of the question is trying to find out whether the DNA of a Banach space is contained in its unity sphere, giving rise to what is known as Tingley's problem. This article focuses primarily on collecting some of the affirmative answers that this problem admits when it arises between certain known Banach spaces.

Palabras clave: espacio de Banach, homeomorfismo, isometría, isomorfismo isométrico, problema de Tingley.

MSC2010: 46B03.

Recibido: 3 de noviembre de 2019. Aceptado: 24 de julio de 2020.

Agradecimientos: Agradezco a mi familia, especialmente a mis padres (Paco e Isabel) y a mi abuela (Paqui), por apoyarme y enseñarme incluso más de lo que saben. Muestro mi agradecimiento a mis amigos de siempre, sobre todo a Alex y Álvaro, con los que he compartido unos años de maravillosa convivencia. No puedo olvidarme tampoco de las grandes personas que las matemáticas me han dado hasta ahora y que se han convertido en mis amigos para siempre: Antoñín, Belén, Elías, Melli, Roque A. y Tony.

Este artículo ha sido realizado durante el disfrute de una Beca de Iniciación a la Investigación del plan Propio de la Universidad de Granada (Año 2018) bajo la supervisión del profesor Antonio Peralta, al que agradezco enormemente su ayuda para realizar el TFG del que se nutre este artículo.

Referencia: Béjar López, Alexis. «Buscando el ADN de un espacio de Banach: el problema de Tingley». En: *TEMat*, 5 (2021), págs. 57-68. ISSN: 2530-9633. URL: https://temat.es/articulo/2021-p57.

1. Introducción

Es sabido que dos espacios vectoriales son idénticos cuando entre ellos existe una biyección lineal, y que lo mismo ocurre en el caso de espacios métricos cuando tenemos una isometría (aplicación que conserva distancias) sobreyectiva entre dos de ellos. Como es cierto que toda aplicación que preserva distancias es inyectiva, sería suficiente con tener una isometría sobreyectiva y lineal (en adelante isomorfismo isométrico) entre dos espacios normados, que son espacios vectoriales y también métricos con la distancia heredada de la norma, para afirmar que uno es una copia del otro. Pero, ¿es esto necesario? Es decir, ¿realmente necesitamos definir un isomorfismo isométrico entre la totalidad de dos espacios normados para afirmar que son idénticos? O, por el contrario, ¿basta con que exista una identificación de este tipo entre dos porciones de ambos espacios?

El primer avance en esta dirección fue conseguido por Mazur y Ulam, y queda recogido en el siguiente resultado cuya demostración original puede encontrarse en su artículo [15].

Teorema 1 (Mazur-Ulam,1932). Sean E y F dos espacios normados reales y Δ : $E \to F$ una isometría sobreyectiva. Entonces, Δ es afín, es decir, existen una aplicación lineal T y un vector $y \in F$ tales que $\Delta(x) = T(x) + y$ para todo $x \in E$.

Obsérvese la necesidad de la hipótesis de que los espacios vectoriales sean reales en este resultado, puesto que, por ejemplo, la aplicación de $\mathbb C$ en $\mathbb C$ que a cada elemento le asocia su conjugado es una isometría sobreyectiva y no es $\mathbb C$ -lineal, ya que $\overline{i} \neq i$. Por esta razón, todos los espacios normados que vamos a tratar en este artículo deben entenderse como espacios normados reales.

Como consecuencia de este teorema obtenemos que, para averiguar si dos espacios normados son idénticos, podemos «olvidarnos» de que son espacios vectoriales y tratar de estudiar si son idénticos como espacios métricos, ya que la aplicación $T = \Delta - y$ vista en el teorema es un isomorfismo isométrico. De esta forma, ahora podemos afirmar que toda la información de un espacio normado, es decir, todo lo que necesitamos conocer de un espacio normado para poder distinguirlo de otro, está contenida en su estructura de espacio métrico.

Varias décadas después, P. Mankiewicz [14] demostró el siguiente teorema, que supone una generalización del resultado de Mazur y Ulam. Para entender por completo este teorema de Manckiewicz es necesario recordar que un subconjunto A de un espacio vectorial se dice convexo si, para cualquier par de puntos de A, el segmento que los une se queda contenido en A.

Teorema 2 (Mankiewicz,1972). Sean E y F dos espacios normados y Δ : $A \rightarrow B$ una isometría sobreyectiva entre dos subconjuntos convexos de E y F. Entonces, existe una isometría afín T: $E \rightarrow F$ tal que $T_{|A} = \Delta$.

A partir de este resultado obtenemos de manera sencilla este corolario.

Corolario 3. Si E y F son dos espacios normados y Δ : $B_E \to B_F$ es una isometría sobreyectiva entre sus bolas unidad cerradas, entonces Δ es la restricción de un isomorfismo isométrico entre E y F.

Demostración. Comencemos notando que la bola unidad de un espacio normado es un conjunto convexo y, por el teorema 2, tenemos que Δ es la restricción de una isometría afín $T \colon E \to F$.

Para probar que T es lineal, basta ver que $\Delta(0) = 0$. Dado $y \in B_F$, como Δ es sobreyectiva, existe $x \in B_E$ tal que $\Delta(x) = y$. Por tanto, utilizando que Δ es una isometría, obtenemos que

$$\|\Delta(0) - y\| = \|\Delta(0) - \Delta(x)\| = \|0 - x\| \le 1,$$

para todo $y \in B_F$. Puesto que en cualquier espacio normado se verifica que 0 es el único elemento tal que su distancia a cualquier otro elemento de la bola unidad es menor o igual que 1, obtenemos que $\Delta(0) = 0$ y, como consecuencia, T es lineal.

Para acabar la demostración nos resta comprobar que T es sobreyectiva. Para ello, consideramos un elemento arbitrario $y \in F$; si y = 0, entonces T(0) = y, y si $y \neq 0$, entonces $\frac{y}{\|y\|} \in B_F$ y existe $x \in B_E$ tal que $T(x) = \Delta(x) = \frac{y}{\|y\|}$. Finalmente, usando que T es lineal, nos queda que $T(\|y\|x) = y$.

Este resultado muestra que ya no necesitamos comparar la totalidad de dos espacios normados (ni siquiera como espacios métricos) para averiguar si son idénticos, sino que nos es suficiente con estudiar si sus bolas unidad cerradas son isométricas.

El siguiente paso fue dado por D. Tingley en 1987 [17], cuando demostró que si E y F son dos espacios normados de dimensión finita (y, por tanto, completos) y Δ : $S(E) \rightarrow S(F)$ es una isometría sobreyectiva entre sus esferas unidad, entonces, para todo $x \in S(E)$, se verifica que $\Delta(-x) = -\Delta(x)$. Debido a esta aportación, el problema que vamos a tratar a continuación es conocido como el **problema de Tingley**:

Problema (problema de Tingley). Sean E y F dos espacios de Banach y Δ : $S(E) \rightarrow S(F)$ una isometría sobreyectiva entre sus esferas unidad. ¿Podemos asegurar que Δ es la restricción de una isometría sobreyectiva y lineal entre la totalidad de ambos espacios?

Observemos que una respuesta afirmativa a este problema nos proporcionaría un resultado mucho más fuerte que el de Mankiewicz (teorema 2), ya que implicaría que toda la información de un espacio de Banach (siempre visto como espacio vectorial real) está contenida en su esfera unidad, un conjunto que desde un punto de vista topológico es «pequeño», es un cerrado con interior vacío.

Aunque el problema de Tingley supone un activo tema de investigación en el campo del análisis funcional, se trata de un problema abierto incluso en dimensión dos. Sin embargo, sí que se ha podido resolver para algunos espacios de Banach concretos, así que dedicaremos las siguientes páginas a estudiar el problema de Tingley cuando se plantea entre algunos espacios de Banach clásicos. Concretamente, siguiendo las ideas de Ding [6-8] y Wang [19] veremos cómo puede resolverse este problema cuando se plantea entre espacios de Hilbert (sección 2), entre los espacios $\ell_p(I)$ que generalizan a los espacios ℓ_p clásicos (sección 3) y entre espacios $C_0(\Omega)$ (sección 4).

En este artículo solo pretendemos realizar una introducción al problema de Tingley y supone una selección de los resultados más destacados que aparecen en el trabajo de fin de grado de Béjar López [2]. Esta introducción puede ser completada con las referencias que exponemos a continuación.

En primer lugar, para completar la sección 3 puede ser de utilidad el artículo escrito por G. Ding [9]. Allí, se definen los espacios $\ell_{\infty}(I)$ de las funciones acotadas de Ω en \mathbb{R} , que forma un espacio de Banach con la norma del supremo, y se demuestra que toda isometría sobreyectiva entre las esferas unidad dos espacios de este tipo puede ser extendida a una isometría sobreyectiva y lineal entre la totalidad de los espacios.

Una posible continuación para la sección 4 puede encontrarse en el artículo escrito por R. Liu [13]. Allí, entre otros resultados, se prueba que si Ω es un espacio compacto y de Hausdorff, toda isometría sobreyectiva entre la esfera unidad de $C(\Omega)$ (el espacio de Banach de las funciones continuas de Ω en $\mathbb R$ con la norma del máximo) y la de un espacio de Banach E puede ser extendida a una isometría sobreyectiva y lineal entre ambos espacios.

Uno de los resultados más recientes en torno al problema de Tingley es el aportado por el español Cabello Sánchez [3], que demuestra que todo espacio de Banach dos dimensional y no estrictamente convexo verifica la propieda de Mazur-Ulam (véanse las definiciones 4 y 19).

Las que aquí se proponen forman una pequeña parte de la gran variedad de referencias que pueden consultarse para profundizar en el problema de Tingley. Se anima al lector a que, si está interesado en más información, consulte el *survey* donde Yang y Zhao [20] recogen los resultados más destacados en torno al problema de Tingley que se han publicado hasta 2014.

2. Problema de Tingley entre espacios de Hilbert

Uno de los primeros ejemplos que se nos viene a la cabeza al hablar de espacios de Banach y con los que estamos más acostumbrados a trabajar son los espacios de Hilbert. Como veremos en esta sección, en este tipo de espacios es posible resolver un problema más fuerte que el de Tingley y todos los resultados que necesitaremos para ello pueden consultarse en el artículo de Ding [6].

Comencemos introduciendo el concepto de espacio de Hilbert.

Definición 4. Si E es un espacio vectorial, un producto escalar real es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ verificando las siguientes propiedades:

- Simétrica: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ $(x, y \in E)$.
- Lineal en la primera variable: $\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$ $(x, y, z \in E, a, b \in \mathbb{R})$. Por ser simétrica, la linealidad en la primera variable implica también la linealidad en la segunda.
- Definida positiva: $\langle x, x \rangle > 0$, para todo $0 \neq x \in E$.

Diremos que un espacio normado E es un **espacio prehilbertiano** si existe un producto escalar tal que $\|\cdot\|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$, donde $\|\cdot\|$ denota la norma en E.

Un **espacio de Hilbert** no es más que un espacio prehilbertiano completo.

Definición 5. Un espacio normado E satisface la conocida como **regla del paralelogramo** si se verifica que $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$ $(x, y \in E)$.

Es fácil comprobar que todo espacio prehilbertiano verifica la regla del paralelogramo y, tal y como probó M. Day en 1947 [5], la implicación contraria también es cierta. Concretamente, se cumple que, si los elementos de la esfera unidad de un espacio normado satisfacen la regla del paralelogramo, entonces la norma del espacio proviene de un producto escalar.

Para resolver el problema de Tingley entre espacios de Hilbert vamos a estudiar algunas propiedades de los espacios normados estrictamente convexos y de las isometrías sobreyectivas entre sus esferas unidad.

Definición 6. Diremos que un espacio normado E es **estrictamente convexo** si para cualquier par de elementos $x, y \in S(E)$ tales que ||x + y|| = 2 se verifica que x = y.

Observación 7. No es complicado comprobar que todo espacio prehilbertiano es estrictamente convexo. Efectivamente, si E es un espacio prehilbertiano y $x, y \in S(E)$ verifican que ||x + y|| = 2, por la igualdad del paralelogramo concluimos que $||x - y||^2 = 0$ y, por tanto, x = y.

También es cierto que no todo espacio normado es estrictamente convexo. Por ejemplo, en \mathbb{R}^2 con la norma del máximo, $\|(x_1, x_2)\|_{\infty} = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, los pares de puntos x = (1, 0) e y = (1, 1), verifican que $\|x + y\| = 2$ y, sin embargo, $x \neq y$.

Igualmente, si consideramos en \mathbb{R}^2 la norma 1, $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$, tenemos que $\|(1, 0) + (0, 1)\|_1 = 2$ y ambos puntos son distintos.

El siguiente resultado es una extensión de la aportación original de Tingley.

Proposición 8. Si E y F son espacios normados con E estrictamente convexo y Δ : $S(E) \rightarrow S(F)$ verifica que

```
(I) -\Delta(S(E)) \subset \Delta(S(E)) y
```

(II)
$$\|\Delta(x) - \Delta(y)\| \le \|x - y\|$$
 $(x, y \in S(E)),$

entonces Δ es inyectiva y $\Delta(-x) = -\Delta(x)$ para todo $x \in S(E)$.

Además, si E y F son prehilbertianos, se cumple que $\|\Delta(x) - \lambda \Delta(y)\| = \|x - \lambda y\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo par de elementos $x, y \in S(E)$.

Ya podemos enunciar y demostrar el primer teorema sobre el que posteriormente se sustentará la solución del problema de Tingley en espacios de Hilbert.

Teorema 9. Sean E y F dos espacios prehilbertianos y Δ : $S(E) \rightarrow S(F)$ una aplicación satisfaciendo que

```
(I) -\Delta(S(E)) \subset \Delta(S(E)) y
```

(II)
$$\|\Delta(x) - \Delta(y)\| \le \|x - y\|$$
 $(x, y \in S(E))$.

Entonces, existe $T: E \to F$ una isometría homogénea (es decir, $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $x \in E$) que extiende a Δ .

Demostración. Utilizamos, como es habitual, la extensión positivamente homogénea de Δ dada por $T: E \to F$,

$$T(x) = \begin{cases} ||x|| \Delta \left(\frac{x}{||x||}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Utilizando la proposición 8 comprobamos que T es homogénea. Efectivamente,

$$T(\lambda x) = |\lambda| \|x\| \Delta \left(\frac{\lambda x}{|\lambda| \|x\|}\right) = |\lambda| \|x\| \frac{\lambda}{|\lambda|} \Delta \left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \lambda T(x) \quad (0 \neq x \in E, \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Solo nos queda comprobar que T es una isometría. Para tal fin consideramos $0 \neq x, y \in E$ y, de nuevo por la proposición 8, obtenemos que

$$||T(x) - T(y)|| = |||x|| \Delta \left(\frac{x}{||x||}\right) - ||y|| \Delta \left(\frac{y}{||y||}\right)||$$

$$= ||x|| ||\Delta \left(\frac{x}{||x||}\right) - \frac{||y||}{||x||} \Delta \left(\frac{y}{||y||}\right)||$$

$$= ||x|| ||\frac{x}{||x||} - \frac{||y||}{||x||} \frac{y}{||y||}|| = ||x - y||.$$

Si x o y fuese 0, es evidente que ||T(x) - T(y)|| = ||x - y||. Así que T es una isometría.

El siguiente paso consiste en reunir las últimas herramientas necesarias para poder dar una respuesta afirmativa al problema de Tingley en espacios de Hilbert: recordaremos el teorema de extensión equinórmica de Hahn-Banach y el teorema de representación Riesz-Fréchet (teorema 3.3.8 y teorema 6.3.4 del libro de Lax [12], respectivamente) e introduciremos los conceptos de punto suave y funcional soporte.

Recordemos que si E es un espacio normado, el conjunto E^* formado por todas las aplicaciones lineales y continuas de E en \mathbb{R} se llama **espacio dual** de E y es un espacio normado cuando se dota de la conocida como norma de operadores: $||f|| = \sup\{|f(x)| : ||x|| = 1\}$.

Teorema 10 (teorema de representación Riesz-Fréchet). *Sea E un espacio de Hilbert y sea* Ψ : $E \to E^*$ *la aplicación que a cada x* \in *E le hace corresponder el funcional lineal* $\Psi(x)$: $E \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$[\Psi(x)](y) = \langle x, y \rangle \quad (y \in E).$$

Entonces, se verifica que Ψ es una bivección lineal e isométrica de E sobre E^* .

Teorema 11 (extensión equinórmica). Sean E un espacio normado, S un subespacio de E y $f \in S^*$. Entonces, existe $g \in E^*$ con ||f|| = ||g|| y tal que f(y) = g(y) para todo $y \in S$.

Corolario 12. Si E es un espacio normado, para cada $0 \neq x \in E$ existe $f \in E^*$ con ||f|| = 1 y f(x) = ||x||.

Definición 13. Sea E un espacio de Banach y $0 \neq x_0 \in E$. Por el corolario 12, sabemos que existe f, un funcional lineal en la esfera unidad de E^* , tal que $f(x_0) = \|x_0\|$. Diremos que x_0 es un **punto suave** si el conjunto $\{f \in S(E^*) : f(x_0) = \|x_0\|\}$ tiene un único elemento, y dicho elemento será llamado **funcional soporte** en x_0 .

Nos será útil conocer la siguiente propiedad:

Lema 14. Sean $T: E \to F$ una isometría entre dos espacios de Banach con T(0) = 0, $x_0 \in E$ un punto suave $y \in S(F^*)$ tal que $g(T(\lambda x_0)) = \lambda \|x_0\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, $g(T(x)) = f_{x_0}(x)$ para todo $x \in E$, donde f_{x_0} denota el funcional soporte en x_0 .

Ya estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema que, como vamos a ver, ofrece una respuesta positiva a un problema más fuerte que el de Tingley.

Teorema 15. Sean E y F dos espacios de Hilbert y Δ : $S(E) \rightarrow S(F)$ una aplicación satisfaciendo que

- (I) $-\Delta(S(E)) \subset \Delta(S(E)) y$
- (II) $\|\Delta(x) \Delta(y)\| \le \|x y\|$ $(x, y \in S(E))$.

Entonces, Δ puede ser extendida a una isometría lineal entre E y F.

Demostración. El teorema 9 nos garantiza que T, la extensión positivamente homogénea de Δ allí definida, es una isometría homogénea entre E y F. Por tanto, solo nos queda comprobar que T es aditiva.

En primer lugar, dado $x \in S(E)$, tenemos que, por el teorema de Riesz-Fréchet (teorema 10), el cardinal de $\{f \in S(E^*) : f(x) = 1\}$ es el mismo que el cardinal de $\{y \in S(E) : \langle x, y \rangle = 1\}$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, como ||x|| = ||y|| = 1, sabemos que $\langle x, y \rangle = ||x||||y|| = 1$ implica que x = y. Así que el conjunto $\{y \in S(E) : \langle x, y \rangle = 1\}$ tiene un único elemento y x es un punto suave.

Por otro lado, teniendo en cuenta que, de nuevo por el teorema de Riesz-Fréchet, para cualquier $x \in S(E)$ existe $g \in F^*$ tal que $g(y) = \langle y, T(x) \rangle$ para todo $y \in F$, nos queda que

$$g(T(\lambda x)) = \langle T(\lambda x), T(x) \rangle = \langle \lambda T(x), T(x) \rangle = \lambda ||T(x)||^2 = \lambda ||x|| \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Por tanto, utilizando el lema 14, deducimos que

$$g(T(z)) = f_x(z) \quad (z \in E).$$

Esta expresión nos permite concluir que para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ y $x \in S(E)$ se cumple que

$$\langle T(x_1 + x_2), T(x) \rangle = g(T(x_1 + x_2)) = f_x(x_1 + x_2)$$

= $f_x(x_1) + f_x(x_2) = g(T(x_1)) + g(T(x_2))$
= $\langle T(x_1) + T(x_2), T(x) \rangle$.

Esto prueba que

$$\langle T(x_1 + x_2), y \rangle = \langle T(x_1) + T(x_2), y \rangle \quad (y \in \text{Span}\{T(x) : x \in S(E)\}),$$

donde Span $\{T(x): x \in S(E)\}$ denota el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de de la forma T(x) con $x \in S(E)$.

Finalmente, tomando $y = \frac{1}{\|x_1 + x_2\|} (T(x_1) + T(x_2)) - T\Big(\frac{x_1 + x_2}{\|x_1 + x_2\|}\Big) \in \operatorname{Span}\{T(x) : x \in S(E)\}$ y usando que T es homogénea, de la expresión (1) concluimos que $\frac{1}{\|x_1 + x_2\|^2} \|T(x_1 + x_2) - (T(x_1) + T(x_2))\|^2 = 0$ y, por tanto, $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in X$.

De esta forma queda probado que T es una isometría lineal entre E y F.

Esto nos permite probar el siguiente resultado

Corolario 16 (solución al problema de Tingley en espacios de Hilbert). *Sean E y F dos espacios de Hilbert y* $\Delta : S(E) \rightarrow S(F)$ *una aplicación satisfaciendo que*

- (l') Δ es sobreyectiva y
- (II) $\|\Delta(x) \Delta(y)\| \le \|x y\|$ $(x, y \in S(E)).$

Entonces, Δ puede ser extendida a una isometría sobrevectiva y lineal entre E y F.

Demostración. Como Δ es sobreyectiva, se verifica que $\Delta(S(E)) = S(F) = -S(F) = -\Delta(S(E))$. Aplicando el teorema 15, tenemos que la extensión positivamente homogénea de Δ es una isometría lineal entre E y F. Repitiendo el razonamiento realizado en la demostración del corolario 3, comprobamos que dicha extensión es también sobreyectiva.

Observación 17. Como consecuencia de este resultado, además de resolver el problema de Tingley entre espacios de Hilbert, obtenemos que no existe ninguna aplicación $\Delta: S(E) \to S(F)$ (con E y F espacios de Hilbert) sobreyectiva y verificando que $\|\Delta(x) - \Delta(y)\| < \|x - y\|$ para todo $x, y \in S(E)$.

El siguiente corolario muestra que no es necesaria la hipótesis de la sobreyectividad para poder extender la aplicación, aunque entonces hay que exigir que Δ sea una isometría.

Corolario 18. $Si \Delta : S(E) \rightarrow S(F)$ es una isometría entre las esferas unidad de dos espacios de Hilbert, entonces puede extenderse a una isometría lineal entre E y F.

Demostración. Dado $x \in S(E)$, aplicando que Δ es una isometría, obtenemos que

$$\|\Delta(x) - \Delta(-x)\| = \|x - (-x)\| = 2.$$

Como F es un espacio de Hilbert, es estrictamente convexo (observación 7) y, por tanto, se cumple que $\Delta(-x) = -\Delta(x)$. De esta forma obtenemos que $\Delta(S(E)) = -\Delta(S(E))$ y el teorema 15 termina la demostración.

Para completar este apartado, vamos a probar que los espacio de Hilbert cumplen la que se conoce como propiedad de Mazur-Ulam. Este resultado se encuentra en el artículo de Becerra-Guerrero *et al.* [1].

Definición 19. Diremos que un espacio de Banach E cumple la **propiedad de Mazur-Ulam** cuando, dado cualquier espacio de Banach F, toda isometría sobreyectiva $\Delta: S(E) \to S(F)$ admite una extensión a una isometría sobreyectiva y lineal entre la totalidad de ambos espacios.

Teorema 20. Todo espacio de Hilbert cumple la propiedad de Mazur-Ulam.

Demostración. Sea E un espacio de Hilbert y F un espacio de Banach tal que existe Δ : $S(E) \rightarrow S(F)$, una isometría sobreyectiva.

Dados $y_1, y_2 \in S(F)$, por la sobreyectividad de Δ , existen $x_1, x_2 \in S(E)$ satisfaciendo que $\Delta(x_1) = y_1$ y $\Delta(x_2) = y_2$, y además se verifica que $\Delta(S(E)) = S(F) = -S(F) = -\Delta(S(E))$. Por la proposición 8 tenemos que $\Delta(-x_2) = -y_2$ y, por tanto,

$$\begin{split} \|y_1 + y_2\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2 &= \|\Delta(x_1) + \Delta(x_2)\|^2 + \|\Delta(x_1) - \Delta(x_2)\|^2 \\ &= \|x_1 + x_2\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 = 2\|x_1\|^2 + 2\|x_2\|^2 = 4 = 2\|y_1\|^2 + 2\|y_2\|^2. \end{split}$$

Aplicando el teorema de Day visto tras la definición 5, obtenemos que *F* es un espacio de Hilbert y el corolario 16 nos proporciona la conclusión deseada.

3. Problema de Tingley en espacios $\ell_p(I)$ ($p \in [1, \infty[\setminus \{2\}]$)

En esta sección nos preguntaremos si, dado $1 \le p < \infty$ y dos conjuntos arbitrarios no vacíos I y J, toda isometría entre $S(\ell_p(I))$ y $S(\ell_p(J))$ puede extenderse a una isometría sobreyectiva y lineal entre $\ell_p(I)$ y $\ell_p(J)$. Todos los resultados que necesitaremos para responder a esta pregunta han sido demostrados por Ding en sendos artículos para los casos 1 [7] y para el caso <math>p = 1 [8].

El primer paso consiste en definir los espacios $\ell_p(I)$ (que no son más que una generalización de los habituales espacios $\ell_p(\mathbb{N})$) y para ello necesitamos introducir previamente el concepto de familia sumable.

Definición 21. Sea I un conjunto arbitrario no vacío y $\mathcal{F}(I) = \{F \subset I : F \text{ es finito}\}$. Diremos que una familia $\{x_i : i \in I\}$ de elementos de un espacio normado X es **sumable** si existe un elemento $x \in X$ tal que para todo ε positivo podemos encontrar un subconjunto $F_0 \subset \mathcal{F}(I)$ satisfaciendo que

$$\left\|x - \sum_{i \in F} x_i\right\| < \varepsilon$$
, para todo $F \in \mathcal{F}(I) \operatorname{con} F_0 \subset F$.

Diremos que $\{x_i: i \in I\}$ verifica la **condición de Cauchy para familias sumables** si para todo ε positivo existe $F_0 \subset \mathcal{F}(I)$ cumpliendo que

$$\left|\sum_{i\in F_1}x_i-\sum_{i\in F_2}x_i\right|<\varepsilon, \text{ para todo } F_1,F_2\in\mathcal{F}(I), \text{ con } F_0\subset F_1,F_2.$$

El siguiente resultado, cuya demostración queda recogida en los ejercicios resueltos 1.9, 1.12 y 1.13 del libro de Vera [18], nos proporciona un par de caracterizaciones útiles para saber si una familia es sumable.

Lema 22. Sea I un conjunto arbitrario no vacío y sea $\{x_i : i \in I\}$ una familia infinita de elementos de un espacio normado X. Se verifican las siguientes afirmaciones:

- (1) La familia $\{x_i: i \in I\}$ es sumable si y solo si el conjunto $A=\{i \in I: x_i \neq 0\}$ es numerable y, para toda biyección $\sigma\colon \mathbb{N} \to A$, la serie $\sum_{n=1}^\infty x_{\sigma(n)}$ es convergente. Además, en caso de que $\{x_i: i \in I\}$ sea sumable, el límite $\sum_{n=1}^\infty x_{\sigma(n)}$ es independiente de σ y, por tanto, podemos escribir $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{n=1}^\infty x_{\sigma(n)}$, donde σ es cualquier biyección entre \mathbb{N} y A.
- (II) Si X es un espacio de Banach, $\{x_i : i \in I\}$ es sumable si y solo si $\{x_i : i \in I\}$ satisface la condición de Cauchy.

Una vez conocido el concepto de familia sumable, podemos definir los espacios $\ell_p(I)$.

Definición 23. Si I es un conjunto arbitrario y no vacío, denotaremos por \mathbb{R}^I el espacio vectorial formado por todas las funciones $x:I\to\mathbb{R}$. Bajo esa notación, definimos $\ell_p(I)$ como el conjunto de funciones $x\in\mathbb{R}^I$ tales que la familia $\{|x(i)|^p:i\in I\}$ es sumable, es decir,

$$\ell_p(I) = \{ x \in \mathbb{R}^I : \{ |x(i)|^p : i \in I \} \text{ es sumable} \}.$$

Gracias al lema 22, sabemos que la aplicación

$$\|\cdot\|: \ell_p(I) \to \mathbb{R}_0^+, \|x\| = \left(\sum_{i \in I} |x(i)|^p\right)^{1/p}$$

está bien definida y es una norma. Además, se puede probar que $\ell_p(I)$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^I completo cuando se dota de esta norma (la demostración es idéntica a la que se realiza en los espacios $\ell_p(\mathbb{N})$ y puede consultarse en el teorema 3.5 del libro de Ovchinnikov [16]).

Para todo $x \in \ell_p(I)$ se cumple que $x = \sum_{i \in I} x(i)e_i$ donde cada $e_i \in \ell_p(I)$ verifica que $e_i(k) = 1$ si i = k y $e_i(k) = 0$ si $i \neq k$. Estos elementos e_i forman la que se conoce como **base canónica de** $\ell_p(I)$.

Observación 24. Cuando $p = \infty$, se define $\ell_{\infty}(I) = \{x \in \mathbb{R}^I : \sup\{|x(i)| : i \in I\} < \infty\}$. Este es un espacio de Banach cuando se dota de la norma del supremo $\|x\|_{\infty} = \sup\{|x(i)| : i \in I\}$.

Tal y como se ha comentado en la introducción, el problema de Tingley también admite una respuesta positiva cuando se plantea entre dos espacios de este tipo (ver el artículo de Ding [9]). Sin embargo, este resultado es demasiado técnico y se escapa de las pretensiones de este artículo, así que en esta sección nos quedaremos con los casos $1 \le p < \infty$.

A lo largo de esta sección excluiremos de nuestro análisis el caso p=2. Este hecho no es restrictivo, ya que $\ell_2(I)$ es un espacio de Hilbert y ya sabemos que el problema de Tingley en espacios de Hilbert admite una respuesta positiva.

La herramienta fundamental para resolver el problema que nos ocupa en este apartado es el siguiente lema, que nos permite conocer cómo son las isometrías sobreyectivas entre las esferas unidad de dos espacios $\ell_p(I)$.

Lema 25. Sean I y J dos conjuntos arbitrarios no vacíos y $p \in [1, \infty[\setminus \{2\}. Si \ \Delta : S(\ell_p(I)) \rightarrow S(\ell_p(J))$ es una isometría sobreyectiva, entonces existe una biyección $\pi : J \rightarrow I$ y una familia $\{z_i : i \in I\}$ con $z_i \in \{-1, 1\}$, para todo $i \in I$, para las que se se verifica que

$$\Delta(x) = \sum_{j \in J} z_{\pi(j)} x(\pi(j)) e_j \quad (x \in \ell_p(I)).$$

Por último, el teorema que ofrecemos a continuación resuelve el problema de Tingley en espacios $\ell_p(I)$.

Teorema 26 (solución al problema de Tingley en espacios $\ell_p(I)$). Sean $I \ y \ J$ dos conjuntos arbitrarios no vacíos $y \ p \in [1, \infty[\ \setminus \{2\}.\ Si \ \Delta:\ S(\ell_p(I)) \to S(\ell_p(J))\ con\ p \geq 1\ y\ p \neq 2\ es\ una\ isometría\ sobreyectiva,$ entonces es posible extender Δ a una isometría sobreyectiva y lineal entre $\ell_p(I)\ y\ \ell_p(J)$.

Demostración. Al igual que ocurría en espacios de Hilbert, la extensión positivamente homogénea de Δ va a satisfacer las propiedades deseadas. Recordemos que dicha aplicación viene definida por $T: \ell_p(I) \to \ell_p(J)$ verificando que

$$T(x) = \begin{cases} ||x|| \Delta \left(\frac{x}{||x||}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

De nuevo, como T es positivamente homogénea y Δ es sobreyectiva, tenemos que T es sobreyectiva.

Si consideramos x e y, dos elementos no nulos de $\ell_p(I)$, y denotamos $\alpha_i = \frac{x(i)}{\|x\|}$ y $\beta_i = \frac{y(i)}{\|y\|}$, para todo $i \in I$, el lema 25 establece que

$$T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \Delta\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \sum_{j \in J} z_{\pi(j)} \alpha_{\pi(j)} e_j,$$
$$T\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \Delta\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \sum_{j \in J} z_{\pi(j)} \beta_{\pi(j)} e_j.$$

Como consecuencia, obtenemos que

$$||T(x) - T(y)||^{p} = |||x|| \Delta \left(\frac{x}{||x||}\right) - ||y|| \Delta \left(\frac{y}{||y||}\right)||^{p}$$

$$= ||x||^{p} ||\Delta \left(\frac{x}{||x||}\right) - \frac{||y||}{||x||} \Delta \left(\frac{y}{||y||}\right)||^{p}$$

$$= ||x||^{p} ||\sum_{j \in J} z_{\pi(j)} \alpha_{\pi(j)} e_{j} - \frac{||y||}{||x||} \sum_{j \in J} z_{\pi(j)} \beta_{\pi(j)} e_{j}||^{p}$$

$$= ||x||^{p} ||\sum_{j \in J} z_{\pi(j)} \left(\alpha_{\pi(j)} - \frac{||y||}{||x||} \beta_{\pi(j)}\right) e_{j}||^{p}$$

$$= ||x||^{p} \sum_{j \in J} |z_{\pi(j)} \left(\alpha_{\pi(j)} - \frac{||y||}{||x||} \beta_{\pi(j)}\right)|^{p}$$

$$= ||x||^{p} \sum_{j \in J} |\alpha_{\pi(j)} - \frac{||y||}{||x||} \beta_{\pi(j)}||^{p}$$

$$= ||x||^{p} \sum_{i \in I} |\alpha_{i} - \frac{||y||}{||x||} \beta_{i}||^{p}$$

$$= ||x||^{p} ||\frac{x}{||x||} - \frac{||y||}{||x||} \frac{y}{||y||} ||^{p}$$

$$= ||x - y||^{p}.$$

Está claro que también se verifica que ||T(x) - T(y)|| = ||x - y|| en el caso de que x o y sean nulos. Por tanto, tenemos que T es una isometría sobreyectiva entre $\ell_p(I)$ y $\ell_p(J)$, y gracias al teorema de Mazur-Ulam (teorema 1) y al hecho de que T(0) = 0, concluimos que T es también lineal.

4. Problema de Tingley en espacios $C_0(\Omega)$

Para cerrar la lista de ejemplos en los que el problema de Tingley admite una respuesta positiva vamos a tratar el espacio $C_0(\Omega)$.

Definición 27. Si Ω es un espacio localmente compacto (es decir, todo punto posee un entorno compacto) y de Hausdorff, $C_0(\Omega)$ representa el espacio de las funciones continuas de Ω en $\mathbb C$ que se **anulan en infinito**, es decir, tales que para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{x \in \Omega : |f(x)| \ge \varepsilon\}$ es compacto.

La aplicación

$$\|\cdot\|: C_0(\Omega) \to \mathbb{R}_0^+, \|f\| = \sup\{|f(x)|: x \in \Omega\}$$

es una norma que dota a $C_0(\Omega)$ de estructura de espacio de Banach.

Observación 28. Cuando Ω es un conjunto dotado de la topología discreta, $C_0(\Omega)$ coincide con $c_0(\Omega)$, el espacio de las funciones $x \in \mathbb{R}^{\Omega}$ tales que para todo ε positivo el conjunto $\{i \in I : |x(i)| \ge \varepsilon\}$ es finito. Por ejemplo, si consideramos $\Omega = \mathbb{N}$, obtenemos el espacio de las sucesiones convergentes a 0.

Fijemos en lo que sigue Ω_1 y Ω_2 , dos espacios topológicos localmente compactos y de Hausdorff tales que existe una isometría sobreyectiva Δ : $S_{\Omega_1} \to S_{\Omega_2}$, donde S_{Ω_1} y S_{Ω_2} denotan las esferas unidad de $C_0(\Omega_1)$ y $C_0(\Omega_2)$, respectivamente. Nuestro objetivo será extender Δ a una isometría sobreyectiva y lineal entre $C_0(\Omega_1)$ y $C_0(\Omega_2)$, y todos los resultados que utilizamos para ello han sido demostrados por Wang [19].

Recogemos en forma de lema las herramientas necesarias para resolver el problema que nos ocupa.

Lema 29. Si $x \in \Omega_1$, el conjunto

$$\varPsi_{\varDelta}(x) = \bigcap_{\|f\|=|f(x)|=1} \{t \in \varOmega_2 \,:\, |\varDelta(f)(t)|=1\}$$

contiene exactamente un punto. Además, la aplicación Ψ_{Δ} : $\Omega_1 \to \Omega_2$, que le asigna a cada $x \in \Omega_1$ el único punto del conjunto $\Psi_{\Delta}(x)$, es un homeomorfismo (aplicación biyectiva y continua con inversa continua) con $\Psi_{\Delta}^{-1} = \Psi_{\Delta^{-1}}$.

Observación 30. El resultado recién expuesto tiene importancia por sí solo, ya que establece que, si S_{Ω_1} y S_{Ω_2} son isométricas, entonces Ω_1 y Ω_2 son homeomorfos como espacios topológicos.

Lema 31. La aplicación $F: S(\mathbb{C}) \times \Omega_1 \to S(\mathbb{C})$ tal que $F(\alpha, x) = \Delta(f)(\Psi_{\Delta}(x))$, donde f es cualquier función en S_{Ω_1} con $f(x) = \alpha$, está bien definida (no depende de f) y es continua.

Además, para cada $x \in \Omega_1$ se verifica que, o bien $F(\alpha, x) = \alpha F(1, x)$ para todo $\alpha \in S(\mathbb{C})$, o bien $F(\alpha, x) = \overline{\alpha} F(1, x)$ para todo $\alpha \in S(\mathbb{C})$.

Dada $f \in S_{\Omega_1}$, el siguiente lema nos permite expresar $\Delta(f)(\Psi_{\Delta}(x))$ en función de la aplicación F recién definida.

Lema 32. Si $f \in S_{\Omega_1}$ $y \ x \in \Omega_1$, se cumple que

$$\Delta(f)(\Psi_{\Delta}(x)) = \begin{cases} |f(x)|F\left(\frac{f(x)}{|f(x)|}, x\right) & \text{si } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{si } f(x) = 0. \end{cases}$$

Ya somos capaces de resolver el problema de Tingley en espacios $C_0(\Omega)$, y exponemos su solución a continuación.

Teorema 33 (solución al problema de Tingley en espacios $C_0(\Omega)$). Si Ω_1 y Ω_2 son dos espacios localmente compactos y de Hausdorff tales que existe una isometría sobreyectiva Δ : $S_{\Omega_1} \to S_{\Omega_2}$, entonces es posible encontrar una isometría sobreyectiva y lineal T: $C_0(\Omega_1) \to C_0(\Omega_2)$ extendiendo a Δ .

Demostración. Empezamos definiendo el par de conjuntos

$$A = \{x \in \Omega_1 : F(\alpha, x) = \alpha F(1, x), \forall \alpha \in S(\mathbb{C})\}$$

y

$$B = \{x \in \Omega_1 : F(\alpha, x) = \overline{\alpha}F(1, x), \forall \alpha \in S(\mathbb{C})\}.$$

El lema 31 implica que $A \cup B = \Omega_1$. Además, se verifica que $A \cap B = \emptyset$, ya que, en caso de que existiese $x \in A \cap B$, tendríamos que F(i, x) = iF(1, x) = iF(1, x) y llegaríamos al absurdo $i = \overline{i}$.

El conjunto A es cerrado por ser intersección de imágenes inversas de un cerrado por una función continua, ya que $A = \bigcap_{\alpha \in S(\mathbb{C})} \{x \in \Omega_1 : F(\alpha, x) - \alpha F(1, x) = 0\}$. Análogamente, B es cerrado, y también ambos conjuntos son abiertos por ser uno el complementario del otro.

Debido al hecho de que Ψ_{Δ} es un homeomorfismo, concluimos que $A' = \Psi_{\Delta}(A)$ y $B' = \Psi_{\Delta}(B)$ son dos conjuntos complementarios, abiertos y cerrados en Ω_2 . Además, las funciones características de A' y B', denotadas por $\chi_{A'}$ y $\chi_{B'}$, son continuas por ser ambos conjuntos abiertos y cerrados.

Ahora, definimos $T: C_0(\Omega_1) \to C_0(\Omega_2)$ mediante

$$T(f)(y) = f(\Psi_{\Delta^{-1}}(y))F(1, \Psi_{\Delta^{-1}}(y))\chi_{A'}(y) + \overline{f(\Psi_{\Delta^{-1}}(y))}F(1, \Psi_{\Delta^{-1}}(y))\chi_{B'}(y)$$

 $(con f \in C_0(\Omega_1), y \in \Omega_2).$

Por el álgebra de funciones continuas tenemos que T(f) es continua y

$$|T(f)(y)| = |f(\Psi_{\Lambda^{-1}}(y))F(1, \Psi_{\Lambda^{-1}})(y)| = |f(\Psi_{\Lambda^{-1}}(y))|,$$

así que $T(f) \in C_0(\Omega_2)$ para toda $f \in C_0(\Omega_1)$.

Claramente, T es una aplicación lineal, y teniendo en cuenta que, para todo $y \in \Omega_2$, $|F(1, \Psi_{\Delta^{-1}})(y)| = 1$, $A' \cap B' = \emptyset$ y que Ψ_{Δ} es un homeomorfismo, obtenemos que

$$||T(f) - T(g)|| = \sup\{|f(\Psi_{\Lambda^{-1}}(y)) - g(\Psi_{\Lambda^{-1}}(y))| : y \in \Omega_2\} = ||f - g|| \quad (f, g \in C_0(\Omega_1));$$

por tanto, T es una isometría lineal.

Dada $g \in C_0(\Omega_2)$, la aplicación $f \in C_0(\Omega_1)$ definida por

$$f(x) = \frac{g(\Psi_{\Delta}(x))}{F(1,x)} \chi_A(x) + \frac{\overline{g(\Psi_{\Delta}(x))}}{\overline{F(1,x)}} \chi_B(x)$$

cumple que T(f) = g, así que T es sobreyectiva.

Por último, aplicando el lema 32, si $f \in S_{\Omega_1}$, tenemos que

$$\Delta(f)(y) = |f(\Psi_{\Delta^{-1}}(y))| F\left(\frac{f(\Psi_{\Delta^{-1}}(y))}{|f(\Psi_{\Delta^{-1}}(y))|}, \Psi_{\Delta^{-1}}(y)\right) \quad (y \in Y).$$

Por un lado, si $y \in A'$, se sigue que $\Psi_{\Delta^{-1}}(y) \in A$ y, por definición de A, concluimos que

$$\Delta(f)(y) = f(\Psi_{\Lambda^{-1}}(y))F(1, \Psi_{\Lambda^{-1}}(y)).$$

Por otro lado, si $y \in B'$, tenemos que $\Psi_{\Delta^{-1}}(y) \in B$ y, por definición de B, obtenemos que

$$\Delta(f)(y) = \overline{f(\Psi_{\Lambda^{-1}}(y))}F(1, \Psi_{\Lambda^{-1}}(y)).$$

De esta forma queda comprobado que T extiende a Δ .

Observación 34. Observemos que, en la demostración anterior, Ψ_{Δ} puede ser sustituido por cualquier otro homeomorfismo que exista entre Ω_1 y Ω_2 . Este hecho permite completar la observación 30 al establecer que Ω_1 y Ω_2 son homeomorfos si y solo si S_{Ω_1} y S_{Ω_2} son isométricas.

Referencias

- [1] BECERRA-GUERRERO, Julio; CUETO-AVELLANEDA, María; FERNÁNDEZ-POLO, Francisco J., y PERALTA, Antonio M. «On the extension of isometries between the unit spheres of a JBW*-triple and a Banach space». En: *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 20.1 (2021), págs. 277-303. ISSN: 1474-7480. https://doi.org/10.1017/S1474748019000173.
- [2] BÉJAR LÓPEZ, Alexis. *Introducción al problema de Tingley. Extensión de isometrías*. Trabajo de Fin de Grado. Universidad de Granada, 2019.
- [3] CABELLO SÁNCHEZ, Javier. «A reflection on Tingley's problem and some applications». En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 476.2 (2019), págs. 319-336. ISSN: 0022-247X. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.03.041.
- [4] Conway, John B. *A course in functional analysis*. 2.ª ed. Graduate Texts in Mathematics 96. Nueva York: Springer-Verlag, 1990. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3828-5.

TEMat, 5 (2021) e-issn: 2530-9633 67

- [5] DAY, Mahlon M. «Some characterizations of inner-product spaces». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 62 (1947), págs. 320-337. ISSN: 0002-9947. https://doi.org/10.2307/1990458.
- [6] DING, Guanggui. «The 1-Lipschitz mapping between the unit spheres of two Hilbert spaces can be extended to a real linear isometry of the whole space». En: *Science in China. Series A. Mathematics* 45.4 (2002), págs. 479-483. ISSN: 1006-9283. https://doi.org/10.1007/BF02872336.
- [7] DING, Guanggui. «The isometric extension problem in the unit spheres of $l^p(\Gamma)(p > 1)$ type spaces». En: *Science in China. Series A. Mathematics* 46.3 (2003), págs. 333-338. ISSN: 1006-9283. URL: https://link.springer.com/article/10.1360/03ys9035.
- [8] DING, Guanggui. «The representation theorem of onto isometric mappings between two unit spheres of $l^1(\Gamma)$ type spaces and the application to the isometric extension problem». En: *Acta Mathematica Sinica* (English Series) 20.6 (2004), págs. 1089-1094. ISSN: 1439-8516. https://doi.org/10.1007/s10114-004-0447-7.
- [9] DING, Guanggui. «The representation theorem of onto isometric mappings between two unit spheres of l^{∞} -type spaces and the application on isometric extension problem». En: *Science in China. Series A. Mathematics* 47.5 (2004), págs. 722-729. ISSN: 1006-9283. URL: https://link.springer.com/article/10.1360/03ys0049.
- [10] Fang, Xi Nian y Wang, Jian Hua. «Extension of isometries between the unit spheres of normed space E and $C(\Omega)$ ». En: Acta Mathematica Sinica (English Series) 22.6 (2006), págs. 1819-1824. ISSN: 1439-8516. https://doi.org/10.1007/s10114-005-0725-z.
- [11] Fu, Xiao Hong. «The isometric extension of the into mapping from the unit sphere $S_1(E)$ to $S_1(l^{\infty}(\Gamma))$ ». En: *Acta Mathematica Sinica (English Series)* 24.9 (2008), págs. 1475-1482. ISSN: 1439-8516. https://doi.org/10.1007/s10114-008-7286-x.
- [12] Lax, Peter D. *Functional analysis*. Pure and Applied Mathematics. Nueva York: Wiley-Interscience, 2002. ISBN: 978-0-471-55604-6.
- [13] LIU, Rui. «On extension of isometries between unit spheres of $L^{\infty}(\Gamma)$ -type space and a Banach space E». En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 333.2 (2007), págs. 959-970. ISSN: 0022-247X. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.11.044.
- [14] Mankiewicz, Piotr. «On extension of isometries in normed linear spaces». En: *Bulletin de l'Académie polonaise des sciences. Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques* 20 (1972), págs. 367-371. ISSN: 0001-4117.
- [15] MAZUR, Stanislaw y ULAM, Stanislaw. «Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés». En: *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 194 (1932), págs. 946-948. ISSN: 0001-4036.
- [16] OVCHINNIKOV, Sergei. *Functional analysis. An introductory course.* Universitext. Cham: Springer, 2018. https://doi.org/10.1007/978-3-319-91512-8.
- [17] TINGLEY, Daryl. «Isometries of the unit sphere». En: *Geometriae Dedicata* 22.3 (1987), págs. 371-378. ISSN: 0046-5755. https://doi.org/10.1007/BF00147942.
- [18] Vera Botí, Gabriel. *Variable compleja. Problemas y complementos*. Murcia: RSME y Electrolibris, 2013. ISBN: 978-84-940688-4-3.
- [19] Wang, Ri Sheng. «Isometries between the unit spheres of $C_0(\Omega)$ type spaces». En: *Acta Mathematica Scientia* 14.1 (1994), págs. 82-89. ISSN: 0252-9602. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(18) 30093-6.
- [20] Yang, Xiuzhong y Zhao, Xiaopeng. «On the extension problems of isometric and nonexpansive mappings». En: *Mathematics without boundaries*. Ed. por Rassias, Themistocles M. y Pardalos, Panos M. Nueva York: Springer, 2014, págs. 725-748. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-1106-6_24.

TEMat, volumen 5. Mayo de 2021.

e-ISSN: 2530-9633



Publicado con la colaboración de la Real Sociedad Matemática Española

- © 2021 Asociación Nacional de Estudiantes de Matemáticas.
- © 2021 los autores de los artículos.
- © ③ Salvo que se indique lo contrario, el contenido está disponible bajo una licencia Creative Commons Reconocimento 4.0 Internacional.