

# Un teorema de Hedlund para 3-variedades foliadas

✉ Álvaro Carballido Costas

Universidade de Santiago de Compostela  
alvarocarballidocostas@gmail.com

**Resumen:** El objetivo de este texto es dar una prueba elemental de la minimalidad del flujo horocíclico sobre 3-variedades foliadas por superficies hiperbólicas obtenidas como la suspensión de una representación no inyectiva  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+(S^1)$  de un grupo de superficie  $\Gamma$ .

**Abstract:** The goal of this text is to give an elementary proof of the minimality of the horocycle flow over foliated 3-manifolds obtained as the suspension of a non-injective representation  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Diffeo}_+(S^1)$  of a surface group  $\Gamma$ .

**Palabras clave:** flujo horocíclico, foliación, Hedlund, minimalidad, superficie hiperbólica, suspensión.

**MSC2010:** 37C85, 37D40, 57R30.

**Agradecimientos:** Al profesor Fernando Alcalde Cuesta por ayudarme a comprender todo lo necesario y más para la realización de este artículo.

**Referencia:** CARBALLIDO COSTAS, Álvaro. «Un teorema de Hedlund para 3-variedades foliadas». En: *TEMat monográficos*, 3 (2021): *Actas del VIII Encuentro de Jóvenes Topólogos*, págs. 1-12. ISSN: 2660-6003. URL: <https://temat.es/monograficos/article/view/vol3-p1>.

© Este trabajo se distribuye bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento 4.0 Internacional  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## 1. Introducción

El semiplano complejo superior  $\mathbb{H} = \{z = x + iy \mid y > 0\}$  dotado de la métrica  $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$  es una variedad riemanniana de curvatura constante negativa e igual a  $-1$ , llamada *plano hiperbólico* o *semiplano de Poincaré*. Si  $\Sigma$  es una superficie hiperbólica, esta se puede obtener como cociente  $\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{H}$  del plano hiperbólico por un subgrupo discreto de isometrías de  $\mathbb{H}$ .

Los horociclos en el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$  son las circunferencias tangentes al borde  $\partial\mathbb{H}$  y las líneas horizontales. El flujo horocíclico (estable)  $h_s : T^1\mathbb{H} \rightarrow T^1\mathbb{H}$  es un flujo definido sobre el fibrado tangente unitario al plano hiperbólico que consiste, como veremos, en moverse sobre el horociclo (estable) asociado.

Identificando  $T^1\mathbb{H}$  con el grupo de Lie  $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm Id\}$ , el flujo horocíclico  $h_s$  sobre  $T^1\mathbb{H}$  coincide con la acción natural por la derecha  $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U$  del grupo unipotente

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dada una superficie hiperbólica  $\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ , su fibrado tangente unitario  $T^1\Sigma \cong \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$  y se puede definir el flujo horocíclico  $h_s$  sobre la superficie  $\Sigma$  como la acción por la derecha  $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U$ . El teorema de Hedlund [9] nos dice que, si  $\Sigma$  es compacta, las órbitas de la acción  $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U$  son densas. Es decir, el flujo horocíclico sobre una superficie hiperbólica compacta es *minimal*.

De forma intuitiva, una foliación  $\mathcal{F}$  de dimensión  $n$  sobre una variedad  $M$  es una descomposición de la variedad en subvariedades inmersas, llamadas *hojas*, todas de dimensión  $n$  y de forma que tienen un buen comportamiento local que describiremos posteriormente. Si las hojas son superficies hiperbólicas (es decir, tienen curvatura  $-1$ ), podemos definir el flujo horocíclico en cada una de esas hojas y extenderlo globalmente a un flujo  $h_s : T^1\mathcal{F} \rightarrow T^1\mathcal{F}$  sobre el tangente unitario a la foliación, llamado *flujo horocíclico foliado*. El estudio de la minimalidad del flujo horocíclico foliado fue propuesto por primera vez por M. Martínez, S. Matsumoto y A. Verjovsky [11].

El problema de la minimalidad del flujo horocíclico foliado ha sido abordado en varios trabajos [1, 2, 12], obteniendo diversos resultados en situaciones distintas a la que vamos a abordar en este texto. Nosotros construiremos las 3-variedades foliadas a través de la suspensión de una representación  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+(S^1)$  de un grupo de superficie  $\Gamma$  en los difeomorfismos de la circunferencia  $S^1$ .

En el caso de representaciones no inyectivas daremos una prueba elemental del siguiente resultado, que es un caso particular del presentado en [2].

**Teorema 1** (Hedlund foliado). *Sea  $(M, \mathcal{F})$  una 3-variedad foliada por superficies hiperbólicas densas obtenida como suspensión de una representación no inyectiva  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+(S^1)$ . Entonces, el flujo horocíclico foliado sobre  $T^1\mathcal{F}$  es minimal.*

El caso de representaciones inyectivas es más complejo y no siempre es cierto que el flujo horocíclico es minimal. El único resultado aplicable es un teorema de Matsumoto [12], que nos asegura que para 3-variedades foliadas por superficies hiperbólicas la minimalidad de la acción  $T^1\mathcal{F} \curvearrowright U$  es equivalente a la minimalidad de la acción  $T^1\mathcal{F} \curvearrowright B$  del grupo afin

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Hay, sin embargo, casos de foliaciones obtenidas por representaciones inyectivas para las que la  $B$ -acción no es minimal.

## 2. Geometría hiperbólica

### 2.1. Plano hiperbólico

Sea  $\mathbb{H} = \{z = x + iy \mid y > 0\}$  el *plano hiperbólico* o *semiplano de Poincaré*, es decir, el semiplano complejo superior dotado de la métrica  $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$ . Este espacio es el ejemplo más sencillo de superficie

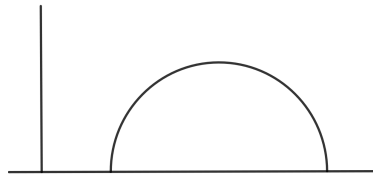


Figura 1: Plano hiperbólico.

hiperbólica, es decir, de superficie con curvatura de Gauss constante e igual a  $-1$ . Las geodésicas de este espacio son las rectas verticales y los semicírculos con centro en el eje real, como se muestra en la figura 1.

Si denotamos por  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  el disco abierto unidad, la transformación conforme

$$\Psi: z \in \mathbb{H} \rightarrow \Psi(z) = i \frac{z - i}{z + i} \in \mathbb{D},$$

llamada *transformación de Cayley*, nos proporciona un modelo de geometría equivalente al del plano hiperbólico, dotado de la métrica riemanniana

$$ds^2 = \frac{4dzd\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}.$$

En este modelo, las geodésicas son los radios del círculo y las circunferencias tangentes al borde del disco  $\partial\mathbb{D}$ .

Se verifica (véase [10]) que el grupo de isometrías que conservan la orientación del plano hiperbólico es

$$\text{Isom}_+(\mathbb{H}) = \left\{ z \in \mathbb{H} \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \in \mathbb{H} \mid ad - bc = 1 \right\},$$

isomorfo al grupo de Lie  $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm\text{Id}\}$ , donde

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ac - bd = 1 \right\}.$$

En efecto, cada matriz

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R})$$

determina una transformación

$$z \in \mathbb{H} \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \in \mathbb{H}.$$

De esta forma, el grupo  $PSL(2, \mathbb{R})$  actúa de forma natural sobre el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$  mediante isometrías.

Más adelante necesitaremos la clasificación de las isometrías del plano hiperbólico:

**Definición 2.** Un elemento  $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$  se dice

- (1) *hiperbólico* si fija dos puntos en  $\partial\mathbb{H}$  y ninguno en  $\mathbb{H}$ ,
- (2) *parabólico* si fija un único punto en  $\partial\mathbb{H}$  y ninguno en  $\mathbb{H}$ ,
- (3) *elíptico* si fija un punto en  $\mathbb{H}$ . ◀

El objetivo ahora es introducir las superficies hiperbólicas y caracterizarlas mediante acciones libres y propiamente discontinuas de grupos fuchsianos sobre  $\mathbb{H}$ . Para ello, comenzaremos recordando las nociones necesarias de acciones de grupos.

## 2.2. Acciones de grupos

Sea  $\Gamma$  un grupo topológico y  $M$  un espacio topológico, habitualmente una variedad riemanniana. Una acción  $\Gamma \curvearrowright M$  es una aplicación continua

$$\varphi : \Gamma \times M \rightarrow M$$

verificando las siguientes dos propiedades:

- (1)  $\varphi(1, x) = x, \quad \forall x \in M,$
- (2)  $\varphi(\gamma, \varphi(\gamma', x)) = \varphi(\gamma\gamma', x), \quad \forall \gamma, \gamma' \in \Gamma, \forall x \in M.$

En lo que sigue, dada una acción  $\Gamma \curvearrowright M$ , denotaremos  $\gamma.x$  el elemento  $\varphi(\gamma, x)$ . Denotamos por

$$\Gamma.x = \{\gamma.x \mid \gamma \in \Gamma\}$$

la *órbita* del punto  $x \in M$ . Estas órbitas definen una relación de equivalencia sobre  $M$ , y el espacio cociente  $\Gamma \backslash M$  se llama *espacio de órbitas*.

**Definición 3.** Una acción  $\Gamma \curvearrowright M$  se dice *minimal* si todas sus órbitas son densas en  $M$ . ◀

A nosotros nos interesa un tipo particular de acciones, llamadas *acciones libres y propiamente discontinuas*.

**Definición 4.** Una acción  $\Gamma \curvearrowright M$  se dice *libre* si se verifica que

$$\gamma.x = x \implies \gamma = 1.$$

Se dice *transitiva* si para cada  $x, y \in M$  existe un elemento  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $y = \gamma.x$ . ◀

La noción de acción propiamente discontinua es un poco más compleja, pero aparece naturalmente al preguntarse cuándo el espacio de órbitas  $\Gamma \backslash M$  de una acción sobre la variedad diferenciable  $M$  sigue siendo una variedad diferenciable. A partir de ahora, los grupos que consideremos serán discretos, es decir, dotados de la topología discreta.

**Definición 5.** Una acción  $\Gamma \curvearrowright M$  de un grupo discreto  $\Gamma$  sobre un espacio topológico Hausdorff  $M$  se dice *propiamente discontinua* si

- (1) el espacio de órbitas  $\Gamma \backslash M$  es Hausdorff,
- (2) para cada  $x \in M$ , el grupo de isotropía  $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.x = x\}$  es finito, y
- (3) para cada  $x \in M$  existe un entorno  $V_x$  tal que
  - (i)  $\gamma.V_x = V_x, \quad \forall \gamma \in \Gamma_x,$
  - (ii) para cada  $\gamma \notin \Gamma_x, \gamma.V_x \cap V_x = \emptyset.$  ◀

La importancia de este tipo de acciones la da el siguiente teorema.

**Teorema 6.** Sean  $\Gamma$  un grupo discreto y  $M$  una variedad diferenciable. Supongamos que el grupo actúa sobre la variedad  $\Gamma \curvearrowright M$  de forma libre y propiamente discontinua. Entonces, existe una única estructura de variedad diferenciable sobre el espacio de órbitas  $\Gamma \backslash M$  de forma que

$$\pi : M \rightarrow \Gamma \backslash M$$

es una cubierta diferenciable.

En particular, si  $M$  es una variedad riemanniana de curvatura de Gauss constante en todo punto, entonces podemos dotar al espacio de órbitas  $\Gamma \backslash M$  de una estructura de variedad riemanniana con curvatura de Gauss constante e igual a la de  $M$  en todo punto.

Para más información sobre este tema, véase [3].

## 2.3. Superficies hiperbólicas

Ya estamos en condiciones de precisar lo que es una superficie hiperbólica y enunciar el teorema de Poincaré que las caracteriza como espacios de órbitas de acciones de grupos fuchsianos.

**Definición 7.** Una *superficie hiperbólica* es una superficie con curvatura de Gauss constante e igual a  $-1$ . ◀

Como habíamos visto, tenemos una acción  $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H}$  y, por tanto, cualquier subgrupo  $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$  actúa también sobre  $\mathbb{H}$ .

**Definición 8.** Un subgrupo discreto de  $PSL(2, \mathbb{R})$  se llama *grupo fuchsiano*. ◀

Teniendo en cuenta el teorema anterior, si  $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$  es un grupo fuchsiano que actúa libremente sobre  $\mathbb{H}$ , el espacio de órbitas  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  es una superficie hiperbólica.

El recíproco también es cierto y la demostración se puede encontrar en [10].

**Teorema 9 (Poincaré).** *Dada una superficie hiperbólica  $\Sigma$ , siempre existe un grupo fuchsiano  $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$  que actúa libremente sobre  $\mathbb{H}$  tal que  $\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ .*

## 2.4. Grupos de superficie

Los grupos fuchsianos que nos van a interesar son los grupos de superficie.

**Definición 10.** Un grupo fuchsiano  $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$  cocompacto (es decir,  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  es compacto) y sin torsión se llama *grupo de superficie*. ◀

Dado un grupo fuchsiano  $\Gamma$ , se define su conjunto límite como

$$L(\Gamma) = \overline{\Gamma \cdot z} \cap \partial \mathbb{H},$$

que es independiente del punto  $z \in \mathbb{H}$  escogido.

Un grupo fuchsiano  $\Gamma$  se dice *no elemental* si su conjunto límite  $L(\Gamma)$  es no finito. En particular, los grupos de superficie son grupos no elementales, ya que su conjunto límite coincide con todo el borde del plano hiperbólico  $\partial \mathbb{H}$ .

Los dos teoremas siguientes relativos a grupos no elementales serán la clave en la prueba del teorema de Hedlund foliado que presentaremos más adelante.

**Teorema 11** ([13, Theorem 12.2.14]). *Si  $\Gamma$  es un grupo de superficie y  $N \triangleleft \Gamma$  es un subgrupo normal, entonces  $L(N) = L(\Gamma) = \partial \mathbb{H}$ .*

La acción lineal  $SL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  induce una acción  $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \{\pm \text{Id}\}$  que seguiremos llamando *acción lineal*.

**Teorema 12** ([6, Proposition 2.6]). *Si  $\Gamma$  es un grupo de superficie, entonces existe un elemento  $v \in E$  tal que  $\overline{\Gamma \cdot v} = E$ .*

## 3. Teorema de Hedlund clásico

El objetivo de esta sección es dar las nociones necesarias para poder formular un teorema debido a G. A. Hedlund [9] sobre la minimalidad del flujo horocíclico en superficies hiperbólicas.

### 3.1. Flujo horocíclico en el plano hiperbólico

Los horociclos en el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$  son las circunferencias tangentes al borde  $\partial \mathbb{H}$  y las líneas horizontales. Un vector tangente unitario  $u \in T^1 \mathbb{H}$  determina dos horociclos para los que el vector  $u$  es ortogonal a ambos. En uno de ellos, llamado *horociclo estable*, el vector apunta hacia el interior, mientras que en el otro, llamado *horociclo inestable*, apunta hacia el exterior, como se muestra en la figura 2.

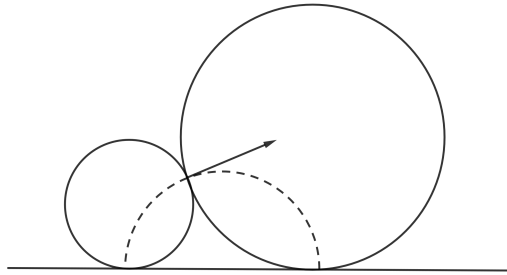


Figura 2: Horociclos.

**Definición 13.** El flujo horocíclico  $h_s : T^1\mathbb{H} \rightarrow T^1\mathbb{H}$  es el flujo definido sobre el tangente unitario al plano hiperbólico definido como sigue: dado un vector  $u \in T^1\mathbb{H}$ , el vector  $h_s(u) \in T^1\mathbb{H}$  se obtiene desplazando el vector  $u$  una distancia hiperbólica  $|s|$  a lo largo del único horociclo estable que define. Se desplaza en sentido horario si  $s < 0$  y antihorario si  $s > 0$ . Vease la figura 3. ◀

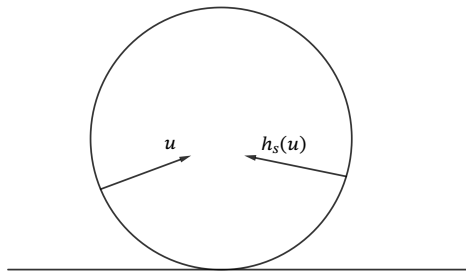


Figura 3: Flujo horocíclico.

### 3.2. Formulación algebraica del flujo horocíclico

El grupo  $PSL(2, \mathbb{R})$  actúa sobre  $T^1\mathbb{H}$  a través de la diferencial, es decir, dado  $g \in PSL(2, \mathbb{R})$  y  $u = (z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ , la acción viene dada por

$$g.u = (g(u), g_*(z)\vec{u}).$$

**Proposición 14.** La acción  $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright T^1\mathbb{H}$  anterior es libre y transitiva y podemos identificar  $PSL(2, \mathbb{R}) \cong T^1\mathbb{H}$ .

*Demostración.* Si escribimos  $g = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R})$  entonces la acción se escribe como

$$g.(z, \vec{u}) = \left( \frac{az + b}{cz + d}, \frac{1}{(cz + d)^2} (u^1 + iu^2) \right),$$

donde  $\vec{u} = u^1 + iu^2 \in T_z^1\mathbb{H} \cong \mathbb{C}$ .

Dado  $(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$  es sencillo comprobar (usando las fórmulas anteriores) que existe una única isometría  $g \in PSL(2, \mathbb{R})$  de forma que  $g.(i, \vec{e}_2) = (z, \vec{u})$ , siendo  $\vec{e}_2 \in T_i^1\mathbb{H}$  el vector unitario con primera coordenada nula.

Teniendo esto en cuenta, la aplicación  $\varphi : PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow T^1\mathbb{H}$  definida por  $\varphi(g) = g.(i, \vec{e}_2)$  es un homeomorfismo que nos permite identificar

$$PSL(2, \mathbb{R}) \cong T^1\mathbb{H}. \quad \blacksquare$$

Bajo esta identificación, el flujo horocíclico  $h_s$  coincide con la acción natural por la derecha  $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U$  del grupo unipotente

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

De forma explícita, dado

$$g = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R}),$$

se tiene que

$$h_s(g) = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R}).$$

Esta forma algebraica de describir el flujo horocíclico nos permitirá extenderlo de forma sencilla a contextos más generales, como superficies hiperbólicas o algunos tipos de variedades foliadas.

### 3.3. Flujo horocíclico sobre una superficie hiperbólica

Como decíamos antes, toda superficie hiperbólica  $\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{H}$  se puede obtener como el espacio de órbitas de la acción de un grupo fuchsiano  $\Gamma$  sobre el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$ .

El fibrado tangente unitario  $T^1\Sigma$  de tal superficie coincide con el espacio  $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ , que a su vez coincide con  $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ . Teniendo esto en cuenta, junto con la caracterización algebraica del flujo horocíclico damos la siguiente definición.

**Definición 15.** Dada una superficie hiperbólica  $\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ , se define el *flujo horocíclico*

$$h_s : \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$$

como  $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U$ , la acción por la derecha del grupo unipotente  $U$  sobre el tangente unitario a tal superficie  $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ . Es decir,

$$h_s(\Gamma.g) = \Gamma.g \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para cada  $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ . ◀

Recordemos que un flujo, o más generalmente una acción de un grupo sobre un espacio, se dice *minimal* si todas sus órbitas son densas. El teorema de Hedlund clásico nos dice cuándo el flujo horocíclico sobre una superficie hiperbólica es minimal.

**Teorema 16 (Hedlund).** *Si  $\Sigma$  es una superficie hiperbólica compacta, entonces el flujo horocíclico  $h_s$  es minimal.*

El recíproco de este teorema también es cierto [5]: si el flujo horocíclico sobre una superficie hiperbólica es minimal, entonces la superficie tiene que ser compacta.

### 3.4. Dualidad

Veremos en este apartado lo que llamaremos *principio de dualidad* que nos asegura que la minimalidad del flujo horocíclico  $h_s : \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$  sobre una superficie hiperbólica es equivalente a la minimalidad de la acción lineal  $\Gamma \curvearrowright E$  que definiremos más adelante. Esta dualidad, debida a H. Furstenberg [7], nos permitirá en secciones posteriores dar una prueba elemental de un teorema de tipo Hedlund en el caso de cierto tipo de variedades foliadas.

Si  $\Gamma$  es un grupo de superficie y  $U$  el grupo unipotente, hay acciones naturales la izquierda y por la derecha de estos grupos sobre  $PSL(2, \mathbb{R})$ :

$$\Gamma \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowleft U.$$

Estas acciones inducen otras dos:

$$\Gamma \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R})/U = E \quad \text{y} \quad \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowleft U.$$

A la primera la llamamos *acción lineal*, pues  $\Gamma$  actúa sobre  $E$  como subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{R})$ , y la segunda es el flujo horocíclico. Es natural pensar que la minimalidad de estas dos acciones tengan relación. El principio de dualidad nos asegura que la minimalidad de una es equivalente a la minimalidad de la otra.

**Teorema 17** (principio de dualidad). *El flujo horocíclico  $\Gamma \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U$  es minimal si y solo si la acción lineal  $\Gamma \curvearrowright E$  es minimal. Esta dualidad la denotaremos por*

$$\Gamma \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U \sim \Gamma \curvearrowright E.$$

Con esto, podemos reformular el teorema de Hedlund clásico de la siguiente forma:

**Teorema 18** (Hedlund). *Si  $\Gamma$  es un grupo de superficie, entonces la acción lineal  $\Gamma \curvearrowright E$  es minimal.*

## 4. Foliaciones y suspensiones

El objetivo ahora es extender el flujo horocíclico a 3-variedades foliadas definiendo un flujo al que llamaremos *flujo horocíclico foliado*. Estas 3-variedades foliadas se construirán mediante la suspensión de una representación de un grupo de superficie en el grupo de los difeomorfismos de la circunferencia.

### 4.1. Foliaciones

Dada una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $n$ , una foliación de dimensión  $p \leq n$  sobre  $M$  es una descomposición de  $M$  en subvariedades inmersas, llamadas *hojas*, de dimensión  $p$  y dispuestas de modo que localmente se parece a la descomposición canónica de  $\mathbb{R}^n$  por los subespacios  $\mathbb{R}^p$ . De esta forma, el primer ejemplo de foliación se obtiene al considerar  $M = \mathbb{R}^n$  y definir la hoja que pasa por  $(x, y) = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^n$  como el plano afín

$$L_y = \{(x', y) \in \mathbb{R}^n \mid x' = (x'_1, \dots, x'_p) \in \mathbb{R}^p\} = \mathbb{R}^p \times \{y\}$$

de dimensión  $p$ . Se dice entonces que la familia  $\mathcal{F} = \{L_y \mid y \in \mathbb{R}^q\}$  es una *foliación de dimensión  $p$  y codimensión  $q$*  y el par  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F})$  es una *variedad foliada*.

Aunque la idea de foliación es intuitiva y el ejemplo anterior es sencillo, conviene dar una definición más precisa de lo que es una foliación.

**Definición 19.** Dada una variedad  $M$  de dimensión  $n$ , se llama *atlas foliado* de dimensión  $p$  sobre  $M$  a un atlas  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  formado por difeomorfismos

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow B^p \times B^q$$

definidos sobre abiertos  $U_\alpha$  que recubren  $M$ , siendo  $B^p$  y  $B^q$  las bolas abiertas de radio unidad centradas en el origen en  $\mathbb{R}^p$  y  $\mathbb{R}^q$  con  $n = p + q$ . Además, este atlas tiene que verificar la siguiente condición: si  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , entonces el cambio de cartas

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

está dado por

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = (g_{\alpha\beta}(x, y), h_{\alpha\beta}(y)).$$

Las subvariedades embebidas  $P_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(B^p \times \{y\})$  se llaman *placas*. Por definición, si dos abiertos foliados  $U_\alpha$  y  $U_\beta$  se cortan, la unión de dos placas  $P_\alpha$  y  $P_\beta$  que pasan por un punto de la intersección sigue siendo una subvariedad embebida y conexa de dimensión  $p$ .

**Definición 20.** Se llama *hoja* a una unión conexa y maximal de placas. Por cada punto  $x \in M$  pasa una única hoja que denotaremos por  $L_x$ . La descomposición

$$\mathcal{F} = \{L_x \mid x \in M\}$$

se llama *foliación* de  $M$  definida por el atlas foliado  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ .

**Ejemplo 21.** Dado un número irracional  $\theta \notin \mathbb{Q}$ , la acción  $\mathbb{R} \curvearrowright T^2$  de los reales sobre el toro  $T^2$  definida por el flujo

$$\Phi_t(e^{2\pi x}, e^{2\pi y}) = (e^{2\pi(x+t)}, e^{2\pi(y+t)})$$

determina una foliación sobre el toro de dimensión 1 con todas las hojas densas. Véase la figura 5.



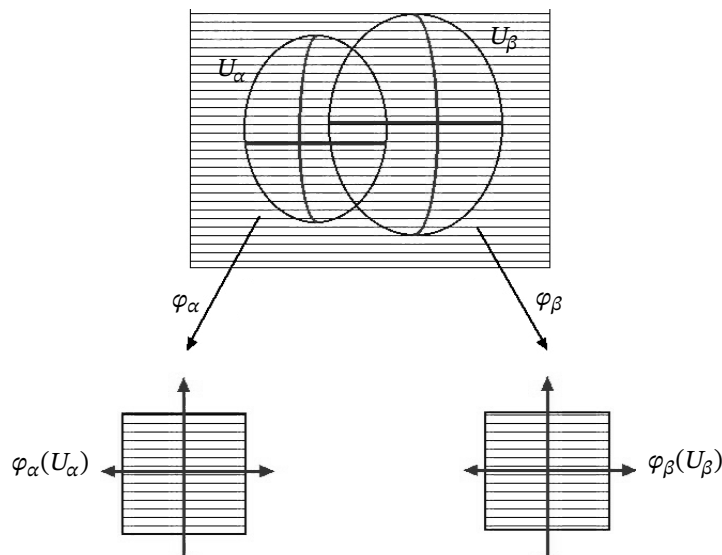


Figura 4: Cambio de cartas de un atlas foliado.

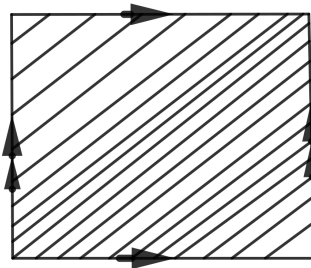


Figura 5: Foliación lineal del toro.

## 4.2. Suspensión de una representación

Nos interesa considerar una variedad foliada por superficies hiperbólicas, es decir, en la que cada hoja de la foliación sea una superficie hiperbólica. La *suspensión* de una representación nos permitirá obtener este tipo de espacios. Cabe mencionar que, aunque la suspensión de una representación se puede hacer de forma bastante general, nos limitaremos a suspensiones de representaciones de grupos de superficie en  $\text{Difeo}_+(S^1)$ . Recordemos que una *representación*  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+(S^1)$  no es más que un homomorfismo de grupos.

Si tenemos una representación  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+(S^1)$  de un grupo de superficie  $\Gamma$ , se llama *acción diagonal* a la acción de  $\Gamma$  sobre  $\mathbb{H} \times S^1$  definida por

$$\gamma \cdot (z, \zeta) = (\gamma(z), \rho(\gamma)(\zeta))$$

para cada  $z \in \mathbb{H}$  y cada  $\zeta \in S^1$ . Llamemos

$$q : \mathbb{H} \times S^1 \rightarrow \Gamma \backslash (\mathbb{H} \times S^1)$$

a la aplicación cociente y  $\mathcal{H} = \{\mathbb{H} \times \{\zeta\} \mid \zeta \in S^1\}$  a la *foliación horizontal* de  $\mathbb{H} \times S^1$ . Esta foliación es invariante por la acción de  $\Gamma$  y, por lo tanto, pasa al cociente en una nueva foliación

$$\mathcal{F} = \{q(\mathbb{H} \times \{\zeta\}) \mid \zeta \in S^1\}$$

sobre la variedad cociente  $M = \Gamma \backslash (\mathbb{H} \times S^1)$ .

Las hojas

$$q(\mathbb{H} \times \{\zeta\}) \cong \Gamma_\zeta \backslash \mathbb{H},$$

donde  $\Gamma_\zeta = \{\gamma \in \Gamma \mid \rho(\gamma)(\zeta) = \zeta\}$  es el subgrupo de isotropía de  $\zeta \in S^1$ . A su vez,  $\Gamma_\zeta < PSL(2, \mathbb{R})$  es un grupo fuchsiano, luego cada una de las hojas de la foliación  $\mathcal{F}$  de  $M$  tiene estructura natural de superficie hiperbólica. Por eso se dice que la variedad  $M$  está foliada por superficies hiperbólicas.

**Definición 22.** Se dice que el par  $(M, \mathcal{F})$  es la *suspensión de la representación*  $\rho$ . ◀

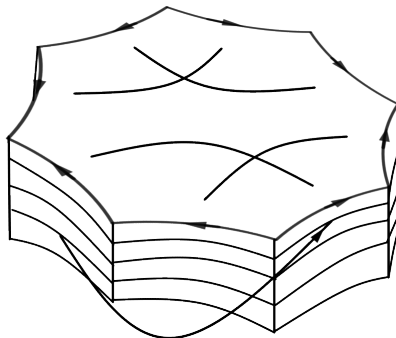


Figura 6: Suspensión.

Para profundizar sobre esta construcción véase [8].

### 4.3. Flujo horocíclico foliado

El objetivo ahora es definir el flujo horocíclico sobre la variedad foliada  $M = \Gamma \backslash (\mathbb{H} \times S^1)$  obtenida mediante la suspensión de una representación  $\rho$ .

Dada una variedad foliada  $(M, \mathcal{F})$ , como hemos indicado antes, se define el *fibrado tangente a la foliación*  $\mathcal{F}$  como

$$T\mathcal{F} = \bigsqcup_{L \in \mathcal{F}} TL.$$

De forma análoga, como cada hoja de la foliación tiene asociada una métrica riemanniana, se define el *fibrado tangente unitario a la foliación*  $\mathcal{F}$  como

$$T^1\mathcal{F} = \bigsqcup_{L \in \mathcal{F}} T^1L.$$

Es en este fibrado donde está definido el flujo horocíclico foliado

$$h_s^+ : T^1\mathcal{F} \rightarrow T^1\mathcal{F}.$$

Para definir de forma sencilla este flujo, lo que haremos será caracterizar algebraicamente este fibrado tangente para que, como sucedía antes, el flujo horocíclico esté definido por la acción por la derecha del grupo  $U$ .

Notemos en primer lugar que  $T^1\mathcal{H} = T^1\mathbb{H} \times S^1$  y  $T^1\mathcal{F} \cong \Gamma \backslash T^1\mathcal{H}$ . Recordando que  $T^1\mathbb{H} \cong PSL(2, \mathbb{R})$  obtenemos que

$$T^1\mathcal{F} \cong \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1).$$

Ahora bien, el grupo unipotente  $U$  actúa por la derecha sobre  $PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1$  mediante multiplicación sobre el primer factor y trivialmente sobre el segundo. Por tanto,  $U$  también actúa sobre  $T^1\mathcal{F} = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1)$ .

**Definición 23.** Sea  $(M, \mathcal{F})$  la suspensión de una representación  $\rho$ . Se define el *flujo horocíclico foliado*  $h_s : T^1\mathcal{F} \rightarrow T^1\mathcal{F}$  como la acción por la derecha del grupo  $U$  sobre  $T^1\mathcal{F} \cong \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1)$ . Explícitamente,

$$h_s(\Gamma \cdot (g, \zeta)) = \Gamma \cdot \left( g \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \zeta \right)$$

para cada  $g \in PSL(2, \mathbb{R})$  y cada  $\zeta \in S^1$ . ◀

Una vez definido el flujo horocíclico foliado cabe preguntarse si es minimal, es decir, si todas sus órbitas son densas. Nos centraremos en el caso de que la representación  $\rho$  sea una representación no inyectiva.

## 5. Teorema de Hedlund foliado

### 5.1. Dualidad

Consideremos  $(M, \mathcal{F})$  la suspensión de una representación  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+(S^1)$  de un grupo de superficie  $\Gamma$ . La clave está en considerar de nuevo la dualidad introducida en la sección 3. En este caso, se tiene el siguiente resultado

**Teorema 24** (principio de dualidad). *La minimalidad del flujo horocíclico foliado  $h_s : T^1\mathcal{F} \rightarrow T^1\mathcal{F}$  es equivalente a la minimalidad de la acción diagonal  $\Gamma \curvearrowright E \times S^1$  dada por*

$$\gamma.(v, \zeta) = (\gamma.v, \rho(\gamma)(\zeta))$$

con  $\gamma \in \Gamma$ ,  $v \in E$  y  $\zeta \in S^1$ . Con la notación introducida en la sección 3 tenemos que

$$\Gamma \backslash (\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times S^1) \curvearrowright U \sim \Gamma \curvearrowright E \times S^1.$$

Notemos que si el flujo horocíclico foliado es minimal, por dualidad, la acción  $\Gamma \curvearrowright E \times S^1$  también lo es. Más aún, como  $\Gamma$  actúa de forma independiente sobre ambos factores de  $E \times S^1$ , si el flujo horocíclico es minimal, entonces la acción  $\Gamma \curvearrowright S^1$  también es minimal. Notemos que la acción  $\Gamma \curvearrowright E$  es minimal por el teorema de Hedlund clásico.

Esta condición necesaria la vamos a añadir como hipótesis. A su vez, usando un principio de dualidad parecido al introducido anteriormente, se ve que la minimalidad de la acción  $\Gamma \curvearrowright S^1$  es equivalente a que la foliación  $\mathcal{F}$  por superficies hiperbólicas tenga hojas densas en  $M$ .

**Hipótesis.** La foliación  $\mathcal{F}$  sobre  $M$  obtenida mediante la suspensión de una representación  $\rho$  tiene hojas densas, o, de modo equivalente, la acción  $\Gamma \curvearrowright S^1$  es minimal. ◀

### 5.2. Enunciado

En el caso de una representación no inyectiva  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+(S^1)$  se tiene el siguiente resultado, que es un caso particular del resultado demostrado en [2].

**Teorema 25** (Hedlund foliado). *Sea  $(M, \mathcal{F})$  una 3-variedad foliada obtenida como suspensión de una representación  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+(S^1)$  de un grupo de superficie  $\Gamma$ . Supongamos que la foliación  $\mathcal{F}$  es minimal y la representación  $\rho$  es no inyectiva. Entonces, el flujo horocíclico foliado  $h_s^+$  definido sobre el tangente unitario  $T^1\mathcal{F}$  es minimal.*

En el caso de que la representación  $\rho$  sea inyectiva, el argumento del teorema anterior no funciona y es necesario usar el siguiente resultado.

**Teorema 26** (Matsumoto [12]). *Sea  $(M, \mathcal{F})$  una 3-variedad foliada por superficies hiperbólicas densas obtenida como la suspensión de una representación  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+(S^1)$ . Entonces, la minimalidad de la acción  $T^1\mathcal{F} \curvearrowright U$  es equivalente a la minimalidad de la acción  $T^1\mathcal{F} \curvearrowright B$  del grupo afín.*

De hecho, el teorema anterior es más general y se aplica a cualquier 3-variedad foliada por superficies hiperbólicas. Sin embargo, hay foliaciones inyectivas tales que la acción  $T^1\mathcal{F} \curvearrowright B$  no es minimal.

### 5.3. Prueba del teorema

En esta última parte procederemos a la prueba del teorema de Hedlund foliado (teorema 25). Como señalábamos, por dualidad nos basta probar que la acción diagonal  $\Gamma \curvearrowright E \times S^1$  es minimal. Como  $\Gamma$  es un grupo de superficie, entonces  $L(\Gamma) = \partial\mathbb{H}$ . Como el núcleo  $N = \text{Ker}\rho \triangleleft \Gamma$  es no trivial, sabemos por el teorema 11 que  $L(N) = L(\Gamma) = \partial\mathbb{H}$ . Luego  $N$  es también un grupo no elemental y, por tanto, existe  $v \in E$  tal que  $N.v = E$ , de acuerdo con el teorema 12.

Procedemos en tres etapas:

- (i) Para cada  $\zeta \in S^1$ , tenemos que  $E \times \{\zeta\} \subset \overline{\Gamma.(v, \zeta)}$ . En efecto, como  $E = \overline{N.v}$ , para cada  $w \in E$  existe una sucesión  $\{\gamma_n\}$  de elementos de  $N$  tal que  $\{\gamma_n.v\} \rightarrow w$ . Así, la sucesión de puntos

$$\gamma_n.(v, \zeta) = (\gamma_n.v, \zeta) \in \Gamma.(v, \zeta)$$

converge al punto  $(w, \zeta) \in \overline{\Gamma.(v, \zeta)}$ , lo que prueba la afirmación (i).

- (ii) Para cada  $\zeta \in S^1$ , la  $\Gamma$ -órbita de  $(v, \zeta)$  es densa, es decir,  $\overline{\Gamma.(v, \zeta)} = E \times S^1$ . En efecto, consideremos un punto arbitrario  $(v', \zeta') \in E \times S^1$ . Puesto que  $\Gamma \curvearrowright S^1$  es minimal por hipótesis, hay una sucesión  $\{\gamma_n\}$  de elementos de  $\Gamma$  tal que  $\{\rho(\gamma_n)\zeta\} \rightarrow \zeta'$ . Por otra parte, por la propiedad (i), los puntos

$$(\gamma_n^{-1}v', \zeta) \in E \times \{\zeta\} \subset \overline{\Gamma.(v, \zeta)}.$$

Puesto que  $\overline{\Gamma.(v, \zeta)}$  es  $\Gamma$ -invariante, tenemos una sucesión de puntos

$$\gamma_n.(\gamma_n^{-1}v', \zeta) = (v', \rho(\gamma_n)\zeta)$$

pertenecientes a  $\overline{\Gamma.(v, \zeta)}$  que converge al punto  $(v', \zeta')$ . Luego  $(v', \zeta') \in \overline{\Gamma.(v, \zeta)}$ , lo que prueba la afirmación (ii).

- (iii) Por último, para cada  $(v', \zeta') \in E \times S^1$ , tenemos que  $\overline{\Gamma.(v', \zeta')} = E \times S^1$ . En efecto, por el teorema 18 la acción  $\Gamma \curvearrowright E$  es minimal, existe una sucesión  $\{\gamma'_n\}$  de elementos de  $\Gamma$  tal que  $\{\gamma'_n.v'\} \rightarrow v$ . Por compacidad de  $S^1$ , extrayendo una subsucesión convergente si fuese necesario, podemos suponer que la sucesión  $\{\rho(\gamma'_n)(\zeta')\}$  converge a un punto  $\zeta \in S^1$ . En tal caso, la sucesión de puntos

$$\gamma'_n.(v', \zeta') = (\gamma'_n.v', \rho(\gamma'_n)(\zeta')) \in \Gamma.(v', \zeta')$$

converge al punto  $(v, \zeta)$  y, por consiguiente,  $(v, \zeta) \in \overline{\Gamma.(v', \zeta')}$ . Como consecuencia de la propiedad (ii) y de que  $\overline{\Gamma.(v', \zeta')}$  es  $\Gamma$ -invariante y cerrado, deducimos que

$$E \times S^1 = \overline{\Gamma.(v, \zeta)} \subset \overline{\Gamma.(v', \zeta')}$$

y, por tanto,  $E \times S^1 = \overline{\Gamma.(v', \zeta')}$ . Luego hemos probado que la acción diagonal  $\Gamma \curvearrowright E \times S^1$  es minimal.

## Referencias

- [1] ALCALDE, F y DAL'BO, F «Remarks on the dynamics of the horocycle flow for homogeneous foliations by hyperbolic surfaces». En: *Expo. Math.* 33 (2015).
- [2] ALCALDE, F; DAL'BO, F; MARTÍNEZ, M., y VERJOVSKY, A. «Minimality of the horocycle flow on laminations by hyperbolic surfaces with non-trivial topology». En: *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 36 (2016).
- [3] BOOTHBY, W. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic press, 2002.
- [4] CARBALLIDO COSTAS, Á. *Un teorema de Hedlund para fibrados foliados sobre superficies hiperbólicas*. Trabajo Fin de Máster. Universidade de Santiago de Compostela, 2019.
- [5] DAL'BO, F. «Topologie du feuilletage fortement stable». En: *Ann. Inst. Fourier* 50 (2000).
- [6] DAL'BO, F. *Geodesic and horocycle trajectories*. London: Springer-Verlag, 2011.
- [7] FURSTENBERG, H. «Strict ergodicity and transformations of the torus». En: *Amer. J. Math.* 83 (1961).
- [8] HECTOR, G. *Introduction to the geometry of foliations. Part A*. Vieweg & Sohn, 1981.
- [9] HEDLUND, G. A. «Fuchsian groups and transitive horocycles». En: *Duke Math. J.* 2 (1936).
- [10] KATOK, S. *Fuchsian groups*. Chicago: University of Chicago press, 2011.
- [11] MARTÍNEZ, M.; MATSUMOTO, S., y VERJOVSKY, A. «Horocycle flow for laminations by hyperbolic Riemann surfaces and Hedlund's theorem». En: *J. Mod. Dyn.* 10 (2016).
- [12] MATSUMOTO, S. «Remarks on the horocycle flow for foliations by hyperbolic surfaces». En: *Proc. Amer. Math. Soc.* 145 (2017).
- [13] RATCLIFFE, J. G. *Foundations of hyperbolic manifolds*. New York: Springer, 2006.