VIII *Encuentro de Jóvenes Topólogos* (2019)

La homotopía de los complejos de cadenas

Guille Carrión Santiago
Universitat Autònoma de Barcelona
guillecarrion@mat.uab.cat

Resumen: Los complejos de cadenas surgen de forma natural de la topología y poseen muchas propiedades homotópicas como, por ejemplo, la relación de homotopía o ser contráctil. Analizaremos las construcciones de objetos cilindro y de camino con el fin de entender bien la relación de homotopía en complejos de cadenas y la diferencia con los cuasi-isomorfismos. Además, introduciremos algunos conceptos de categorías de modelos y los aplicaremos en la categoría de complejos de cadenas.

Abstract: Chain complexes arise naturally from topology and possess many homotopic properties such as the homotopy relation or being contractible. We will study the constructions of cylinder and path objects in order to understand the homotopy relationship in chain complexes and the difference with quasi-isomorphisms. We will also introduce some notions from model categories and apply them to the category of chain complexes.

Palabras clave: complejos de cadenas, categoría de modelos, teoría de homotopía, objeto cilindro, objeto caminos, homotopía.

MSC2010: 18G35, 18N40, 55U15.

Agradecimientos: Muchas gracias a Natàlia Castellana y a Antonio Díaz por leer la versión preliminar de estas notas.

El autor está financiado por el proyecto FEDER-MEC MTM2016-80439-P del Ministerio Español de Economía y Competitividad.

Referencia: Carrión Santiago, Guille. «La homotopía de los complejos de cadenas». En: *TEMat monográficos*, 3 (2021): *Actas del VIII Encuentro de Jóvenes Topólogos*, págs. 13-28. ISSN: 2660-6003. URL: https://temat.es/monograficos/article/view/vol3-p13.

1. Introducción

Los complejos de cadenas sobre grupos abelianos $\mathrm{Ch}(\mathbf{Ab})$ aparecen de forma natural en la topología algebraica para definir la homología de un espacio topológico. Dado X un espacio topológico, construimos el complejo de cadenas singulares

$$C(X): \ \dots C_i(X) \xrightarrow{d_i} C_{i-1}(X) \to \dots \to C_2(X) \xrightarrow{d_2} C_1(X) \xrightarrow{d_1} C_0(X) \longrightarrow 0,$$

donde $C_i(X)$ es el grupo abeliano libre generado por las i-símplices singulares en X, de forma que la homología de X es la homología del complejo de cadenas $C(X)$, es decir,

$$H_i(X) = H_i(C(X)) = \ker \partial_i / \mathrm{Im}\partial_{i+1}.$$

Una propiedad importante es que, si $f, g : X \to Y$ son dos aplicaciones homótopas, estas definen el mismo homomorfismo de grupos en homología:

$$f_* = g_* : H_n(X) \to H_n(Y).$$

Pero es más, se puede definir una relación de homotopía entre homomorfismos de complejos de cadenas que imita esta relación para espacios topológicos; para ello haremos uso del concepto de categoría de modelos.

¡Atención! Antes de que decida dejar de leer, quiero adelantarle que no va a necesitar saber gran cosa de categoría de modelos y que *solo trabajaremos con complejos de (co)cadenas y espacios topológicos*. El concepto de «categoría de modelos» estará de fondo y no es necesario que sea un experto en el tema. Por el contrario, sí será interesante que esté familiarizado con algunos conceptos de teoría de categorías, los cuales puede encontrar en los apéndices A1 y A2 de [7]; los capítulos I, II y III de [3], y, si tiene algunos conocimientos, la sección 2 de [1]. No obstante, definiremos el concepto de categoría de modelos para el lector que desee entrar en detalle.

Definición 1. Dado un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd} \tag{1}$$

un **levantamiento** para dicho diagrama es una aplicación $h : B \to X$ tal que $hi = f$ y $ph = g$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"] \arrow[ur, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

◂

Definición 2 ([1, Definición 3.3]). Una **categoría de modelos** es una categoría $\mathcal{M}$ bicompleta[1] equipada con tres clases distinguidas de morfismos:

- $\xrightarrow{\sim}$ equivalencias débiles;
- $\twoheadrightarrow$ fibraciones;
- $\hookrightarrow$ cofibraciones.

Si un morfismo es equivalencia débil y cofibración (resp. fibración) diremos que es una cofibración (resp. fibración) acíclica.

A1. Cada clase es cerrada frente a la composición y contiene todas las identidades.

[1] Una categoría $\mathcal{M}$ se dice que es bicompleta si existe todos los límites y colímites finitos.

A2. Dados f, g dos morfismos tales que fg está definido, se tiene que si dos de las tres son equivalencias débiles, entonces la tercera lo es.

A3. Si f es un retracto de g, f está en las mismas clases que g.

A4. Dado un diagrama conmutativo como (1), existe un levantamiento si i es una cofibración acíclica y p una fibración o si i es una cofibración y p una fibración acíclica.

A5. Cualquier morfismo $f\colon X \to Y$ factoriza como

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dr, two heads] & \\ X \arrow[ur, hook, "\sim"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, hook] & & Y \\ & Z' \arrow[ur, two heads, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

Si el lector se siente abrumado con esta definición, es suficiente que piense que una categoría de modelos $\mathcal{M}$ nos permite desarrollar una teoría de homotopía sobre dicha categoría. Comenzando por la relación de homotopía, ¿qué significa que dos aplicaciones $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$[2] sean homótopas?

Tenemos dos posibles opciones para definir esta relación de equivalencia:

Definición 3. Dos aplicaciones continuas $f, g : X \to Y$ son **homótopas** si la aplicación $f \sqcup g\colon X \sqcup X \to Y$ se extiende a una aplicación $H\colon X \times I \to Y$:

$$\begin{tikzcd} X \sqcup X \arrow[r, "f \sqcup g"] \arrow[d, "in_0 \sqcup in_1"'] & Y \\ X \times I \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

Definición 4. Dos aplicaciones continuas $f, g\colon X \to Y$ son **homótopas** si la aplicación $(f, g)\colon X \to Y \times Y$ se levanta a una aplicación $H\colon X \to Y^I$:

$$\begin{tikzcd} & Y^I \arrow[d, "(p_0, p_1)"] \\ X \arrow[ur, "H"] \arrow[r, "(f,g)"'] & Y \times Y \end{tikzcd}$$

Para ver que ambas definiciones son equivalentes es suficiente comprobar que $H\colon X \to Y^I$ es continua si y solo si la evaluación $\tilde{H}\colon X \times I \to Y$ es continua (véase [5, Teorema 46.11]).

Para definir la relación de homotopía en una categoría de modelos necesitamos definir primero las nociones de objeto cilindro y de objeto de caminos.

Definición 5. Sea $\mathcal{M}$ una categoría de modelos y A un objeto de $\mathcal{M}$. Un **objeto cilindro** para A es un objeto $\mathrm{cyl}(A)$ en $\mathcal{M}$ equipado con tres morfismos $i_0, i_1\colon A \sqcup A \to \mathrm{cyl}(A)$ y $p\colon \mathrm{cyl}(A) \xrightarrow{\sim} A$ de forma que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{cyl}(A) \arrow[dr, "\sim"] & \\ A \sqcup A \arrow[ur, "i_0 + i_1"] \arrow[rr, "\mathrm{Id} + \mathrm{Id}"] & & A \end{tikzcd}$$

Un **objeto de caminos** para A es un objeto $\mathrm{path}(A)$ en $\mathcal{M}$ equipado con tres morfismos $p_0, p_1\colon \mathrm{path}(A) \to A$ e $i\colon A \xrightarrow{\sim} \mathrm{path}(A)$ de forma que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{path}(A) \arrow[dr, "(p_0, p_1)"] & \\ A \arrow[ur, "\sim"] \arrow[rr, "\Delta"] & & A \times A \end{tikzcd}$$

El objetivo de este texto es ser una agradable introducción a la categoría de modelos para complejos de cadenas. A pesar de la promesa de no abrumar al lector con demasiados tecnicismos, conviene dar al menos una estructura de categoría de modelos para **Top** en la que esta definición «sea lo que tiene que ser».

[2] Aquí $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ es el conjunto de aplicaciones continuas entre los espacios topológicos X e Y.

1.1. Categoría de modelos de Hurewicz (o de Strøm)

Sea $A \subset B$ un subespacio cerrado e $i\colon A \to B$ la inclusión de subespacio. Decimos que i es una cofibración cerrada de Hurewicz si, para cada Y, el siguiente diagrama se levanta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"] & Y^I \arrow[d, "p_0"] \\ B \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

es decir, si «toda homotopía definida en A se extiende a una homotopía definida en todo el espacio».

Una aplicación $p\colon X \to Y$ es una fibración de Hurewicz si p tiene la propiedad del levantamiento de homotopías. Esto es, para cada espacio A, el siguiente diagrama se levanta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i_0"] & X \arrow[d, "p"] \\ A \times I \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Teorema 6 ([4, Teorema 17.1.1]). *La categoría de espacios topologicos es una categoría de modelos si definimos*

- $\xrightarrow{\sim}$ *como las equivalencias débiles, las equivalencias de homotopía,*
- $\hookrightarrow$ *como las cofibraciones, las cofibraciones cerradas de Hurewicz y*
- $\twoheadrightarrow$ *como las fibraciones, las fibraciones de Hurewicz.*

Esta categoría de modelos recibe el nombre de categoría de modelos de Hurewicz o de Størm. El lector más familiarizado con la materia conocerá la existencia de la categoría de modelos de Quillen para espacios topológicos (véase [4, Sección 17.2] o [1, Sección 8]). Pero para nuestro objetivo, con tener una referencia para espacios topológicos es suficiente.

Para la categoría de modelos de Hurewicz es trivial comprobar que para todo espacio topológico, $X \times I$ es un objeto cilindro y que X^I es un objeto de caminos para X.

1.2. Homotopía

Una vez definido el objeto cilindro y el objeto de caminos para una categoría de modelos, reescribiendo las definiciones de homotopía para espacios topológicos tenemos las equivalentes para categorías de modelos:

Definición 7. Sea $\mathcal{M}$ una categoría de modelos. Diremos que dos morfismos $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y)$ son **homótopos por la izquierda**, y lo denotaremos por $f \overset{l}{\sim} g$, si existe un objeto cilindro $\mathrm{cyl}(X)$ tal que el morfismo $f + g\colon X \sqcup X \to Y$ se extiende a $H\colon \mathrm{cyl}(X) \to Y$.

$$\begin{tikzcd} X \sqcup X \arrow[r, "f+g"] \arrow[d, "in_0+in_1"'] & Y \\ \mathrm{cyl}(X) \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

◂

Definición 8. Sea $\mathcal{M}$ una categoría de modelos. Diremos que dos morfismos $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y)$ son **homótopos por la derecha**, y lo denotaremos por $f \overset{r}{\sim} g$, si existe un objeto de caminos $\mathrm{path}(X)$ tal que el morfismo $(f, g)\colon X \to Y \times Y$ se levanta a $H\colon X \to \mathrm{path}(X)$.

$$\begin{tikzcd} & Y^I \arrow[d, "(p_0{,}p_1)"] \\ X \arrow[ur, "H"] \arrow[r, "(f{,}g)"'] & Y \times Y \end{tikzcd}$$

◂

Observación 9. Cuando pasamos de espacios topológicos a categorías de modelos, la relación de homotopía definida por cilindros y caminos puede no ser la misma; es más, en general, estas relaciones no tienen por qué ser de equivalencia. Pueden consultarse más detalles en las notas originales de Quillen [6, Capítulo I, sección 1.5]. ◂

2. Categoría de modelos para complejos de cadenas

En esta sección vamos a trabajar en la categoría de complejos de cadenas de grupos abelianos y en adelante escribiremos Ch para referirnos a Ch(**Ab**). Nos centraremos en grupos abelianos para simplificar la mayoría de cálculos, pero los resultados son ciertos también para R-mod. Es posible dar los resultados en complejo de cadenas y de cocadenas, pero para homogeneizar la notación, trabajaremos siempre en complejos de cadenas sin asumir, en general, ninguna acotación sobre el grado. Definiremos de manera formal qué significa que dos aplicaciones sean homótopas y probaremos más adelante que es justo la definición de homotopía con cilindros y caminos para categorías de modelos.

Definición 10. Sean $f, g: C \to D$ dos aplicaciones entre complejos de cadenas. Decimos que f es **homótopa** a g, y denotaremos $f \simeq g$, si y solo si existe una aplicación $s: C \to D$ de grado 1 tal que

$$f - g = \partial_D s + s\partial_C,$$

donde ∂_D y ∂_C son las diferenciales de D y C, respectivamente. Decimos que $f: C \to D$ es una **equivalencia de homotopía** si existe una aplicación $g: D \to C$ tal que

$$fg \simeq \mathrm{Id}_D \text{ y } gf \simeq \mathrm{Id}_C.$$ ◂

Para poder ver que esta definición de homotopía coincide con la definición de homotopía (a izquierda y derecha) en la categoría de modelos definida en la definición 7 (o definición 8) tenemos que dotar a Ch de estructura de categoría de modelos.

Definición 11. Decimos que un monomorfismo $m: C \to D$ entre grupos abelianos **escinde**, si existe un morfismo $r: D \to C$ tal que $rm = \mathrm{Id}C$. Dualmente, decimos que un epimorfismo $e: D \to C$ entre grupos abelianos **escinde**, si existe un morfismo $s: C \to D$, tal que $es = \mathrm{Id}C$. ◂

Teorema 12 ([4, Teorema 18.3.1, Definición 18.3.3]). *Sea $f: C \to D$ una aplicación en* Ch. *Definimos que f es*

- $\xrightarrow{\sim}$ *una equivalencia débil si es una equivalencia de homotopía,*
- $\hookrightarrow$ *una cofibración si grado a grado es un monomorfismo que escinde y*
- $\twoheadrightarrow$ *una fibración si grado a grado es un epimorfismo que escinde.*

En tal situación, Ch *tiene estructura de categoría de modelos.*

Aunque esta categoría de modelos es útil para «igualar» aplicaciones homótopas (veremos esto más adelante), no es tan útil para trabajar en homología, ya que una aplicación entre complejos de cadenas que induce un isomorfismo en homología no siempre es una equivalencia de homotopía.

Definición 13. Decimos que una aplicación $f: C \to D$ entre complejos de cadenas es un **cuasi-isomorfismo** si, para cada $k \in \mathbb{Z}$, la aplicación inducida en homología

$$f_*: H_k(C) \xrightarrow{\cong} H_k(D)$$

es un isomorfismo. ◂

Ejemplo 14. Consideremos los complejos de cadenas

$$C: \ \ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \to 0 \quad \text{y} \quad D: \ \ldots \to 0 \to 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \to 0.$$

Claramente,

$$H_0(C) = H_2(C) = \mathbb{Z}_2 = H_0(D) = H_2(D) \quad y \quad H_n(C) = H_n(D) \text{ en otro caso.}$$

Por tanto, es sensato pensar que podría existir una equivalencia de homotopía entre ellos. La única aplicación $f: C \to D$ candidata a ser equivalencia de homotopía es

$$\begin{tikzcd}
C: \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "p"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "p"] & 0 \arrow[d, "0"] \\
D: \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

siendo $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ la proyección. La única aplicación $D \to C$ es la constante 0, que claramente no puede ser una inversa homotópica de f. En el ejemplo 28 veremos que f es un cuasi-isomorfismo. ◂

Este ejemplo ilustra que existen cuasi-isomorfismos que no son equivalencias de homotopía. Este «problema» lo solucionamos con las categorías de modelos de Quillen.

Teorema 15 (categoría de modelos de Quillen proyectiva [1, sección 7]). *Sea* $\mathrm{Ch}_{\geq 0}$ *la categoría de complejos de cadenas acotados inferiormente. La siguiente clasificación de homomorfismos define una categoría de modelos en* $\mathrm{Ch}_{\geq 0}$. *Una aplicación* $f : C \to D$ *es una*

- $\xrightarrow{\sim}$ *equivalencia débil si* f *induce un isomorfismo en homología,*
- $\hookrightarrow$ *cofibración si en cada grado es un monomorfismo con conúcleo proyectivo y*
- $\twoheadrightarrow$ *fibración si es un epimorfismo en cada grado.*

Dual a esta categoría de modelos está la categoría de modelos de Quillen inyectiva.

Teorema 16 (categoría de modelos de Quillen inyectiva). *Sea* $\mathrm{Ch}_{\leq 0}$ *la categoría de complejos de cadenas acotados superiormente. La siguiente clasificación de homomorfismos define una categoría de modelos en* $\mathrm{Ch}_{\leq 0}$. *Una aplicación* $f : C \to D$ *es una*

- $\xrightarrow{\sim}$ *equivalencia débil si* f *induce un isomorfismo en homología,*
- $\hookrightarrow$ *cofibración si en cada grado es monomorfismo y*
- $\twoheadrightarrow$ *fibración si en cada grado es un epimorfismo que escinde con núcleo inyectivo.*

Dada una categoría de modelos $\mathcal{M}$ se construye una categoría $\mathrm{Ho}(\mathcal{M})$ que recibe el nombre de categoría homotópica (ver [1, sección 5]) en la que las equivalencias débiles en $\mathcal{M}$ pasan a ser isomorfismos en $\mathrm{Ho}(\mathcal{M})$. En el caso de complejos de cadenas acotados, estas dos últimas categorías de modelos inducen (como es de esperar) la misma categoría homotópica. Para nuestro objetivo trabajaremos fundamentalmente con la categoría de modelos del teorema 12, aunque es interesante conocer estas dos últimas.

2.1. Objeto cilindro y objeto de caminos

En esta sección construiremos el objeto cilindro y el objeto de caminos para complejos de cadenas inspirándonos en la construcción sobre espacios topológicos. Para ello, tomemos un espacio topológico X. Para simplificar el razonamiento, supondremos que X es un CW-complejo. Lo primero que nos preguntamos es ¿qué complejo de cadenas jugará el papel del intervalo $[0,1]$?

Si consideramos $C(I)$ el complejo de cadenas celular de $[0,1]$ considerando 0 y 1 como 0-celdas y $(0,1)$ como una 1-celda, tenemos

$$C(I) : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}, -\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}})} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

En adelante, con el fin de no recargar la notación, llamaremos indistintamente I al intervalo $[0,1]$ y a su complejo de cadenas celular.

Comencemos por la construcción del cilindro. Para apoyarnos visualmente, pensemos que $X = I^2$ y veamos la descomposición celular de $X \times I$.

La descomposición celular del producto consiste en el producto cartesiano de las celdas de X por las celdas de I y la dimensión de cada celda es la suma de las dimensiones de cada uno de los factores. Si pensamos en el ejemplo en el que $X = I^2$, las 0-celdas de $X \times I$ son producto de 0-celdas de X por 0-celdas de I; las 1-celdas son 1-celdas de X por 0-celdas de I y 1-celdas de I por 0-celdas de X; las 2-celdas son la 2-celda de X por cada una de las 0-celdas de I y las 1-celdas de X por la 1-celda de I, y, por último, la 3-celda es la 2-celda de X por la 1 celda de I, tal y como vemos en la figura 1. Si denotamos por X^n las n-celdas de X y por I^n las n-celdas de I, las m-celdas de $X \times I$ son celdas del producto $X^i \times I^j$ con $i + j = m$.

En general, para un CW-complejo X, el complejo de cadenas celular de $X \times I$ es

$$C(X \times I) : \ \ldots C_n(X) \oplus C_{n-1}(X) \oplus C_n(X) \to \ldots \to C_1(X) \oplus C_0(X) \oplus C_1(X) \to C_0(X) \oplus C_0(X).$$

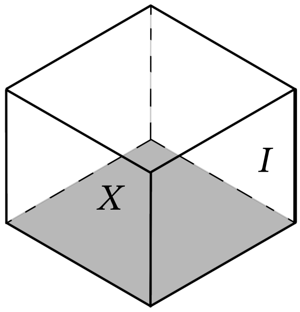

Figura 1: $X \times I$ para $X = I^2$.

Al pasar de espacios a complejos de cadenas, el producto directo pasa a ser el producto tensorial. Construiremos con detalle el producto tensorial total de dos complejos de cadenas.

Dados C, D dos complejos de cadenas, consideremos el bicomplejo de cadenas

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots & C_{p-1} \otimes_{\mathbb{Z}} D_q \arrow[l] \arrow[d] & C_p \otimes_{\mathbb{Z}} D_q \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & C_{p-1} \otimes_{\mathbb{Z}} D_{q-1} \arrow[l] \arrow[d] & C_p \otimes_{\mathbb{Z}} D_{q-1} \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
 & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

cuyas diferenciales horizontal y vertical son

$$\partial_h = \partial \otimes \mathrm{Id} D_q \qquad \text{y} \qquad \partial_v = (-1)^p \mathrm{Id} C_p \otimes \partial.$$

Definimos el **producto tensorial (total)** de C y D, que denotaremos por $C \otimes D$, como el complejo de cadenas cuyo grado n es

$$(C \otimes D)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes_{\mathbb{Z}} D_q$$

y cuya diferencial viene dada por la suma de las diferenciales horizontales y verticales. Para el caso de $C = I$, el bicomplejo queda

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 & I_0 \otimes_{\mathbb{Z}} C_{n+1} \arrow[l] \arrow[d, "\partial"'] & I_1 \otimes_{\mathbb{Z}} C_{n+1} \arrow[l] \arrow[d, "-\partial"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & I_0 \otimes_{\mathbb{Z}} C_n \arrow[l] \arrow[d] & I_1 \otimes_{\mathbb{Z}} C_n \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
 & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Para cualquier grupo abeliano G se verifica que

$$G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong G \qquad \text{y} \qquad G \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) = G \oplus G,$$

luego el bicomplejo anterior queda

$$\begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\ 0 & C_{n+1} \oplus C_{n+1} \arrow[l] \arrow[d, "\partial"'] & C_{n+1} \arrow[l, "(\mathrm{Id},-\mathrm{Id})"'] \arrow[d, "-\partial"'] & 0 \arrow[l] \\ 0 & C_n \oplus C_n \arrow[l] \arrow[d] & C_n \arrow[l, "(\mathrm{Id},-\mathrm{Id})"'] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\ & \vdots & \vdots & \end{tikzcd}$$

Definición 17. Dado un complejo de cadenas C, definimos el **cilindro de** C como el complejo de cadenas

$$\mathrm{cyl}(C): \ \ldots \to C_n \oplus C_{n-1} \oplus C_n \to C_{n-1} \oplus C_{n-2} \oplus C_{n-1} \to \ldots$$

y cuya diferencial viene dada por $\partial((c_1, c_2, c_3)) = (\partial(c_1) + c_2, -\partial(c_2), \partial(c_3) - c_2)$. ◂

Pasemos ahora a la construcción del objeto de caminos. Dado un espacio topológico X, el espacio de caminos X^I es el espacio topológico de aplicaciones continuas de I en X, es decir, en el lenguaje categórico, como conjunto $X^I = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(I, X)$ y luego lo «enriquecemos» con la topología compacto-abierta. Así pues, consideremos C un complejo de cadenas y pensemos, como antes, en el bicomplejo[3] de cadenas

$$\begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(I_0, C_p) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(I_1, C_p) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(I_0, C_{p-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(I_1, C_{p-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & \vdots & \vdots & \end{tikzcd}$$

donde la diferencial horizontal viene dada por

$$f \mapsto f \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}, -\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}),$$

las verticales

$$\begin{tikzcd} f : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to C_p \arrow[d, mapsto] & f : \mathbb{Z} \to C_p \arrow[d, mapsto] \\ \partial \circ f & -\partial \circ f. \end{tikzcd}$$

En general, para cualquier grupo abeliano G se cumple que

$$(\star) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\mathbb{Z}, G) \cong G \quad \text{y} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, G) \cong G \oplus G.$$

Para que ahora la diferencial tenga el sentido correcto, definimos el complejo de cadenas $\mathrm{Hom}(I, C)$ como el complejo de cadenas cuyo grado n es

$$\mathrm{Hom}(I, C)_n = \bigoplus_{q-p=n} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(I_p, C_q) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(I_0, C_n) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(I_1, C_{n+1}) \overset{(\star)}{\cong} C_n \oplus C_n \oplus C_{n+1}.$$

[3] Igual que antes, se puede definir el complejo de cadenas $\mathrm{Hom}(C, D)$ para complejos de cadenas cualesquiera. La construcción es similar al producto tensorial teniendo cuidado con el cambio del sentido de las flechas.

Definición 18. Dado un complejo de cadenas C, definimos el **complejo de caminos de** C como el complejo de cadenas

$$\mathrm{path}(C): \ \dots \to C_n \oplus C_{n+1} \oplus C_n \to C_{n-1} \oplus C_n \oplus C_{n-1} \to \dots$$

cuya diferencial viene dada por $\partial(c, c', c'') = (\partial c, c'' - c - \partial c', \partial c'')$. ◂

Ejemplo 19 (Esfera). Para cada $n \in \mathbb{Z}$, definimos la n-esfera (en Ch) como el complejo de cadenas S^n que tiene por grado n el grupo abeliano $\mathbb{Z}$ y en el resto 0. Describamos en detalle $\mathrm{cyl}(S^0)$ y $\mathrm{path}(S^0)$.

Comenzamos por el producto tensorial de $S^0 \otimes I$. Este surge de hacer la suma de la diagonal en el bicomplejo

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 & \mathbb{Z} \otimes (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \arrow[l] \arrow[d] & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\ & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

La única diferencial no nula viene dada por $\partial(k) = (k, -k)$, y al sumar en la diagonal obtenemos

$$\begin{tikzcd} \dots & \mathrm{cyl}(S^0)_{-1} \arrow[l] & \mathrm{cyl}(S^0)_0 \arrow[l] & \mathrm{cyl}(S^0)_1 \arrow[l] & \mathrm{cyl}(S^0)_2 \arrow[l] & \dots \arrow[l] \\ \dots & 0 \arrow[l] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[l] & \mathbb{Z} \arrow[l] & 0 \arrow[l] & \dots \arrow[l] \\ & & (k, -k) & k. \arrow[l, mapsto] & & \end{tikzcd}$$

Para el caso del objeto de caminos tenemos que calcular el complejo de cadenas $\mathrm{Hom}(I, S^0)$. Como antes, tenemos que empezar por el bicomplejo

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

donde la única diferencial no nula es $d(k, k') = k - k'$. Si sumamos ahora en la diagonal obtenemos

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{path}(S^0)_1 \arrow[r] & \mathrm{path}(S^0)_0 \arrow[r] & \mathrm{path}(S^0)_{-1} \arrow[r] & \mathrm{path}(S^0)_{-2} & \\ \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots \\ & & (k, k') \arrow[r, mapsto] & k - k'. & & \end{tikzcd}$$

◂

Ejemplo 20 ($G \to H$). Consideremos G y H dos grupos abelianos y $f: G \to H$ un homomorfismo de grupos. Construimos el complejo de cadenas C cuyo grado n es

$$C_n = \begin{cases} 0 & \text{resto,} \\ G & \text{si } n = 1, \\ H & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

y cuya única diferencial no nula es $f: C_1 \to C_0$. Comencemos construyendo el cilindro:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 & H \oplus H \arrow[l] \arrow[d, "f\oplus f"] & H \arrow[l, "(\mathrm{Id},-\mathrm{Id})"'] \arrow[d, "-f"] & 0 \arrow[l] \\
0 & G \oplus G \arrow[l] \arrow[d] & G \arrow[l, "(\mathrm{Id},-\mathrm{Id})"'] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Si sumamos ahora en la diagonal obtenemos

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{cyl}(C)_{-1} & \longleftarrow & \mathrm{cyl}(C)_0 & \longleftarrow & \mathrm{cyl}(C)_1 & \longleftarrow & \mathrm{cyl}(C)_2 & \longleftarrow & \mathrm{cyl}(C)_3 \\
0 & \longleftarrow & G \oplus G & \longleftarrow & H \oplus H \oplus G & \longleftarrow & H & \longleftarrow & 0 \\
 & & (f(h)+g, f(h')-g) & \longleftarrow\!\shortmid & (h,h',g) & & & & \\
 & & & & (h,-h,-f(h)) & \longleftarrow\!\shortmid & h. & &
\end{array}$$

Para el caso de objeto de caminos, el bicomplejo de cadenas $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(I_p, C_q)$ viene dado por

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & H \oplus H \arrow[r, "\mathrm{Id}-\mathrm{Id}"] \arrow[d, "(f,f)"] & H \arrow[r] \arrow[d, "-f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & G \oplus G \arrow[r, "\mathrm{Id}-\mathrm{Id}"] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

y si sumamos en la diagonal

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{path}(C)_{-2} & \longleftarrow & \mathrm{path}(C)_{-1} & \longleftarrow & \mathrm{path}(C)_0 & \longleftarrow & \mathrm{path}(C)_1 & \longleftarrow & \mathrm{path}(C)_2 \\
0 & \longleftarrow & G & \longleftarrow & G \oplus G \oplus H & \longleftarrow & H \oplus H & \longleftarrow & 0 \\
 & & g-g'-f(h) & \longleftarrow\!\shortmid & (g,g',h) & & & & \\
 & & & & (f(h), f(h'), h-h') & \longleftarrow\!\shortmid & (h,h'). & &
\end{array}$$

Ejemplo 21. Con el ejemplo anterior en mente, repliquemos la construcción del cilindro en espacios topológicos, concretamente para el caso de S^1 con la descomposición celular dada por una 0-celda y una 1-celda, es decir, $S^1 = e^0 \cup e^1$. En ese caso, el complejo celular es como el anterior:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \to 0.$$

Además, vamos a considerar la descomposición celular del intevalo $I = e^0_0 \cup e^0_1 \cup e^1_I$.

Por tanto, tenemos que la descomposición celular de $S^1 \times I$ (ver figura 2) es la siguiente:

$$\begin{array}{ll}
\text{0-celdas:} & (e^0 \times e^0_0),\ \ (e^0 \times e^0_1). \\
\text{1-celdas:} & (e^1 \times e^0_0),\ \ (e^1 \times e^0_1),\ \ (e^0 \times e^1_I). \\
\text{2-celdas:} & (e^1 \times e^1_I).
\end{array}$$

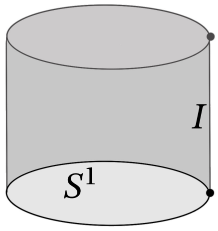

Figura 2: $S^1 \times I$.

Por tanto, su complejo de cadenas celular es

$$0 \to \langle e^1 \rangle \xrightarrow{\partial_2} \langle e^1 \rangle \oplus \langle e^1 \rangle \oplus \langle e^0 \rangle \xrightarrow{\partial_1} \langle e^0 \rangle \oplus \langle e^0 \rangle$$

donde la diferencial viene dada por la aplicación de adjunción, es decir,

$$\begin{aligned} \partial_2(h) &= (h, -h, \partial h), \\ \partial_1(h, h', g) &= (\partial(h) + g, \partial(h') - g). \end{aligned}$$

◂

Ejercicio 1. El ejemplo anterior ilustra que, dado un CW-complejo, la construcción del objeto cilindro en complejos de cadenas imita a la construcción en espacios topológicos y después tomar cadenas celulares. ¿Pasará algo similar con la construcción del objeto de caminos? ◂

En ocasiones, y por el carácter dual de cyl y path, en el contexto de complejos de cadenas, al objeto de caminos se le suele llamarse cocilindro (y se denota por cocyl). No obstante, lo llamaremos path por semejanza a lo que ocurre en espacios topológicos en cuanto a que, en lugar de pensar $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(I, -)$, hacemos $\mathrm{Hom}(I, -)$. El carácter dual de esta construcción lo veremos aun más claro en la sección 2.4.

Teorema 22. *Dado un complejo de cadenas C, las siguientes aplicaciones son equivalencias de homotopía:*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{path}(C) & \underset{\sigma}{\overset{\tau}{\rightleftarrows}} & C & \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\leftrightarrows}} & \mathrm{cyl}(C) \\ (c, 0, c) & \longleftarrow\!\shortmid & c & \longmapsto & (c, 0, 0) \\ & & c + c'' & \longleftarrow\!\shortmid & (c, c', c'') \\ (c, c', c'') & \longmapsto & c''. & & \end{array}$$

Demostración. Probemos el caso $C \overset{\sigma}{\to} \mathrm{path}(C) \overset{\tau}{\to} C$, ya que el otro es análogo. Se tiene que $\tau\sigma(c) = \tau(c, 0, c) = c$, por lo que $\tau\sigma = \mathrm{Id}C$. Comprobemos que $\sigma\tau \simeq \mathrm{Id}_{\mathrm{path}(C)}$. Para ello, definimos explícitamente la homotopía. Sea $s\colon\ \mathrm{path}(C) \to \mathrm{path}(C)$ de grado 1, dada por la fórmula $s(c, c', c'') = (c', 0, 0)$. Se verifica que

$$(c, c', c'') - \sigma\tau(c, c', c'') = (c, c', c'') - (c'', 0, c'') = (c - c'', -c', 0).$$

Por otro lado, $(\partial s + s\partial)(c, c', c'') = (c - c'', -c', 0)$. Por tanto, $\mathrm{Id} - \sigma\tau = s\partial + \partial s$, lo que nos dice que $\mathrm{Id} \simeq \sigma\tau$. ■

Proposición 23 ([4, Proposición 18.3.6]). *Sea $f\colon C \to D$ una aplicación entre complejos de cadenas. f es una cofibración (según el teorema 12) si y solo si, para todo $B \in \mathrm{Ch}$, el siguiente diagrama se levanta:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathrm{path}(B) \arrow[d, "p_0"] \\ D \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Y, dualmente, f es una fibración si y solo si, para todo $B \in \mathrm{Ch}$, el siguiente diagrama se levanta:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d, "i_0"] & C \arrow[d] \\ \mathrm{cyl}(B) \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

Esta proposición nos da una caracterización de las cofibraciones (resp. fibraciones) como las aplicaciones que tienen la propiedad de extensión (resp. levantamiento) de homotopías. La prueba de esta proposición es puramente algebraica y se deja como ejercicio para el lector, aunque se puede consultar en [4, Sección 18.3]. Es común encontrar la definición de la categoría de modelos introducida en el teorema 12 en función de los objetos cilindros y caminos, ya que de esta forma se crea aún más un paralelismo con la categoría de modelos de Hurewicz (ver teorema 6).

2.2. Relación de homotopía

A continuación comprobaremos que, en efecto, dos aplicaciones entre complejos de cadenas son homótopas si (y solo si) son homótopas en el sentido de serlo en categoría de modelos descrito en el teorema 12.

Teorema 24. *Sean $f, g\colon C \to D$ dos aplicaciones entre complejos de cadenas. Son equivalentes:*

1. *$f \simeq g$ (según la definición 10).*
2. *Existe una aplicación H que cierra el diagrama*

$$\begin{tikzcd} C \oplus C \arrow[r, "f+g"] \arrow[d, "in_0 \oplus in_1"'] & D \\ \mathrm{cyl}(C) \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

Y, por tanto, f es homótopa a g por la izquierda.

Demostración. Como $f \simeq g$, existe una aplicación $s\colon C \to D$ de grado 1 tal que $f - g = s\partial + \partial s$. Definimos $H\colon \mathrm{cyl}(C) \to D$ por $H(c, c', c'') = f(c) + g(c'') + s(c')$. Hay que ver que es una aplicación de complejos de cadenas, es decir, para todo $n \in \mathbb{Z}$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} (c,0,0) \arrow[d, mapsto] \\ (\partial(c) + c', -\partial(c'), \partial(c'') - c') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_n \oplus C_{n-1} \oplus C_n \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\partial"] & D_n \arrow[d, "\partial"] \\ C_{n-1} \oplus C_{n-2} \oplus C_{n-1} \arrow[r, "H"] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$

Por un lado tenemos que

$$\partial H(c, c', c'') = \partial f(c) + \partial s(c') + \partial g(c''),$$

y por otro lado tenemos que

$$H\partial(c, c', c'') = h(\partial c + c', -\partial c', \partial c'' - c') = f(\partial c + c') - s\partial c' + g(\partial c'' - c').$$

Por linealidad de f y g se tiene que

$$\partial f(c) + \partial s(c') + \partial g(c'') = f(\partial c) + f(c) - s\partial c' + g(\partial c'') - g(c').$$

Por hipótesis, f y g son aplicaciones de complejos de cadenas, luego $\partial f = f\partial$ y $\partial g = g\partial$, y por tanto

$$\partial s(c') = f(c) - s\partial c' - g(c').$$

Pero $f - g = s\partial + \partial s$, y entonces $\partial H = H\partial$ y es la homotopía que buscamos.

Recíprocamente, veamos que la aplicación $s_n : C_n \to D_{n+1}$ dada por $s_n(c) = H(0, c, 0)$ es la aplicación que buscamos. En efecto,

$$s\partial(c) + \partial s(c) = H(0, \partial c, 0) + \partial H(0, c, 0).$$

Pero H es una aplicación de complejos de cadenas, por lo que $\partial H = H\partial$, luego

$$s\partial(c) + \partial s(c) = H(0, \partial c, 0) + H(c, -\partial c, -c) = H(c, 0, -c) = f(c) - g(c). \qquad \blacksquare$$

Como sabemos que la relación de homotopía en Ch es una relación de equivalencia, entonces la relación de homotopía por la izquierda (en la categoría de modelos del teorema 12) también lo es. Veamos ahora que esta coincide con la relación de homotopía por la derecha.

Teorema 25. *Sean $f, g : C \to D$ aplicaciones entre complejos de cadenas. Entonces, son equivalentes:*

1. *$f \simeq g$ (Según la definición 10).*
2. *Existe una aplicación $H : C \to \mathrm{path}(D)$ que cierra el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{path}(D) \arrow[d, "(p_0, p_1)"] \\ C \arrow[ur, "H"] \arrow[r, "(f,g)"'] & D \oplus D \end{tikzcd}$$

de lo que se deduce que f es homótopa a g por la derecha.

Demostración. Supongamos que $f \simeq g$; entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe una aplicación $s_n : C_n \to D_{n+1}$ tal que $f - g = s\partial + \partial s$. Veamos que la aplicación $H : C \to \mathrm{path}(D)$ dada por $H = (f, s, g)$ es la aplicación buscada. Una comprobación directa muestra que H hace el diagrama conmutativo, por lo que solo hay que ver que es, en efecto, una aplicación de complejo de cadenas. Pero esto es elemental, ya que

$$\partial H = \partial(f, s, g) = (\partial f, g - f - \partial s, \partial g).$$

Ahora bien, sabemos que $g - f - \partial s = s\partial$ y que f y g conmutan con la diferencial, por lo que

$$\partial H = \partial(f, s, g) = (\partial f, g - f - \partial s, \partial g) = (f\partial, s\partial, g\partial) = H\partial.$$

Recíprocamente, supongamos que existe $H : C \to \mathrm{path}(D)$ que cierra el diagrama. En cada grado $H = (f, h, g)$ y, además, H es una aplicación de complejo de cadenas, es decir, $\partial H = H\partial$, esto es,

$$(\partial f, f - g - \partial h, \partial g) = \partial H = H\partial(f\partial, h\partial, g\partial).$$

Deducimos que la aplicación de grado uno $h : C \to D$ verifica $f - g = \partial h + h\partial$, por lo que concluimos que $f \simeq g$. $\blacksquare$

En resumen, lo que nos dicen estos teoremas es que

$$\begin{tikzcd} f \overset{r}{\sim} g \arrow[rr, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & & f \overset{l}{\sim} g \arrow[dl, Leftrightarrow] \\ & f \simeq g & \end{tikzcd}$$

Estas equivalencias se deben a que, para todo complejo de cadenas C, las aplicaciones $0 \to C$ y $C \to 0$ son, respectivamente, cofibraciones y fibraciones en la categoría de modelos del teorema 12.

2.3. Cono

Si pensamos en el ejemplo 14, esto nos dice que, para la estructura de categoría de modelos descrita en el teorema 15 (o 16), ser una equivalencia débil no implica tener una inversa homotópica. En tal caso, para detectar equivalencias débiles en la categoría de modelos del teorema 15 (o 16) o cuasi-isomorfismos nos apoyaremos de una construcción similar a las anteriores.

Definición 26. Dada una aplicación $f : C \to D$ entre complejos de cadenas, definimos el **cono de** f como el complejo de cadenas $\operatorname{cone}(f)$ cuyo grado n es $C_{n-1} \oplus D_n$ y la diferencial viene dada por la fórmula

$$\delta(c, d) = (-\delta c, \delta(d) - f(c)).$$

Asimismo, dado un complejo de cadenas C, definimos $\operatorname{cone}(C)$ como el complejo de cadenas $\operatorname{cone}(\mathrm{Id}_C)$. ◂

Teorema 27 ([7, Corolario 1.5.4]). *Una aplicación $f : C \to D$ entre complejos de cadenas es un cuasi-isomorfismo si y solo si el complejo de cadenas* $\operatorname{cone}(f)$ *es exacto.*

Ejemplo 28. Consideremos la aplicación descrita en el ejemplo 14. En tal caso, $\operatorname{cone}(f)$ es

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

$$k \longmapsto 2k \qquad (k, \overline{k'}) \longmapsto 2k$$

$$k \longmapsto (0, -\overline{k}) \qquad k \longmapsto -\overline{k}.$$

Un cálculo directo comprueba que la sucesión es exacta. ◂

2.4. Cilindro y caminos de una aplicación

Una construcción con la que estamos muy familiarizados en espacios topológicos es el cilindro de una aplicación. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Definimos el cilindro de f como el espacio topológico

$$\operatorname{cyl}(f) = (X \times I) \sqcup Y/_{(x,1)\sim f(x)}.$$

Esto es, en lenguaje categórico, el pushout

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f"] & X \times I \arrow[d, dashed] \\ Y \arrow[r, dashed] & \operatorname{cyl}(f) \end{tikzcd}$$

Se verifica trivialmente que

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{cyl}(X) \arrow[dr, two heads, "\sim"] & \\ X \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "f"] & & Y \end{tikzcd}$$

Veamos que esto mismo se puede definir para complejos de cadenas y que, para toda aplicación entre complejos de cadenas, nos da la descomposición A5. definición 2 de categoría de modelos.

Definición 29. Dada una aplicación $f : C \to D$ entre complejos de cadenas, definimos el **objeto cilindro de** f, que denotaremos por $\operatorname{cyl}(f)$, como el pushout

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "f"] & \operatorname{cyl}(C) \arrow[d, dashed] \\ D \arrow[r, dashed] & \operatorname{cyl}(f) \end{tikzcd}$$

y el **objeto de caminos de** f, $\mathrm{path}(f)$, como el pullback

$$\begin{tikzcd} \mathrm{path}(f) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & C \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{path}(D) \arrow[r, "p_0"] & D \end{tikzcd}$$

Aunque estas definiciones para los complejos de cadenas $\mathrm{path}(f)$ y $\mathrm{cyl}(f)$ en términos de propiedades universales de pullbacks y pushouts son muy útiles y permiten trabajar bien en el contexto de categoría de modelos, en el contexto del álgebra homológica no son tan prácticas. Para ellos introduciremos una definición explícita (se deja como ejercicio comprobar que ambas coinciden).

Definición 30. Dada una aplicación entre complejos de cadenas $f : C \to D$, definimos $\mathrm{cyl}(f)$ como el complejo de cadenas

$$\begin{aligned} \mathrm{cyl}(f) : \dots \longrightarrow C_n \oplus C_{n-1} \oplus D_n &\longrightarrow C_{n-1} \oplus C_{n-2} \oplus D_{n-1} \longrightarrow \dots \\ (c, c', d) &\longmapsto (\delta c + c', -\delta c', \delta d - f(c')), \end{aligned}$$

y $\mathrm{path}(f)$ como el complejo de cadenas

$$\begin{aligned} \mathrm{path}(f) : \dots \longrightarrow C_n \oplus D_{n+1} \oplus D_n &\longrightarrow C_{n-1} \oplus D_n \oplus D_{n-1} \longrightarrow \dots \\ (c, d, d') &\longmapsto (\delta c, d' - f(c) - \delta d, \delta d'). \end{aligned}$$

Observación 31. Sea C un complejo de cadenas. Se verifica que $\mathrm{path}(C) = \mathrm{path}(\mathrm{Id}_C)$ y $\mathrm{cyl}(C) = \mathrm{cyl}(\mathrm{Id}_C)$.

Proposición 32. *Dada una aplicación $f : C \to D$ entre complejos de cadenas, f admite dos descomposiciones:*

$$\begin{aligned} C \hookrightarrow \mathrm{cyl}(f) &\xrightarrow{\sim} D \\ (c, c', d) &\longmapsto d + f(c) \\ c \longmapsto (c, 0, 0). & \end{aligned} \qquad \begin{aligned} C \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathrm{path}(f) &\longrightarrow D \\ c &\longmapsto (c, 0, f(c)) \\ (c, d, d') &\longmapsto d'. \end{aligned}$$

Demostración. Lo probaremos para el complejo $\mathrm{path}(f)$, siendo el otro totalmente análogo. Utilizaremos herramientas de álgebra homológica; no obstante, se puede (y se propone como ejercicio para el lector más experimentado) probar este resultado utilizando exclusivamente propiedades de categoría de modelos.

Comencemos viendo que $m : C \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathrm{path}(f)$ es una cofibración acíclica. Una adaptación de la prueba del teorema 22 demuestra que es una equivalencia débil, por lo que solo hay que ver que es una cofibración. Por definición es inyectiva, por lo que solo hay que ver que existe $r : \mathrm{path}(f) \to C$ tal que $r \circ m = \mathrm{Id}C$. Para ello, definimos $r(c, d', d) = c$ y se cumple que

$$rm(c) = r(c, 0, f(c)) = c.$$

Por otro lado, hay que ver que $e : \mathrm{path}(f) \twoheadrightarrow D$ es una fibración. De la definición se sigue que es sobreyectiva, por lo que solo hay que ver que escinde, esto es, que existe $s : D \to \mathrm{path}(f)$ tal que $e \circ s = \mathrm{Id}D$. Para ello definimos $s(d) = (0, 0, d)$ y se cumple que

$$es(d) = e(0, 0, d) = d. \qquad \blacksquare$$

En el caso de $f = \mathrm{Id}$ obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 33. *Para todo complejo de cadenas C, se tiene que las aplicaciones de la definición 5*

$$C \oplus C \xhookrightarrow[i_0+i_1]{} \mathrm{cyl}(C) \xrightarrow[p]{\sim} C, \qquad C \xhookrightarrow[i]{\sim} \mathrm{path}(C) \xrightarrow[(p_0,p_1)]{} C \oplus C$$

verifican que, para el cilindro, $i_0 + i_1$ es una cofibración y p es una fibración acíclica, y para el objeto de caminos, i es una cofibración acíclica y (p_0, p_1) es una fibración.

En una categoría de modelos, si un objeto cilindro (resp. camino) verifica el corolario anterior, se dice que es un muy buen objeto cilindro (resp. camino).

Referencias

[1] Dwyer, W. G. y Spaliński, J. «Homotopy theories and model categories». En: *Handbook of algebraic topology*. North-Holland, Amsterdam, 1995, págs. 73-126.

[2] Hirschhorn, Philip S. *Model categories and their localizations*. Vol. 99. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[3] MacLane, Saunders. *Categories for the working mathematician*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.

[4] May, J. P. y Ponto, K. *More concise algebraic topology*. Chicago Lectures in Mathematics. Localization, completion, and model categories. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2012.

[5] Munkres, James R. *Topology*. Second edition of [MR0464128]. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000.

[6] Quillen, Daniel G. *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.

[7] Weibel, Charles A. *An introduction to homological algebra*. Vol. 38. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.