

# El espacio de deformaciones de variedades tridimensionales hiperbólicas orientables

✉ Juan Luis Durán Batalla  
Universitat Autònoma de Barcelona  
jduran@mat.uab.cat

**Resumen:** Sea  $M$  una variedad de dimensión 3 hiperbólica, orientada, completa y de volumen finito. El problema que nos planteamos es encontrar las métricas hiperbólicas obtenidas deformando una fijada. Para ello, trabajaremos con variedades que se puedan triangular mediante un número finito de tetraedros ideales, *i.e.*, topológicamente sin vértices. La existencia de una triangulación permite deformar la métrica original de un modo muy sencillo: recordando el patrón de pegado de los tetraedros, podemos modificarlos individualmente y pedir que se cumplan unas condiciones que garanticen un *buen* pegado. El conjunto de posibles parámetros para los tetraedros que cumplen estas condiciones se conoce como el espacio de deformaciones de la variedad. Thurston demostró que dicho espacio de deformaciones en torno a la métrica completa se puede parametrizar por un abierto de  $\overline{\mathbb{C}}^k$ , donde  $k$  es el número de *cúspides* o clases de vértices (suprimidos) en la triangulación. El resultado de Thurston es independiente de la triangulación fijada, debido a que el número de cúspides es un concepto topológico. Estas notas pretenden dar una idea de las nociones básicas que son necesarias para demostrar y entender el resultado anterior.

**Abstract:** Let  $M$  be a hyperbolic 3-manifold, oriented, complete and of finite volume. The problem we are tackling here is the one of finding the hyperbolic metrics which are obtained by deforming a fixed one. In order to do so, we will work with manifolds which can be triangulated through a finite number of ideal tetrahedra, *i.e.*, topologically without vertices. The existence of a triangulation allows to deform the original metric in a very simple way: recalling the gluing pattern of the tetrahedra, we can modify them individually and ask for some conditions to be met, which guarantee a *nice* gluing. The set of parameters for the tetrahedra satisfying the previous conditions is known as the deformations space of the manifold. Thurston proved that such deformation space around the complete metric can be parametrized by an open set of  $\overline{\mathbb{C}}^k$ , where  $k$  is the number of *cusps* or (deleted) vertex classes in the triangulation. Thurston's result is independent on the fixed triangulation, due to the fact that the number of cusps is a topological concept. These notes intend to give an idea of the basics notions which are necessary to prove and understand the aforementioned result.

**Palabras clave:** variedad tridimensional hiperbólica, triangulación ideal.

**MSC2010:** 57K32.

**Agradecimientos:** Parcialmente financiado por el proyecto MTM2015-66165-P y la ayuda BES-2016-079278 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades.

**Referencia:** DURÁN BATALLA, Juan Luis. «El espacio de deformaciones de variedades tridimensionales hiperbólicas orientables». En: *TEMat monográficos*, 3 (2021): *Actas del VIII Encuentro de Jóvenes Topólogos*, págs. 41-55. ISSN: 2660-6003. URL: <https://temat.es/monograficos/article/view/vol3-p41>.

## 1. Introducción

Uno de los mayores avances en el estudio de variedades tridimensionales es lo que se conoce como el teorema de geometrización de Thurston. Este teorema afirma que toda variedad tridimensional cerrada (compacta y sin borde) puede ser cortada en piezas de tal manera que cada una de estas piezas tenga una geometría de entre ocho estructuras geométricas [5, 12]. Entre estas ocho estructuras geométricas se encuentran los espacios de curvatura constante: la esfera (curvatura +1), el espacio euclidiano (curvatura 0) y el espacio hiperbólico (curvatura -1). De ellos, el más interesante es el hiperbólico; de hecho, dicho en un sentido algo vago, casi toda 3-variedad es hiperbólica. En palabras de Thurston [12]: «*of these eight, hyperbolic geometry is by far the most interesting, the most complex, and the most useful. The other seven come into play only in exceptional cases*». En la segunda sección del texto, veremos las nociones básicas de espacio hiperbólico y variedad hiperbólica, dando varios modelos equivalentes.

La conjetura de geometrización puede considerarse un análogo al teorema de uniformización a dimensión 3. Dicho teorema, en el cual Poincaré jugó un papel fundamental [8], implica que toda superficie de Riemann admite una métrica de curvatura constante: para las de género mayor o igual que 2 es de curvatura -1 (hiperbólica), siendo las excepciones el toro, de curvatura 0 (euclidiana) y la esfera, de curvatura +1 (esférica).

La influencia del trabajo de Poincaré en el de Thurston va más allá del teorema de uniformización. Poincaré también introdujo el concepto de triangulación de una variedad, esencial para el estudio combinatorio de estas. En este sentido, destacamos en particular el teorema fundamental del poliedro de Poincaré [4], que da las condiciones para que un poliedro en la esfera, el espacio euclidiano o el hiperbólico, con las caras identificadas por isometrías, dé lugar a una variedad. Thurston continúa con esta idea y trabaja con un tipo particular de triangulaciones llamadas ideales: los tetraedros de la triangulación están en el espacio hiperbólico, pero dichos tetraedros no tienen vértices. De esta manera, dedicamos la tercera sección del texto a ver un ejemplo que es esencial en el trabajo de Thurston, así como la definición formal de triangulación ideal y algunas propiedades.

En la primera parte de la última sección se ven las ecuaciones de compatibilidad necesarias para que deformaciones en los tetraedros de una triangulación den de nuevo lugar a una variedad. Las ecuaciones de compatibilidad se derivan esencialmente del teorema fundamental del poliedro de Poincaré. Finalizamos enunciando los teoremas que desencaminan al teorema de Thurston enunciado en el resumen: las deformaciones de la métrica hiperbólica completa se corresponden con un abierto de  $\overline{\mathbb{C}}^k$ , donde  $k$  es el número de vértices suprimidos en la triangulación (equivalentemente, cúspides). Una de las aplicaciones más importante de este resultado es que existen infinitos casos donde el espacio con la nueva métrica, tras completarse, da lugar a una nueva variedad hiperbólica completa. Esto permite construir sucesiones de variedades  $M_n$  tendiendo a la variedad original  $M$ .

Este resultado se presenta en yuxtaposición con el teorema de rigidez de Mostow-Prasad, que dice aproximadamente que si una variedad de volumen finito admite una estructura hiperbólica completa, esta es única. La consecuencia del teorema de Thurston es que, no obstante, podemos encontrar variedades hiperbólicas (no homeomorfas) tan cerca de la original como queramos.

## 2. Variedades hiperbólicas

Comenzaremos la sección la definición del espacio hiperbólico. Nos centraremos en los casos de dimensión 2 y 3, las definiciones y modelos que veremos se pueden generalizar a cualquier dimensión. En la segunda subsección definiremos con precisión qué es una variedad hiperbólica. Unas buenas referencias para esta sección son [10] y [1].

### 2.1. El espacio hiperbólico

Consideramos en primer lugar en  $\mathbb{R}^3$  la siguiente forma bilinear simétrica:

$$(1) \quad \langle v, w \rangle := v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 - v_3 \cdot w_3.$$

A dicha forma bilineal se la denomina *producto interior lorentziano*. Dado  $v \in \mathbb{R}^3$ , se define la norma de  $v$  respecto a dicho producto interior como  $\|v\| := \langle v, v \rangle$ .

**Definición 1.** Sea  $\mathbb{R}^3$  junto con el producto interior lorentziano. El espacio hiperbólico de dimensión 2, denotado  $\mathbb{H}^2$ , se define como sigue:

$$\mathbb{H}^2 := \{v \in \mathbb{R}^3 : v_3 > 0 \text{ y } \|v\| = -1\}.$$

De manera análoga, en  $\mathbb{R}^4$ , se define el producto interior lorentziano como

$$(2) \quad \langle v, w \rangle := v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3 - v_4 \cdot w_4.$$

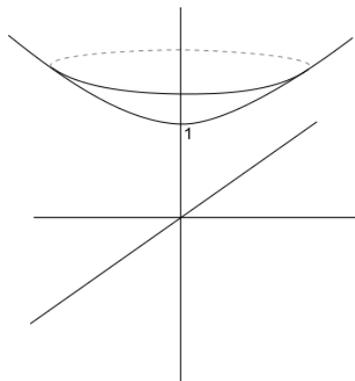
Con él, podemos definir el espacio hiperbólico de dimensión 3 como

$$\mathbb{H}^3 := \{v \in \mathbb{R}^4 : v_4 > 0 \text{ y } \|v\| = -1\}. \quad \blacktriangleleft$$

Dada una superficie,  $S$ , inmersa en  $\mathbb{R}^3$ , y  $p \in S$ , tenemos el plano tangente en  $p$ , que denotamos  $T_p S$ . Para cada punto en la superficie y su correspondiente plano tangente, tenemos la primera forma fundamental. La primera forma fundamental viene inducida por el producto euclidiano usual de  $\mathbb{R}^3$  y permite calcular ángulos entre vectores tangentes, distancias, etc. De hecho, la primera forma fundamental no es más que la métrica riemanniana en  $S$  como subvariedad de  $\mathbb{R}^3$ . De igual manera tenemos que en  $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^3$  el producto interior lorentziano define, para cada punto  $p \in \mathbb{H}^2$ , una métrica en su espacio tangente  $T_p \mathbb{H}^2$ . Pese a que el producto lorentziano no es definido positivo, la métrica inducida en cada espacio tangente  $T_p \mathbb{H}^2$  sí lo es, por lo que  $\mathbb{H}^2$  es una variedad riemanniana. Lo anterior se generaliza sin problemas a  $\mathbb{H}^3$ .

Dados  $v, w \in \mathbb{H}^3$ , la distancia inducida por la métrica riemanniana,  $d_{\mathbb{H}^3}(v, w)$ , satisface que  $\langle v, w \rangle = \cosh(d_{\mathbb{H}^3}(v, w))$  (la fórmula se cumple también en  $\mathbb{H}^2$ ). Las isometrías del espacio hiperbólico son precisamente restricciones a  $\mathbb{H}^3$  de las aplicaciones lineales de  $\mathbb{R}^4$  que preservan el producto interior lorentziano  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , así como los vectores *de tipo tiempo positivos*, es decir, aquellos con norma negativa (tipo tiempo) y última coordenada positiva. El grupo de matrices  $4 \times 4$  que lo satisface es el grupo de *transformaciones de Lorentz positivas* y se denota por  $PO(1, 3)$ .

Por último, las geodésicas del espacio son intersecciones de  $\mathbb{H}^3$  con subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^4$  de dimensión 2. En  $\mathbb{H}^2$  las geodésicas también son restricciones de subespacios vectoriales bidimensionales, pero de  $\mathbb{R}^3$ . Análogamente, los hiperplanos de  $\mathbb{H}^3$  son subespacios vectoriales de dimensión 3 en  $\mathbb{R}^4$  intersecados con  $\mathbb{H}^3$ .



**Figura 1:** El espacio hiperbólico bidimensional.

Al anterior modelo se lo conoce por *modelo del hiperboloide*. No obstante, existen otros dos modelos, que son los que utilizaremos principalmente: el *modelo del disco de Poincaré* y el *modelo del semiplano superior*.

En el modelo del disco de Poincaré, nuestro espacio es la bola unidad abierta centrada en 0 en  $\mathbb{R}^n$  (con la norma euclidiana usual),  $n = 2, 3$  dependiendo de si hablamos del espacio hiperbólico bi o tridimensional.

Sin embargo, la métrica que tomaremos en  $B(0, 1)$  no será la euclidiana, sino  $ds^2 = \frac{4 \sum dx_i^2}{(1 - \|x\|^2)^2}$ . Usualmente denotamos al espacio por  $D^3$  ( $D^2$  en el caso bidimensional) para diferenciarlo de la bola con la métrica euclidiana. Con esta nueva métrica, las geodésicas son segmentos de circunferencia perpendiculares al borde de la bola,  $S(0, 1)$ , en un sentido euclidiano usual. Análogamente, los hiperplanos (en  $D^3$ ) son secciones de esfera euclídea contenida en  $B(0, 1)$  y perpendicular al borde de la bola  $S(0, 1)$ . La esfera  $S(0, 1)$ , pese a no ser parte del espacio hiperbólico, juega un papel importante en la teoría: se denomina la *frontera en el infinito* del espacio hiperbólico, denotada por  $\partial_\infty(D^3)$ .

El otro modelo, el del semiplano superior, será en el que más trabajaremos, ya que algunas de las definiciones o resultados que veremos son prácticamente inmediatos. Mantenemos la notación  $\mathbb{H}^2$  o  $\mathbb{H}^3$ . Para  $\mathbb{H}^3$ , el espacio será el semiespacio superior de  $\mathbb{R}^3$ , es decir,  $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$ . Análogamente, para  $\mathbb{H}^2$  será el semiplano superior. La métrica que tomamos es  $ds^2 = \frac{\sum dx_i^2}{x_n^2}$ , donde  $n = 2, 3$  dependiendo de si estamos en  $\mathbb{H}^2$  o  $\mathbb{H}^3$ . Es importante remarcar que, si nos restringimos a un plano euclidiano horizontal, la métrica es un múltiplo de la métrica euclidiana. Las geodésicas son de nuevo segmentos de circunferencia perpendiculares a la *frontera en el infinito*,  $\partial_\infty(\mathbb{H}^3)$ . Para ver cuál es la frontera en el infinito, es necesario saber que el paso del modelo del disco al del semiplano es a través de una cierta transformación de Möbius. La frontera en el infinito en este modelo sigue siendo topológicamente una esfera, la transformación de Möbius hace algo similar a la proyección estereográfica: envía  $S(0, 1)$  (la frontera en el infinito del modelo del disco) a  $(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cup \{\infty\}$ . Consecuentemente, las geodésicas en  $\mathbb{H}^3$  son secciones de circunferencia perpendiculares al plano horizontal o segmentos verticales. En un sentido más general, los hiperplanos son secciones de esfera contenidos en  $\mathbb{H}^3$  y perpendiculares a la frontera, es decir, esferas con centro en  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  o planos verticales. En  $\mathbb{H}^2$  la imagen es similar, la frontera en el infinito son  $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \{\infty\}$  y las geodésicas son secciones de circunferencia perpendiculares a ella o segmentos verticales.

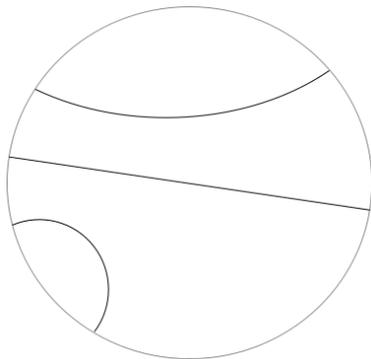


Figura 2: Disco de Poincaré.

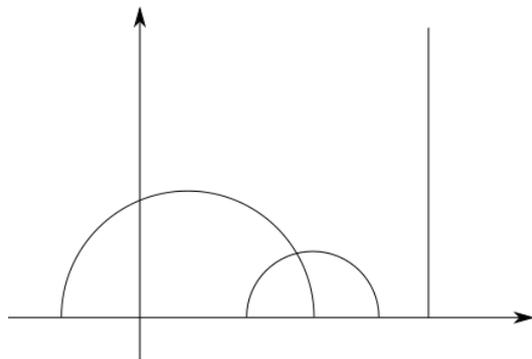


Figura 3: Semiplano Superior.

Tanto en el modelo del disco de Poincaré como en el del semiplano superior, se puede demostrar que las isometrías son precisamente las transformaciones de Möbius, es decir, composición de inversiones en esferas y reflexiones en planos, que dejan el respectivo espacio,  $D^3$  o  $\mathbb{H}^3$ , invariante. Además, la restricción a la frontera en el infinito,  $S(0, 1)$  en el caso del disco,  $(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cup \{\infty\}$ , en el del semiplano, determina biunívocamente la isometría. Sabemos que  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \simeq \bar{\mathbb{C}}$ , es decir, la esfera de Riemann. En  $\bar{\mathbb{C}}$  las transformaciones de Möbius que preservan la orientación son las transformaciones lineales fraccionales:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0.$$

Este grupo se identifica con  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

La característica principal del espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  es que tiene curvatura seccional constante  $-1$ .

## 2.2. Variedades hiperbólicas

Ahora pasaremos a la cuestión de ver qué es una estructura hiperbólica en una variedad  $M$  (por simplicidad, la tomaremos sin frontera), lo cual es un caso particular de  $(G, X)$ -estructuras, donde  $X$  denota

a una variedad analítica real (de la misma dimensión que  $M$ ) y  $G$ , un grupo de Lie actuando en  $X$  fiel y analíticamente. Frecuentemente  $X$  será el espacio euclídeo, la esfera o el espacio hiperbólico y  $G$ , un subgrupo de isometrías de  $X$ . Comencemos por la definición general.

**Definición 2.** Un  $(G, X)$  atlas de  $M$  es una colección de cartas  $\phi_i : U_i \rightarrow X$ , satisfaciendo que

1.  $\{U_i\}$  es un recubrimiento por abiertos de  $M$ ;
2. cada  $\phi_i$  es un homeomorfismo con su imagen, y
3. para cada  $x \in U_i \cap U_j$ , existe un entorno  $N(x)$  de  $x$  contenido en  $U_i \cap U_j$  y un elemento  $g \in G$  tal que

$$\phi_i|_{N(x)} = g \circ \phi_j|_{N(x)}. \quad \blacktriangleleft$$

Notemos que la última condición es equivalente a decir que los cambios de cartas son localmente elementos de  $g$ : intuitivamente, estamos modelando nuestra variedad a partir de  $X$  con cambios de cartas isometrías de  $X$ . Además, se tiene que un  $(G, X)$ -atlas determina un único  $(G, X)$ -atlas maximal.

**Definición 3.** Una  $(G, X)$ -estructura en  $M$  es un  $(G, X)$ -atlas maximal.  $\blacktriangleleft$

**Definición 4.** Una variedad  $M$  se dice hiperbólica si admite una  $(\mathbb{H}^n, \text{Isom}(\mathbb{H}^n))$ -estructura.  $\blacktriangleleft$

Si  $X$  es una variedad riemanniana,  $M$  hereda una estructura riemanniana definida por el requisito de que las cartas sean isometrías. El siguiente resultado nos permite relacionar variedades riemannianas y estructuras hiperbólicas.

**Teorema 5** (Cartan–Ambrose–Hicks). *Una variedad riemanniana  $M$  completa, conexa y simplemente conexa de curvatura seccional constante  $-1$  es isométricamente difeomorfa a  $\mathbb{H}^n$ .*

Además, también se da el siguiente teorema.

**Teorema 6.** *Toda  $(G, X)$ -variedad conexa, simplemente conexa y completa es isométricamente isomorfa a  $X$ . En particular, si existe una variedad con estas propiedades,  $X$  es completa.*

Estos dos teoremas implican lo siguiente.

**Teorema 7.** *Si  $M$  es una variedad riemanniana completa y conexa de dimensión  $n$  y tiene curvatura constante  $-1$ , entonces  $M$  es el cociente de  $\mathbb{H}^n$  por un subgrupo discreto de isometrías actuando libremente. En particular,  $M$  es una variedad hiperbólica.*

No obstante, en el caso general, cuando la variedad no es completa, no es posible describirla como un cociente de  $\mathbb{H}^n$ , pero sigue siendo cierto que toda variedad riemanniana con curvatura seccional constante  $-1$  (o negativa, en general) admite una  $(X, G)$ -estructura. Lo anterior se debe a que el teorema de Cartan–Ambrose–Hicks fue demostrado en primer lugar en una versión local por Cartan. Consecuentemente, podemos dar otra definición equivalente de variedad hiperbólica.

**Definición 8.** Una variedad riemanniana  $M$  se dice hiperbólica si tiene curvatura seccional constante negativa.  $\blacktriangleleft$

Como ejemplo de variedades hiperbólicas, podemos decir que todas las superficies (orientables) de género mayor o igual que dos admiten estructuras hiperbólicas completas. De hecho, fijado un género  $g$ , el espacio de estructuras hiperbólicas completas que admite  $\Sigma_g$  se puede identificar con  $\mathbb{R}_+^{3g-1} \times \mathbb{R}^{3g-1}$ .

En el caso tridimensional, el siguiente resultado [1, pág. D.3.14] nos dice cómo son las variedades hiperbólicas de volumen finito.

**Teorema 9.** *Sea  $M$  una variedad hiperbólica de dimensión 3 conexa, orientable, completa y de volumen finito. Se tiene que  $M = \text{Int}(\bar{M})$ , donde  $\bar{M}$  es una variedad compacta, conexa y orientable cuya frontera es una unión disjunta de toros.*

Los toros de la frontera de la variedad  $\bar{M}$  se denominan *toros periféricos*. Como veremos más adelante, son una parte central en el estudio de las variedades de volumen finito.

### 3. Triangulaciones ideales de variedades hiperbólicas

De aquí en adelante, trataremos con variedades tridimensionales, conexas y orientables. Toda variedad completa se puede escribir como el cociente de  $\mathbb{H}^3$  por un subgrupo discreto de isometrías actuando libremente. No obstante, Thurston tuvo una idea muy fructífera para trabajar con estas variedades: la triangulación por tetraedros ideales. Veremos un ejemplo que fue un pilar principal en los resultados de Thurston y nos permite justificar el uso de estos tetraedros ideales. Más adelante precisaremos definiciones.

#### 3.1. Ejemplo esencial

**Definición 10.** Un nudo (en  $S^3$ ) es un embebimiento suave de  $S^1$  en  $S^3$ .

Consideramos el nudo del 8, del cual dibujamos en la figura 4 su representación planar.

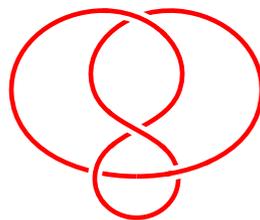


Figura 4: Nudo del 8.

Nos planteamos la siguiente cuestión: ¿el complemento del nudo del 8 en  $S^3$ , es decir,  $S^3 \setminus K$ , donde  $K$  es el nudo, admite una estructura hiperbólica? En 1975, R. Riley [11] demostró que, en efecto, era hiperbólico. Para ello, encontró una representación del grupo fundamental de la variedad como subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{C})$  y pudo demostrar que  $S^3 \setminus K$  era un cociente de  $\mathbb{H}^3$  por un subgrupo de isometrías. Sin embargo, a Thurston se le ocurrió un método constructivo de encontrar una estructura hiperbólica. El algoritmo que describiremos permite, para una gran familia de nudos, encontrar una triangulación de su complemento y, además, que esta triangulación sea «geométrica». Es decir, estos tetraedros serán tetraedros del espacio hiperbólico y estarán pegados por isometrías hiperbólicas.

A continuación describiremos informalmente el algoritmo:

- En primer lugar, proyectamos el nudo en un plano y separamos los puntos de intersección ligeramente fuera del plano. Recordemos que  $S^3$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ , así que el plano divide  $S^3$  en dos subespacios homeomorfos a una bola tridimensional: estas serán nuestras dos 3-celdas.

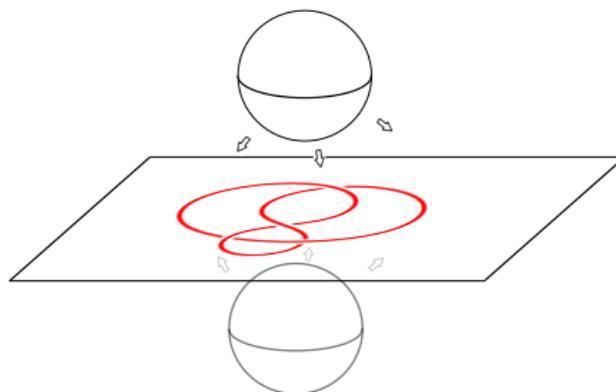


Figura 5: El plano del nudo separa en dos componentes conexas.

- Consideramos en cada uno de los dos semiespacios una esfera que vamos expandiendo hasta que cada una de las dos esferas empiece a entrar en contacto con el nudo. Si continuamos la expansión, el nudo dividirá la esfera en un número finito de regiones, que será por donde pegaremos las 3-celdas al finalizar el algoritmo.

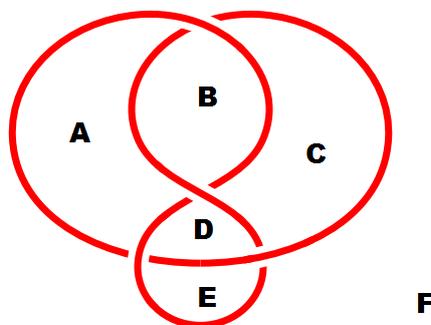


Figura 6: Regiones vistas desde la bola superior.

- Fuera de un entorno de las intersecciones (en el plano) del nudo consigo mismo, es posible realizar una homotopía de cada sección de cuerda delimitada por dichas autointersecciones a un punto. Cuando contraemos dichas secciones, el complemento del nudo no cambia topológicamente. El problema delicado es resolver las intersecciones.
- En las intersecciones añadimos una 1-celda vertical uniendo los segmentos de nudo inferior y superior. Esta 1-celda se corresponderá a aristas por donde realizaremos el pegado. Cuando consideramos estas 1-celdas, es posible extender las anteriores homotopías hasta las intersecciones sin que cambie la topología del complemento del nudo. (El proceso riguroso en este punto es bastante más complicado, nos remitimos para ello a [1, Fig. E.15-19]).

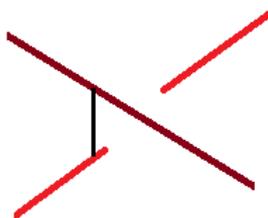


Figura 7: 1-celda vertical.

- Al aplicar los dos últimos pasos, es posible que nos quede alguna región con solo dos lados identificados, un *bígono*. Un bígono consiste en un polígono de 2 lados. Por ejemplo, si consideramos en una esfera dos puntos antipodales, es posible unirlos por dos geodésicas diferentes y construir así un bígono. Si durante el algoritmo llegamos aun bígono, podemos pegar los lados y eliminar la región.
- Tras finalizar este proceso, tendremos el plano visto desde arriba y desde abajo con cierto número de regiones identificadas. Ahora podemos subdividir las bolas o 3-celdas superior e inferior en poliedros que sigan el patrón de pegado anterior.

Al finalizar el algoritmo tenemos las 3-celdas, cuyo origen son las dos bolas que dividía el plano; las 2-celdas, las regiones que nos marca el nudo en las esferas; las 1-celdas, añadidas por nosotros en el cuarto paso, y 0-celdas, producto de las homotopías que contraían las secciones del nudo a un punto. Puesto que queremos triangular  $S^3 \setminus K$ , estas últimas, las 0-celdas, las debemos eliminar de la triangulación. Consecuentemente, en la triangulación final, los poliedros tendrán sus vértices suprimidos, ya que estos se corresponderían con el nudo.

Puesto que toda 3-variedad cerrada se puede construir a partir de nudos y enlaces (embebimientos de varias circunferencias) en  $S^3$ , el algoritmo anterior resulta muy general, así que tiene sentido considerar triangulaciones sin vértices para una variedad aunque desconozcamos su construcción mediante nudos y enlaces.

En el caso del nudo del 8, lo que obtenemos es una triangulación topológica por dos tetraedros sin sus vértices. Para dotar de una estructura geométrica al complemento, nos faltaría dotar a los tetraedros de una estructura hiperbólica. Con este fin, en la siguiente sección consideraremos unos tipos de tetraedro del espacio hiperbólico que no tienen vértices.

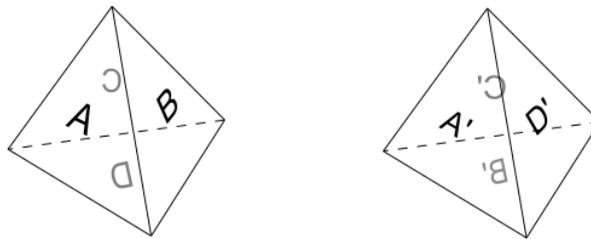


Figura 8: Triangulación del complemento del nudo del 8 (los tetraedros no tienen vértices).

Una buena referencia para ver el algoritmo en detalle es [1], y en [9] hay numerosos ejemplos.

### 3.2. Tetraedros ideales y su parametrización

**Definición 11.** Un tetraedro ideal en  $\mathbb{H}^3$  es un tetraedro con todos sus vértices en la frontera en el infinito. ◀

Recordamos que en el modelo del disco de Poincaré la frontera en el infinito es  $S(0, 1)$  y, en el modelo del semiespacio superior,  $(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cup \{\infty\}$ . Nótese que, topológicamente, un tetraedro ideal es homeomorfo a un tetraedro sin sus vértices.

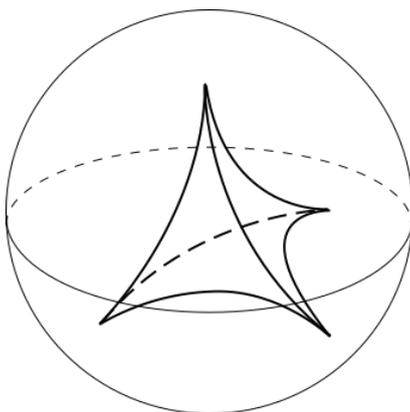


Figura 9: Tetraedro en  $D^3$ .

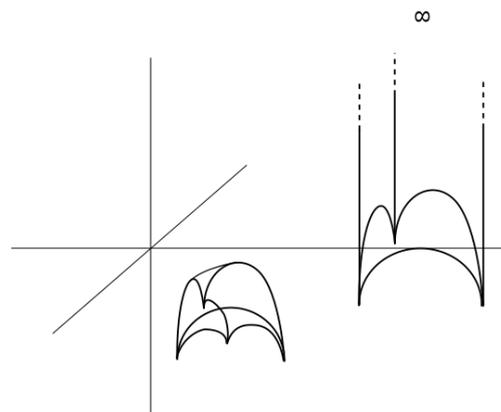


Figura 10: Tetraedros en  $\mathbb{H}^3$ .

**Definición 12.** En el modelo del disco de Poincaré, una horoesfera centrada en  $a \in \partial_\infty(D^3) = S(0, 1)$  es una esfera euclidiana contenida en la bola cerrada de centro 0 y radio unidad,  $\overline{B(0, 1)}$ , y tangente en  $a$  a  $S(0, 1)$ . ◀

La transformación de Möbius que envía el modelo del disco en el del semiplano superior envía las horoesferas o bien a una esfera euclídea contenida en el semiespacio cerrado superior y tangente al plano  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  en  $a$ , o bien a un plano horizontal, que es lo equivalente a una esfera tangente a  $\infty \in \partial_\infty(\mathbb{H}^3)$ . Esta última vendría de una horoesfera centrada en  $(0, 0, 1) \in \partial_\infty(\mathbb{D}^3)$ , que es el punto que la transformación de Möbius envía a  $\infty$ .

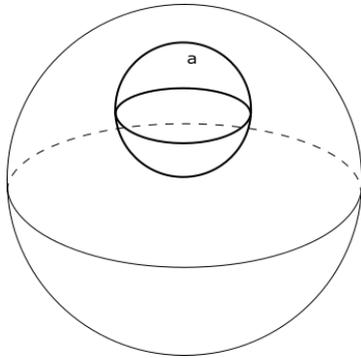


Figura 11: Horoesfera en  $D^3$ .

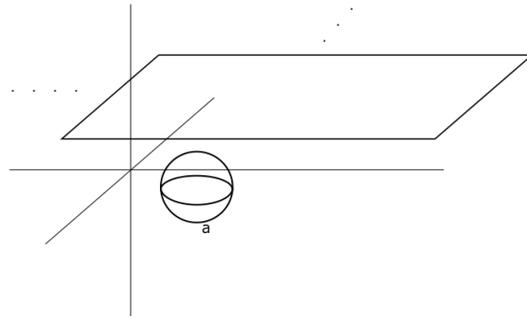


Figura 12: Horoesferas en  $\mathbb{H}^3$ .

La noción de horoesfera es necesaria para definir el enlace de un vértice, concepto clave en la parametrización de los tetraedros.

**Definición 13.** Dado un vértice  $v$  de un tetraedro ideal, es decir, un vértice en la frontera del infinito, el enlace del vértice es la intersección del tetraedro con una horoesfera suficientemente pequeña centrada en el vértice. Se denota el enlace del vértice por  $L(v)$ .

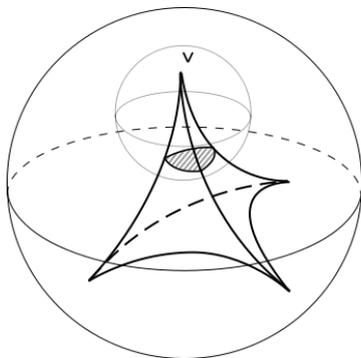


Figura 13: Enlace de tetraedro en  $D^3$ .

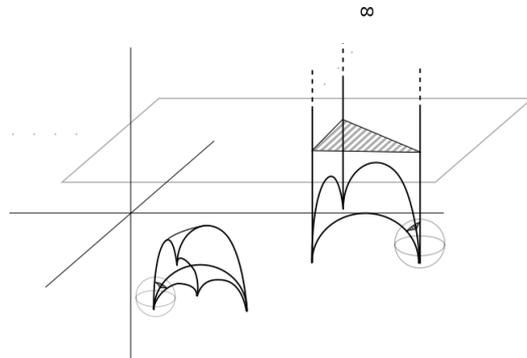


Figura 14: Enlaces de tetraedros en  $U^3$ .

Pese a que la definición depende de la horoesfera escogida, cuando estas son suficientemente pequeñas, tenemos que los enlaces son similares en un sentido euclidiano.

**Proposición 14.** El enlace de un vértice de un tetraedro ideal es un triángulo euclidiano bien definido salvo similitud. Además, la clase de similitud euclidiana, preservando la orientación, del enlace de un vértice caracteriza al tetraedro salvo isometría, preservando la orientación.

**Demostración.** Haremos la demostración en el modelo del semiplano superior. Dado un tetraedro ideal en  $\mathbb{H}^3$  siempre existe una (única si pedimos que preserve la orientación) isometría que envíe tres de sus vértices a tres puntos fijados. Por lo tanto, podemos suponer que el vértice de interés es el punto  $\infty \in \partial_\infty(\mathbb{H}^3)$ . Es inmediato que el enlace es un triángulo en un plano horizontal si tomamos un plano a suficiente altura, así que, teniendo en cuenta que en planos horizontales la métrica hiperbólica se restringe a un múltiplo de la euclidiana, es un triángulo euclidiano. Si tomamos otra horoesfera, tenemos otro múltiplo de la métrica euclidiana. Por lo tanto, ambos enlaces estarán relacionados por una similitud euclidiana.

Por otro lado, si tenemos dos tetraedros con dos vértices con la misma clase de similaridad euclidiana en los respectivos enlaces, entonces, aplicando una isometría en cada tetraedro, podemos suponer que ambos vértices son  $\infty \in \partial_\infty(\mathbb{H}^3)$ . Nos fijamos en los otros tres vértices, que están en el plano  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ . Como los enlaces tienen la misma clase de similaridad euclidiana, existe una similaridad euclidiana en dicho plano que envía los tres vértices de un tetraedro a los tres vértices del otro tetraedro. Acabamos de definir una similaridad, que en particular es una transformación de Möbius en la frontera del infinito, por lo que extiende a una única isometría de  $\mathbb{H}^3$ . ■

Consecuentemente, si somos capaces de parametrizar triángulos euclidianos, seremos capaces de parametrizar tetraedros salvo similaridad. Dado un triángulo euclidiano,  $\Delta(u, v, w) \subset \mathbb{C}$ , de vértices  $u, v$  y  $w$ , asociamos a cada uno de los vértices la razón entre los dos lados adyacentes:

$$z(u) = \frac{w - u}{v - u}, \quad z(v) = \frac{u - v}{w - v}, \quad z(w) = \frac{v - w}{u - w}.$$

Estas razones se denominan *invariantes de los vértices*. Es inmediato comprobar que únicamente dependen de la clase de similaridad euclidiana. Cada uno de los invariantes de vértice determina los otros dos,

$$z(v) = \frac{1}{1 - z(u)}, \quad z(w) = \frac{z(u) - 1}{z(u)},$$

y tienen la propiedad de que el producto es  $z(u)z(v)z(w) = -1$ .

Si aplicamos una similaridad euclídea que envíe  $u$  a 0 y  $v$  a 1, entonces  $w$  será enviado a  $z(u)$ .



Figura 15: Podemos aplicar una similaridad para enviar un triángulo a otro.

**Teorema 15.** *Sea  $T$  un tetraedro ideal. Entonces,  $T$  está determinado salvo isometría por los tres ángulos diedrales  $\alpha, \beta, \gamma$  incidentes a un vértice  $v$  y  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ . Además, los ángulos diedrales de aristas opuestas coinciden.*

*Demostración.* La clase de  $T$  viene determinada, salvo isometría, por la clase de similaridad de  $L(v)$ , donde  $v$  es un vértice cualquiera de  $T$ . Esta, a su vez, viene determinada por los ángulos de  $L(v)$ , que coinciden con los ángulos diedrales, lo cual demuestra también que su suma es  $\pi$ .

Por otro lado, si denotamos a los ángulos diedrales por  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = 1, 2$ , donde tener la misma letra pero distinto subíndice indica que son de aristas opuestas, tenemos cuatro ecuaciones, una por cada vértice, del tipo  $\alpha_i + \beta_j + \gamma_k = \pi$ , para ciertos  $i, j, k \in \{1, 2\}$ . Resolviendo el sistema de ecuaciones, se concluye que  $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$  y  $\gamma_1 = \gamma_2$ . ■

A continuación, consideramos los cuatro enlaces de vértice posibles en el tetraedro. Orientamos cada enlace siguiendo la regla de la mano derecha apuntando hacia el vértice del cual es enlace. De este modo, tenemos tres invariantes  $z_1, z_2, z_3$  por cada enlace. A cada una de las tres aristas que acaban en el vértices le asignamos el invariante  $z_i, i = 1, 2, 3$ , correspondiente. Llamamos a este invariante *invariante de arista*. El anterior teorema implica que aristas opuestas tienen el mismo invariante. Asimismo, recordemos que, partiendo de cualquiera de los invariantes de vértice, se pueden obtener los otros dos. De este modo, podemos parametrizar el tetraedro mediante un único invariante  $z_i, i = 1, 2, 3$ , cualquiera y obtener todos los invariantes de arista a partir de él.

Algunas referencias sobre cómo parametrizar los tetraedros las encontramos en [1, 10, 13].

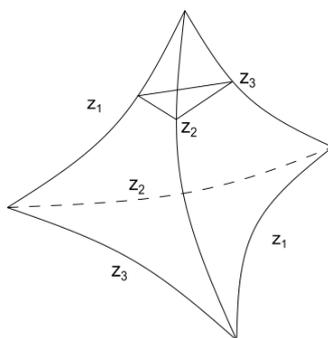


Figura 16: Invariantes de arista.

## 4. El espacio de deformaciones

En esta sección definiremos el espacio de deformaciones de una variedad  $M$  partiendo de una parametrización de una triangulación ideal de  $M$ . No nos planteamos cómo obtener esta triangulación o si existe en un principio. De hecho, es un problema abierto si estas triangulaciones ideales existen para todas las variedades con las que estamos trabajando (hiperbólicas, completas, orientables de volumen finito). No obstante, como ya hemos mencionado con anterioridad, se conocen triangulaciones ideales para muchas familias de variedades hiperbólicas. Asimismo, esta cuestión se puede sortear permitiendo tetraedros degenerados sin volumen, pero no ahondaremos en ello y asumiremos de aquí en adelante la existencia de triangulaciones ideales.

Algunas buenas referencias son [1, 7] y, para el caso particular del nudo del 8, [10, 13].

### 4.1. Ecuaciones de compatibilidad

**Teorema 16** (rigidez de Mostow-Prasad). *Sea  $n \geq 3$  y sean  $M_1, M_2$   $n$ -variedades hiperbólicas, completas, conexas, orientables y de volumen finito. Si existe un isomorfismo  $f: \pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2)$ , entonces está inducido por una única isometría de  $M_1$  a  $M_2$ .*

El teorema de rigidez de Mostow-Prasad implica que la estructura hiperbólica completa es única. Si hubiera dos, la identidad sería un isomorfismo entre los grupos fundamentales y, aplicando el teorema, las estructuras serían isométricas. También tiene como consecuencia que todo invariante de la métrica hiperbólica es un invariante de la variedad topológica.

Una vez que tenemos la triangulación por un número finito de tetraedros  $\{\Delta_i\}$  ideales de la variedad completa, fijamos una arista de cada tetraedro,  $e_i$ , y consideramos su invariante de arista, que denotamos  $z_i^0$  (el superíndice indicando que es el de la variedad completa). Cuando modifiquemos los tetraedros, si obtenemos una nueva estructura hiperbólica, esta no puede ser completa por el teorema de rigidez (o sería isométrica a la original).

La condición para obtener una variedad hiperbólica al pegar los tetraedros es que en cada punto exista un entorno que sea isométrico a una bola del espacio hiperbólico. En el interior de los tetraedros y en las caras esta condición se cumple de manera inmediata, puesto que el pegado es mediante isometrías. La complicación radica en que la condición se cumpla en las aristas.

Fijemos primero algo de notación. El pegado de las caras nos induce un pegado en las aristas y otro en los vértices. Denotamos a la clase de equivalencia de una arista, *ciclo de arista*,  $[e]$ , y a la del vértice, *punto cúspide*,  $[v]$ . También tenemos un pegado de los enlaces de todos los vértices pertenecientes a un mismo punto cúspide, denotamos a la superficie final, *enlace del punto cúspide*  $v$ ,  $L[v] = L(v_i) / \sim$ , donde  $v_i \in [v]$ . Calculando la característica de Euler-Poincaré, obtenemos el siguiente resultado.

**Proposición 17** ([10, 10.2.1]). *Si  $M$  es orientable,  $L[v]$  es un toro.*

Estos toros de los enlaces están relacionados con los toros periféricos que mencionábamos al final de la sección 2.2.

Un argumento de característica de Euler-Poincaré también nos permite afirmar que el número de ciclos de arista es igual al número de tetraedros. Veamos geoméricamente que se tiene que cumplir para obtener una estructura hiperbólica.

Consideramos un ciclo de arista  $[e] = \{e_1, \dots, e_n\}$  y denotamos al invariante de cada arista en el ciclo por  $z(e_i)$ . Supongamos que los tetraedros se pegan alrededor de la arista en el orden indicado por el subíndice, es decir, si comenzamos por el tetraedro  $\Delta_{j_1}$  al que le corresponde  $e_1$ , el siguiente tetraedro que se pega a  $\Delta_{j_1}$  será el que contiene la arista  $e_2$ ,  $\Delta_{j_2}$ , y así sucesivamente. Nótese que un mismo tetraedro puede aparecer más de una vez en el proceso, identificado por aristas distintas. Podemos asumir que el primer tetraedro está en  $\mathbb{H}^3$  de tal manera que la arista  $e_1$  es una arista vertical, con extremos 0 y  $\infty$ , y los otros dos vértices son 1 y  $z(e_1)$  y comenzar el pegado. Tras acabar la identificación, consideramos  $L(\infty)$  de cada tetraedro, de tal manera que se escojan todas las horoesferas a la misma altura. Entonces, hay una bola del espacio hiperbólico alrededor de cada punto de la arista si y solo si el pegado de los enlaces  $L(\infty)$  empieza y acaba en el mismo punto y solo da una vuelta alrededor de la arista (figura 17). Estas condiciones, en términos de los invariantes de arista, son

$$(3) \quad \prod_{i=1}^n z(e_i) = 1,$$

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n \arg(z(e_i)) = 2\pi.$$

A estas ecuaciones se las denomina *ecuaciones de compatibilidad*.

**Teorema 18** ([10, 10.5.3]). *La variedad topológica con parámetros  $(z_1, \dots, z_n)$  admite una estructura hiperbólica si y solo si se cumplen las ecuaciones de compatibilidad (3) y (4) en cada ciclo de arista.*

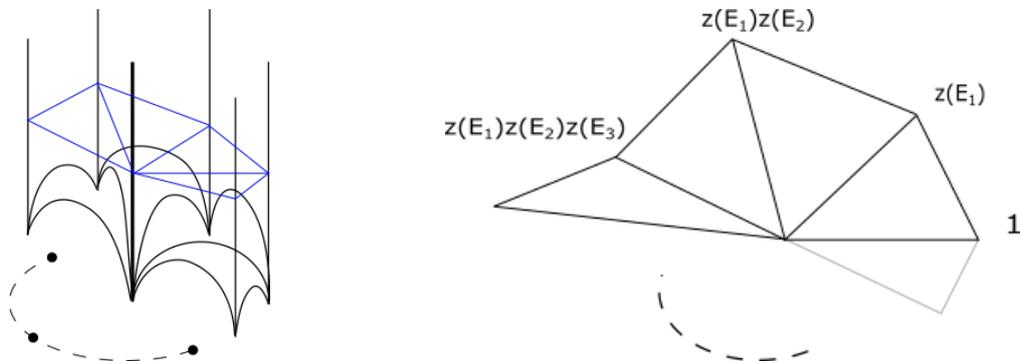


Figura 17: La condición geométrica se traduce utilizando invariantes de arista.

**Definición 19.** Sea  $M$  una variedad hiperbólica, completa, conexa, orientable y de volumen finito. Sea  $\Delta = \{\Delta_i\}$  una triangulación ideal de  $M$  y sean  $(z_i^0)$  los parámetros correspondientes a la estructura completa. Se define el espacio de deformaciones respecto a la triangulación  $\Delta$  como

$$Def(M, \Delta) := \{(z_1, \dots, z_n) \in U \cap \mathbb{C}^k \text{ satisfaciendo las ecuaciones de compatibilidad}\},$$

donde  $U$  es un entorno suficientemente pequeño de los parámetros  $(z_1^0, \dots, z_n^0)$  que dan lugar a la estructura completa. ◀

Nótese que, en un entorno suficientemente pequeño de los parámetros de la variedad completa,  $(z_i^0)$ , el cumplimiento de (3) implica automáticamente (4).

Debido al tipo de ecuación que tenemos, nuestro espacio de estudio es un subconjunto algebraico de  $\mathbb{C}^n$ , pero en principio no sabemos qué dimensión tiene. No obstante, debido a la teoría de variedades hiperbólicas tridimensionales, podemos afirmar que los puntos del espacio de deformaciones que dan lugar a una estructura completa son aislados, así que, tomando un entorno suficientemente pequeño, podemos afirmar que en  $Def(M, \Delta)$  todas las estructuras son no completas a excepción de  $(z_i^0)$  [1, E.6.16].

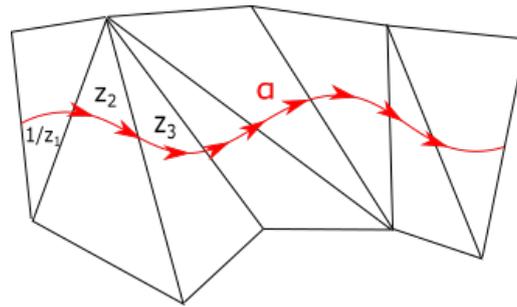


Figura 18: Derivada de la holonomía de  $\alpha$ .

## 4.2. Holonomía y el resultado

El objetivo de esta última subsección es ver los resultados que desembocan en el teorema de Thurston, que resuelve el problema sobre la dimensión del espacio de deformaciones. Para ello, reparametrizaremos el espacio de deformaciones mediante la holonomía de la estructura. Además, uno de los problemas que tiene la definición del espacio de deformaciones es que no hay ninguna manera sencilla de identificar los parámetros de la estructura completa ( $z_i^0$ ) dentro de todas las soluciones a las ecuaciones de compatibilidad. Como resultado adicional, obtenemos que, en la nueva parametrización que daremos, la estructura completa es un punto muy particular.

Vimos antes que en una variedad orientable el enlace de un punto cúspide,  $L[v]$ , es un toro,  $(L[v]/\sim) \simeq T^2$ . Vamos a definir un morfismo de grupos de  $\pi_1(T^2)$  a  $\mathbb{C}^*$ . Para ello, nos centramos en un punto cúspide,  $[v]$ , y su enlace, y tomamos la triangulación del toro inducida por los enlaces de los vértices. Para cada lazo  $\alpha \in \pi_1(T^2)$ , tomamos un representante que no pase por ningún vértice de la triangulación y el paso por cada triángulo sea de tal manera que lo divida en dos, dejando uno de los vértices a un lado. Cada vértice aislado,  $v_i$ , tiene un invariante de vértice  $z_i$ . Se define la *derivada de la holonomía* en el toro  $L[v]$  del siguiente modo:

$$(5) \quad \begin{aligned} H' : \pi_1(T^2) &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ [\alpha] &\longmapsto H'([\alpha]) = \prod z_i^{\epsilon_i}, \end{aligned}$$

donde  $\epsilon_i = 1$  si  $\alpha$  deja el vértice aislado a la izquierda,  $\epsilon_i = -1$  si lo deja a la derecha.

Fijamos ahora en cada enlace de punto cúspide,  $L[v_i] \simeq T_i^2$ , una longitud y un meridiano, denotados  $l_i, m_i$ , respectivamente. El siguiente teorema nos permite identificar los parámetros de la estructura completa.

**Teorema 20** ([1, E.6.17]). *M es completa si y solo si  $H'([l_i]) = 1$  para todo  $i = 1, \dots, k$ , donde  $k$  es el número de puntos cúspide. Equivalentemente, si y solo si  $H'([m_i]) = 1$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ .*

La idea detrás de este resultado es que la variedad es completa exactamente cuando, en la elección de cada enlace de vértice, podemos escoger horoesferas de manera coherente. Con coherente queremos decir que podemos hacer una única elección para cada enlace, de tal manera que el pegado se pueda hacer sin reescalados. En la figura 19, podemos ver la situación análoga en dimensión 2 para una métrica no completa. En lugar de un toro, tenemos una circunferencia como enlace del punto cúspide  $[v]$ . La elección de horociclo (análogo de la horoesfera en dimensión 2) no se puede hacer de manera coherente: al comenzar por uno cualquiera y dar una vuelta por el enlace, no volvemos al horociclo original, sino que hacemos una espiral. La derivada de la holonomía calcula si al seguir un lazo hay un cambio en la métrica (hemos cambiado de horoesfera) o no (seguimos en la misma). Si ha habido un cambio, *i.e.*,  $H'([\alpha]) \neq 1$ , no se pueden tomar horoesferas coherentemente y la estructura no es completa.

**Teorema 21** ([1, E.6.19]). *El espacio de deformaciones de M tiene dimensión k, donde k es el número de puntos cúspide.*

La demostración del resultado es muy técnica y viene de involucrar las  $2k$  ecuaciones de la derivada de la holonomía de longitudes y meridianos en la estructura completa, para acabar demostrando que el rango de nuestras ecuaciones es  $n - k$ .

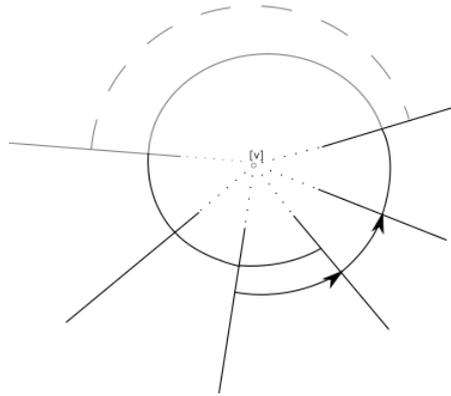


Figura 19: Horociclos entorno a  $[v]$  con estructura no completa.

Finalizamos enunciando sin demostrar las proposiciones que permiten demostrar el teorema.

**Proposición 22** ([1, E.6.18]). *La imagen de las aplicaciones*

$$\begin{aligned} (z_1, \dots, z_n) \in \text{Def}(M, \Delta) &\longmapsto (H'(l_i))_{i=1, \dots, k}, \\ (z_1, \dots, z_n) \in \text{Def}(M, \Delta) &\longmapsto (H'(m_i))_{i=1, \dots, k} \end{aligned}$$

cubre cada una un entorno de  $\{1, \dots, 1\} \in \mathbb{C}^k$ .

Dado  $z \in \text{Def}(M, \Delta)$ , denotamos  $u_i(z) := \log(H'(l_i))$  y  $v_i(z) := \log(H'(m_i))$ , dando lugar a un resultado similar al anterior.

**Proposición 23** ([1, E.6.21]). *La imagen de las aplicaciones*

$$\begin{aligned} (z_1, \dots, z_n) \in \text{Def}(M, \Delta) &\longmapsto (u_i)_{i=1, \dots, k}, \\ (z_1, \dots, z_n) \in \text{Def}(M, \Delta) &\longmapsto (v_i)_{i=1, \dots, k} \end{aligned}$$

cubre cada una un entorno de  $\{0, \dots, 0\} \in \mathbb{C}^k$ .

Por último, dados  $u_i, v_i$ , planteamos la ecuación

(Ecuación de Dehn) 
$$p_i u_i + q_i v_i = 2\pi i,$$

con  $(p_i, q_i) \in \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ . Así obtenemos el resultado de Thurston.

**Teorema 24** ([1, E.6.23; 7, §4]). *La aplicación  $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (p_i(z), q_i(z))_{i=1, \dots, k}$  es un difeomorfismo local con  $(\infty, \dots, \infty) \in \overline{\mathbb{C}}^k$ .*

Para demostrar la parte del difeomorfismo local, hacemos uso del teorema de inversión local: calculamos el Jacobiano de la aplicación y lo evaluamos en  $(z_j^0)$ , obteniendo que es distinto de 0.

Como consecuencia de este resultado, se puede ver cuál es la completación métrica de las nuevas estructuras hiperbólicas encontradas. Por ejemplo, si alguno de los  $p_i/q_i$  es irracional, la completación no es ni siquiera variedad. Sin embargo, cuando  $p_i$  y  $q_i$  son enteros coprimos (salvo algunas excepciones), la completación también tiene una estructura hiperbólica. A este resultado se le conoce como teorema de *cirujía de Dehn* hiperbólica [1, E.6.27], debido a que la construcción de la completación se puede realizar mediante la técnica homónima, aunque en este caso, el término *Dehn filling* es más apropiado. En otras palabras, el resultado afirma que casi todo Dehn filling es hiperbólico.

El resultado anterior permite encontrar sucesiones no triviales de variedades hiperbólicas completas con límite la original. Para ello escogemos enteros coprimos  $(p_i, q_i) \rightarrow \infty$  y completamos las respectivas métricas. La existencia de estas sucesiones de variedades hiperbólicas completas es un fenómeno único de la dimensión 3.

## Referencias

- [1] BENEDETTI, Riccardo y PETRONIO, Carlo. *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1992.
- [2] BROWDER, Felix, ed. *The Mathematical Heritage of Henri Poincaré*. Vol. 39.2. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1983. <https://doi.org/10.1090/pspum/039.2>.
- [3] DIEUDONNÉ, Jean. *A history of algebraic and differential topology, 1900-1960*. Modern Birkhäuser classics. Boston: Birkhäuser, 2009. ISBN: 9780817649067.
- [4] EPSTEIN, David y PETRONIO, Carlo. «An exposition of Poincaré's polyhedron theorem». En: *L'enseignement Mathématique* 40 (1994), págs. 113-170.
- [5] MILNOR, John. «Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds.» En: *Notices Amer. Math. Soc.* 50 (2003), págs. 1226-1233.
- [6] MILNOR, John W. «Hyperbolic geometry: The first 150 years». En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 6.1 (1982), págs. 9-25. ISSN: 0273-0979. <https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1982-14958-8>.
- [7] NEUMANN, Walter D. y ZAGIER, Don. «Volumes of hyperbolic three-manifolds». En: *Topology* 24 (1985), págs. 307-332.
- [8] POINCARÉ, H. «Sur l'uniformisation des fonctions analytiques». En: *Acta Mathematica* 31.0 (1908), págs. 1-63. ISSN: 0001-5962. <https://doi.org/10.1007/BF02415442>.
- [9] PURCELL, Jessica. *Hyperbolic Knot Theory (notes)*. Monash University. URL: <http://users.monash.edu/~jpurcell/papers/hyp-knot-theory.pdf> (visitado 15-11-2019).
- [10] RATCLIFFE, John G. *Foundations of hyperbolic manifolds*. Springer, 2011.
- [11] RILEY, Robert. «Discrete parabolic representations of link groups». En: *Mathematika* 22 (1975), págs. 141-150.
- [12] THURSTON, William P. «Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry». En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 6.3 (1982), págs. 357-382. ISSN: 0273-0979. <https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1982-15003-0>.
- [13] THURSTON, William P. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*. URL: <http://library.msri.org/books/gt3m/>.