Números de Milnor en la imagen, puntos múltiples y familias de aplicaciones holomorfas

Roberto Giménez Conejero
Universitat de València
roberto.gimenez@uv.es

Resumen: Como parte de mi tesis doctoral, Juan José Nuño Ballesteros y yo hemos probado una conjetura, enunciada por K. Houston, sobre familas de desdoblamientos excelentes y encontrado una familia pequeña de invariantes para caracterizar la equisingularidad de Whitney, entre otras cosas, siempre en corrango uno. Se darán las definiciones básicas y una pequeña guía por nuestro proceso desde nuestro planteamiento inicial hasta nuestro trabajo más actual.

Abstract: As a part of my PhD thesis, Juan José Nuño Ballesteros and I have proved a conjecture, stated by K. Houston, about excelent unfoldings, and we have found a small family of invariants to characterize the Whitney equisingularity, among other things, in corank one. I will give basic definitions and a little guide through our process, from our initial thoughts to our most recent work.

Palabras clave: número de Milnor, desdoblamientos excelentes, puntos dobles, equisingularidad.

MSC2010: 55G37, 55G99, 57D45, 55D99, 58Exx, 58F99.

Agradecimientos: Financiado por ayuda de contrato predoctoral del Ministerio de Educación y Formación profesional FPU16/03844.

Referencia: Giménez Conejero, Roberto. «Números de Milnor en la imagen, puntos múltiples y familias de aplicaciones holomorfas». En: *TEMat monográficos*, 3 (2021): *Actas del VIII Encuentro de Jóvenes Topólogos*, págs. 57-67. ISSN: 2660-6003. URL: https://temat.es/monograficos/article/view/vol3-p57.

1. Introducción

Milnor [22] probó que si una aplicación holomorfa $f\colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ tiene un punto crítico aislado en 0, entonces, para un t de módulo pequeño, $f^{-1}(t)$ en *una bola lo suficientemente pequeña* tiene el tipo de homotopía de un *wedge* de n-esferas y su número de esferas no depende del t escogido. A este número ahora se le llama *número de Milnor de* f, $\mu(f)$. En adelante, toda aplicación es holomorfa salvo que se diga lo contrario.

Esto abrió multitud de frentes de investigación y motivó, en lugar de estudiar preimágenes de aplicaciones y sus singularidades, estudiar directamente las aplicaciones. Ahora bien, tomar un valor t de módulo pequeño en aplicaciones no tiene sentido si lo que miramos no son necesariamente antiimágenes sino la aplicación en sí. Dado que distintos conjuntos de nivel cercanos de una función pueden entenderse intuitivamente como una deformación los unos de los otros, tiene también sentido fijarse en deformaciones o *perturbaciones* de una $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$. No osbtante, antes aparecía un entorno donde mirar lo que ocurre al mencionar *una bola lo suficientemente pequeña*. Esto último no tiene sentido, de nuevo, al hablar de una aplicación. Si antes el concepto análogo de conjuntos de nivel cercanos era *perturbaciones* de una aplicación, ahora el análogo a la *bola lo suficientemente pequeña* será germen de una aplicación estable. Un germen, $f\colon (X,S) \to (Y,0)$, no es más que una clase de equivalencia bajo la relación $f_1 \sim f_2$ si existe un entorno de S donde las aplicaciones sean iguales. Además, en lo sucesivo, S será un conjunto de puntos finito y, cuando solo sea un punto, escribiremos simplemente 0.

Volviendo al término *perturbación*, esto no es más que tomar d parámetros $t \in \mathbb{C}^d$ y una familia $F\colon (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d, 0) \to (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^d, 0)$ tal que $F(x,t) = (f_t(x), t)$ y $f_0 = f$. A estas f_t se las llama *perturbaciones* de f y a la familia también se la llama *desdoblamiento*, sean las deformaciones estables o no. Esta última definición viene del inglés *unfolding*, y probablemente tenga más que ver con descubrir o revelar que con desdoblar. Un ejemplo sería $F(x,t) = (x^2, x^3 + tx, t)$, donde $d = 1$, $f_0(x) = (x^2, x^3)$ y una perturbación suya sería $f_t(x) = (x^2, x^3 + tx)$ con t no nulo.

Dando un enorme salto histórico y matemático llegamos a dos definiciones fundamentales para el caso de (gérmenes de) aplicaciones $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Hablemos primero de la $\mathscr{A}_e$*-codimensión* para luego hablar del *número de Milnor en la imagen*:

$$\begin{aligned}\operatorname{codim}_{\mathscr{A}_e} f &\coloneqq \dim_{\mathbb{C}} \frac{\theta(f)}{T\mathscr{A}_e f} = \frac{\left\{ \frac{\partial}{\partial t} f_t \Big|_{t=0} : f_0 = f \right\}}{\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\psi_t \circ f \circ \phi_t^{-1} \right) \Big|_{t=0} : \phi_0 = \mathrm{id}, \psi_0 = \mathrm{id} \right\}} \\ &= \frac{\theta(f)}{tf(\theta_n) + \omega f(\theta_p)},\end{aligned}$$

donde la última expresión es la común dada en el área. La intuición sobre qué es este cociente se puede obtener por la penúltima expresión, aunque en la práctica se usa la última. Los elementos que aparecen en esta son

- $\theta(f)$, gérmenes de campos vectoriales sobre f;
- θ_M, gérmenes de campos vectoriales en $\mathbb{C}^M$;
- tf, la post-composición con la diferencial de f, y
- ωf, la pre-composición con f.

Esta definición se puede generalizar para otras dimensiones de la forma obvia, aunque no aparezca en este texto. Además este invariante algebraico cobra imporancia después de que Mather [18] probase que, si $\operatorname{codim}_{\mathscr{A}_e} f = 0$, entonces cualquier deformación para un parámetro t pequeño en realidad no deforma nada (módulo biholomorfismos en dominio y codominio) y viceversa. En esta situación se dice que f es *estable*. En la figura 1 se muestra un ejemplo para ayudar a construir la intuición.

En general, puede ocurrir que haya perturbaciones de f con t tan pequeño como queramos tales que f_t tiene $\operatorname{codim}_{\mathscr{A}_e} f_t = 0$ (hay dimensiones donde esto pasa siempre, las *nice dimensions* de Mather [20]) y, al igual que antes mirábamos valores regulares de una función, ahora nos fijamos en este germen para hablar de topología. Si estudiamos estos gérmenes $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ y miramos la imagen de una perturbación que sea estable, su tipo de homotopía en una bola pequeña también es el de un *wedge* de n-esferas (*cf.* [34]), y el número de esferas no depende de la perturbación estable. A la cantidad de esferas en este caso se la llama número de Milnor en la imagen, $\mu_I(f)$.

Por construir una intuición, los gérmenes estables de $\mathbb{C}^2$ a $\mathbb{C}^3$ son los siguientes y ninguno tiene número de Milnor positivo:

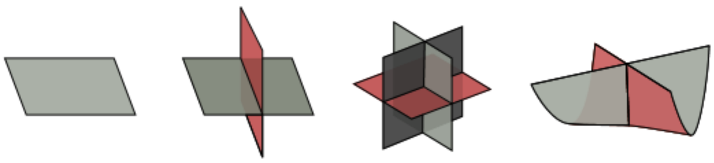

Figura 1: Todas las singularidades estables de $\mathbb{C}^2$ a $\mathbb{C}^3$. De izquierda a derecha: inmersión, puntos dobles transversos, puntos triples transversos y *cross-cap*.

El lector entenderá que muchos conceptos básicos queden ocultos; para una mejor introducción al tema en cuestión véase [23], por ejemplo, o, con detalles, la serie de artículos de Mather [15-20].

2. Motivación histórica

En 1971, Oscar Zariski [39] demostró lo siguiente.

Teorema 1. *Supongamos que tenemos una familia a un parámetro de curvas planas, parametrizadas como la imagen del desdoblamiento $F\colon (\mathbb{C}\times\mathbb{C}, S\times\{0\}) \to (\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}, 0)$,* i.e.*, cada curva está parametrizada por f_t, donde $F(x,t) = (f_t(x), t)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) *El número de Milnor es constante en la familia.*

(II) *Hay singularidad aislada uniformemente en la familia.*

(III) *La familia es* topológicamente trivial.

(IV) *La familia es* Whitney equisingular.

De hecho, número de Milnor de las curvas constante implica que $\mu_I(f_t)$ es constante, y cualquiera de ellas implica multiplicidad constante. Las tres últimas condiciones se comentarán a final del texto; se recomienda al lector volver una vez se haya leído las respectivas definiciones, aunque no son necesarias para seguir el hilo de la motivación.

Algo natural sería plantearse lo mismo para familias a un parámetro de $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{C}^{n+1}$ en general y, como era de esperar, la dificultad es muchísimo mayor. Denotemos por X_t las imágenes de f_t y hagamos un pequeño recorrido esquemático (no exhaustivo del todo) en los avances sobre esta cuestión para el caso de superficies, *i.e.*, $F\colon (\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}, S\times\{0\}) \to (\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}, 0)$:

- Gaffney [4] probó en 1993 que F es *Whitney equisingular* si y solo si el número de Milnor de la curva de puntos dobles, $\mu(D_t)$, $m_1(X_t)$ y $m_0(\sigma_t)$ (dos invariantes algebraicos) son constantes.
- Fernández de Bobadilla y Pe Pereira [3] en 2008 y Callejas-Bedregal, Houston y Ruas [1] probaron que $\mu(D_t)$ es constante si y solo si F es *topológicamente trivial*.
- Estos últimos conjeturaron que F es *topológicamente trivial* si y solo si F es *Whitney equisingular*.
- Ruas y Silva [29] en 2016 demostraron que la conjetura era falsa.
- Marar, Nuño-Ballesteros y Peñafort-Sanchis [13] en 2012 probaron que F es *Whitney equisingular* si y solo si $\mu(D_t)$ y $\mu(X_t\cap H)$, el número de Milnor de $X_t\cap H$, son constantes para un plano genérico H.

En conclusión, el enunciado del teorema de Zariski ya deja de ser cierto para la siguiente dimensión, $n = 2$. Esto nos da todo un camino que trabajar, cuya dificultad parece ser inversamente proporcional a la cantidad de avances en estos casi 40 años. Hasta ahora hemos trabajado la implicación sobre que número de Milnor en la imagen constante implica singularidad aislada uniforme y la cuestión de si algunos invariantes topológicos son constantes entonces implican *Whitney equisingularidad*.

3. Conjetura de Houston

La conjetura de Houston sobre familias excelentes (en el sentido de Gaffney, *cf.* definición 10) tiene que ver con familias de gérmenes $f_t : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ de corrango 1 y su comportamiento topológico como familia. Hagamos un recorrido por los principales resultados que utilizamos para probarla para, así, ir construyendo una intuición cada vez mejor sobre lo que versa la conjetura.

Un primer resultado que probamos en general fue el de la conservación del número de Milnor en la imagen, *i.e.*, si perturbamos un germen, f, y lo que queda no es estable, f_t, podemos volver a perturbar f_t para obtener algo estable, $f_{t,s}$ (véase la figura 2). ¿Cuál es la relación entre $\mu_I(f)$ y $\mu_I(f_t)$? Podría ocurrir que en la imagen de f_t haya aparecido homología, lo que nosotros probamos es que la homología que ha aparecido más $\mu_I(f_t)$ (la homología que *queda por aparecer*) es $\mu_I(f)$ (la *homología total*). Para expresar resultados al respecto formalmente hace falta la condición técnica de *nice dimensions*, que puede verse en [20]. Con ello, tenemos lo siguiente.

Teorema 2. *Sea $f : (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ de $\mathscr{A}_e$-codimensión finita, $(n, n+1)$* nice dimensions*, y f_u una deformación de $f = f_0$ a un parámetro. Tómese un representante de la deformación tal que su codominio V es una bola de Milnor. Entonces,*

$$\mu_I(f) = \dim_{\mathbb{C}} H^n(X_u, \mathbb{C}) + \sum_{y \in V} \mu_I(f_u, y),$$

donde X_u es la imagen de cada f_u una vez se ha tomado un representante.

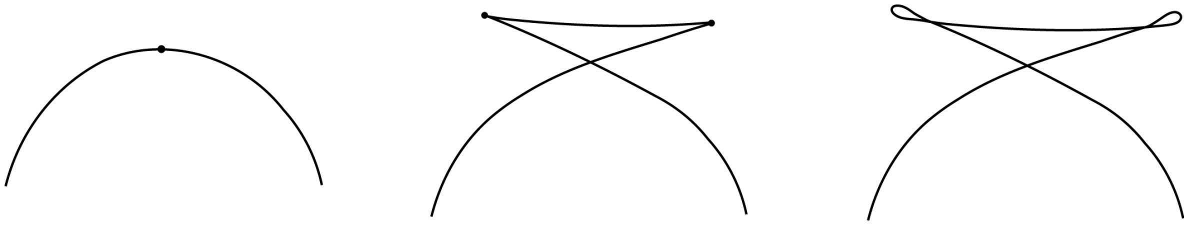

Figura 2: Una *representación real* de la conservación del número de Milnor en la imagen con deformaciones consecutivas de un germen, de izquierda a derecha.

En la anterior figura 2 hemos visto una *representación real* de lo que ocurre con una singularidad. Si observamos otra en dos dimensiones (figura 3), vemos elementos comunes: hay *puntos múltiples*. Hay puntos donde la imagen se cruza consigo misma varias veces, y parece que tiene que ver con la aparición de homología. Esto motiva definir el espacio de puntos múltiples, estudiar qué ocurre con ellos y su relación con el número de Milnor en la imagen.

Definición 3.

- Para $f : X \to Y$ estable, X e Y abiertos, *el espacio de puntos múltiples de f*, $D^k(f)$, es la clausura de Zariski del conjunto de puntos $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$ tales que $f(x_j) = f(x_i)$ para todo i, j pero $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$.
- Para $f : (\mathbb{C}^n, \underset{\sim}{z}) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ finita y $F : (\mathbb{C}^{n+q}, \underset{\sim}{z} \times \{0\}) \to (\mathbb{C}^{p+q}, 0)$ desdoblamiento con $F(x, \lambda) = (f_\lambda(x), \lambda)$, el *espacio de puntos múltiples de f* es

$$D^k(f) = D^k(F) \cap \{\lambda = 0\}$$

como gérmenes de espacios complejos. ◂

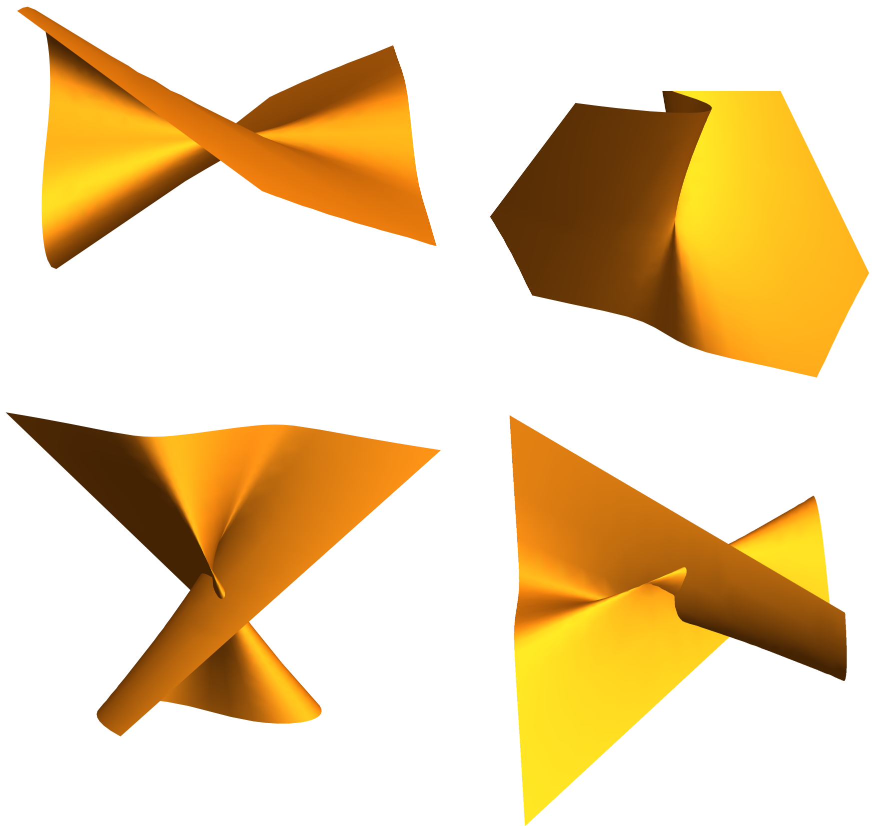

Figura 3: *Representación real* de una singularidad sin estabilizar (arriba) y estabilizada (abajo) de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^3$.

El estudio de estos espacios tiene grandes recompensas. Para empezar, caracterizan propiedades de gérmenes.

Teorema 4 (Marar y Mond [14]). *Sea $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$, $n < p$, un germen de corrango finito. Entonces,*

(i) *f tiene $\mathscr{A}_e$-codimensión finita si y solo si, para cada k con $p-k(p-n) \geq 0$, $D^k(f)$ es o una intersección completa y singularidad aislada (ICIS) de dimensión $p-k(p-n)$ o vacía y si, además, para aquellos k tales que $p-k(p-n) < 0$, $D^k(f)$ es a lo sumo el punto $\{0\}$.*

Y, después de estudiar una sucesión espectral adecuada (*cf.* [6, 9]), hay una definición y un resultado inmediatos.

Definición 5. Los *números de Milnor k-alternados de f*, denotados por $\mu_k^{\mathrm{Alt}}(f)$, se definen como

$$\mu_k^{\mathrm{Alt}}(f) = \begin{cases} \dim \mathrm{Alt}_k H^{n+1-k+1}(D^k(F), D^k(\tilde{f}), \mathbb{Q}) & \text{si } k \leq d(f), \\ \left| \displaystyle\sum_{l=d(f)+1}^{s} (-1)^l \binom{s(f)}{l} \right| & \text{si } k = d(f)+1 \text{ y } s(f) > d(f), \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde $s(f)$ es el número de puntos en $f^{-1}(0)$, $d(f) = \sup\{k | D^k(\tilde{f}) \neq \varnothing\}$, se toma la parte alternada de la homología (*i.e.*, los elementos donde la acción evidente en $D^k(f)$ de cualquier permutación de k elementos actúa por el signo), y $\tilde{f}$ es una perturbación estable de f. ◂

Proposición 6 ([10]). *Si f es de corrango* 1*,*

$$\mu_I(f) = \sum_k \mu_k^{\mathrm{Alt}}(f).$$

Por lo tanto, una forma de atacar el cálculo de los números de Milnor es mediante la proposición 6. Esta idea nos permitió abordar la conjetura más importante del área en una versión más simple.

Para empezar, es natural preguntarse la relación entre el invariante topológico, $\mu_I(f)$, y el invariante algebraico, $\mathscr{A}_e$-codimensión, de f. De hecho, si se traducen nuestros elementos al contexto de hipersuperficies, trivialmente se obtiene que la traducción de $\mu_I(f)$ es mayor o igual que la traducción de la $\mathscr{A}_e$-codimensión, con igualdad en el caso casihomogéneo (número de Milnor y número de Tjurina, respectivamente). Además, para gérmenes de $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{C}^p$ con $n \geq p$ se tiene que el primero es mayor o igual al segundo y son iguales en el caso casihomogéneo (*cf.* [2]). Es natural preguntarse por la siguiente conjetura, probada para $n = 1, 2$ pero abierta en general, llamada conjetura de Mond.

Conjetura 7 (Mond). *Sea $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ germen con $\mathscr{A}_e$-codimensión finita y $(n, n+1)$* nice dimensions*. Entonces, $\mu_I(f) \geq \mathscr{A}_e codim(f)$, con igualdad en el caso casihomogéneo.*

Un resultado que se creía cierto, pero ha resultado no ser en absoluto trivial, era que, si $\mu_I(f) = 0$, entonces f era estable o, lo que es lo mismo, que su $\mathscr{A}_e$-codimensión es 0. Esto cumpliría la conjetura de Mond y hemos conseguido probarlo, no sin esfuerzo, para corrango 1.

Teorema 8 (Conjetura débil de Mond). *Para los gérmenes $f\colon (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ de corrango* 1 *y $\mathscr{A}_e$-codimensión finita, $\mu_I(f) = 0$ si y solo si f es estable.*

Otro resultado previo, que se prueba con los espacios de puntos múltiples, antes de la conjetura de Houston es el del aumento del número de Milnor en la imagen al añadir ramas (*cf.* figura 4). Nótese que también es bastante intuitivo, pero no trivial, dado que estamos buscando homología en dimensión real n dentro de un conjunto *de dimensión* real $2n$. La distinción entre monogérmenes y multigérmenes se ha omitido hasta ahora y se omitirá en adelante también en pro de facilitar la lectura.

Lema 9. *Sean $g\colon (\mathbb{C}^n, z) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ y $f\colon (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ ambos de corrango* 1 *y con $\mathscr{A}_e$-codimensión finita. Si $\mu_I(f, S) > 0$, entonces*

(1) $$\mu_I(f, S) < \mu_I(\{f, g\}, S \sqcup z).$$

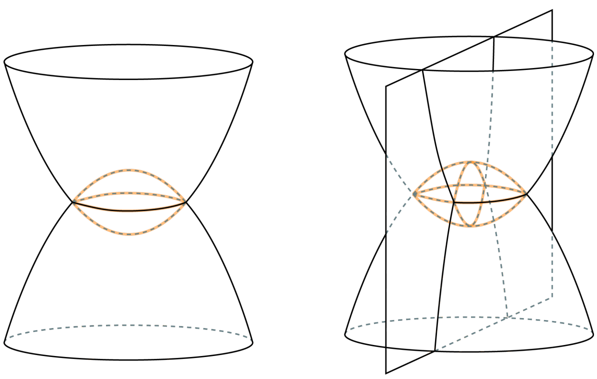

Figura 4: *Representación real* del aumento del número de Milnor en la imagen al añadir una rama.

Estos resultados han sido los necesarios para probar la conjetura de Houston sobre desdoblamientos excelentes en el sentido de Gaffney (definición 10). Para enunciarla correctamente es necesario entender que, dada una singularidad, a su alrededor hay una estratificación por *tipos estables*, *i.e.*, cada estrato son todos los puntos que son iguales entre sí a efectos del germen (módulo biholomorfismos en dominio y codominio). Por ejemplo, no es lo mismo un punto inmersivo que un punto doble, estarán en estratos diferentes. Si juntamos una familia de gérmenes a un parámetro y miramos su estratificación por tipos estables, es posible que haya un punto que forme un estrato en sí mismo y se aleje del origen conforme avanzamos en el parámetro de la familia (o desdoblamiento), intuitivamente es la diferencia entre las estratificaciones de la figura 5. A esto se le llama también *coalescencia*. Un desdoblamiento excelente es uno donde no hay coalescencia, entre otras cosas.

Definición 10. Supóngase que $f\colon (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^p, 0)$, $n < p$, es de corrango 1 con $\mathscr{A}_e$-codimensión finita y que F es un desdoblamiento a un parámetro que *conserva el origen* (todo f_t lleva el cero en el cero). F es un *buen desdoblamiento* si hay un representante $F\colon\ U \to W \times T$ tal que

(I) F es finito,

(II) $s(f_t)$ es constante, *i.e.*, $F^{-1}(\{0\} \times T) = S \times T$ y

(III) f_t, como familia de F, tiene singularidad aislada uniformemente, *i.e.* f_t es estable en $W \setminus \{0\}$.

Si, además, f_t no tiene puntos 0-estables en $W \setminus \{0\}$, para todo $t \in T$ (sin coalescencia), entonces F es *excelente* (en el sentido de Gaffney). ◂

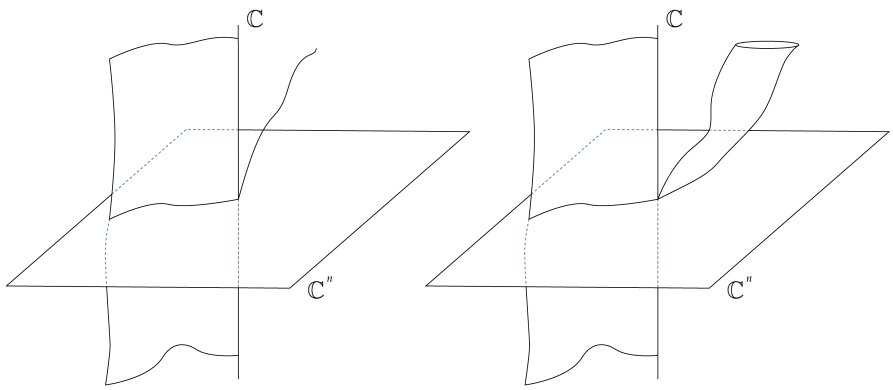

Figura 5: Comparación entre un desdoblamiento con coalescencia y otro sin coalescencia.

Houston [10, Conjecture 6.2] conjetura lo siguiente, lo cual hemos probado.

Teorema 11. *Sean* $f\colon\ (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ *un germen de corrango* 1 *y con* $\mathscr{A}_e$*-codimensión finita y* $F(x, t) = (f_t(x), t)$ *un desdoblamiento a un parámetro que preserva el origen. Entonces,* $\mu_I(f_t)$ *constante implica* F *excelente.*

Nuestra aportación a este resultado es eliminar hipótesis en un resultado del mismo Houston en el mismo artículo y dejar solo que el número de Milnor en la imagen sea constante. Por concretar más, la hipótesis de que sea un buen desdoblamiento y condiciones sobre $s(f_t)$ y $d(f_t)$.

Sobre la implicación contraria no hemos encontrado un contraejemplo que funcione. No obstante, sí tenemos un ejemplo de un germen que es excelente en los reales, no en los complejos, y cuya complexificación tiene número de Milnor en la imagen no constante (véase la figura 6).

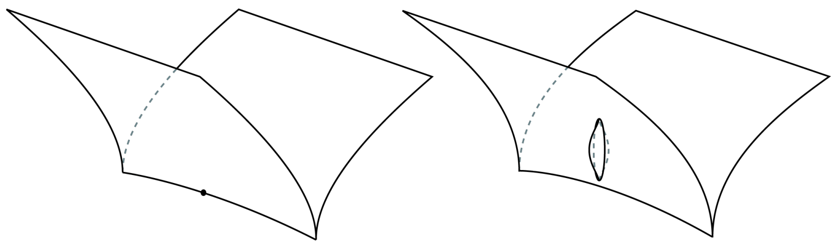

Figura 6: Representación real de f y una perturbación, de izquierda a derecha.

4. Equisingularidad de Whitney

Para la equisingularidad de Whitney hemos tenido que reconstruir todo un camino ya recorrido en parte por Mond y Montaldi [25] para estudiar gérmenes cuyo dominio es un *ICIS* y generalizar los resultados de Houston [10] y de Marar y Mond [14], entre otros desarrollos. De entre ellos destacan especialmente algunas cosas, como un nuevo invariante con propiedades interesantes.

Definición 12. Sean $f\colon (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ un germen de corrango 1 con $\mathscr{A}_e$-codimensión finita y D_s el locus de puntos dobles en el dominio de una perturbación estable f_s. El conjunto D_s tiene el tipo de homotopía de un *wedge* de $(n-1)$-esferas y su número es el número de Milnor de los puntos dobles, $\mu_D(f)$. ◂

Esto se puede entender como la proyección del espacio de puntos dobles al dominio, véase la figura 7, y por eso estudiamos gérmenes que salen desde un ICIS.

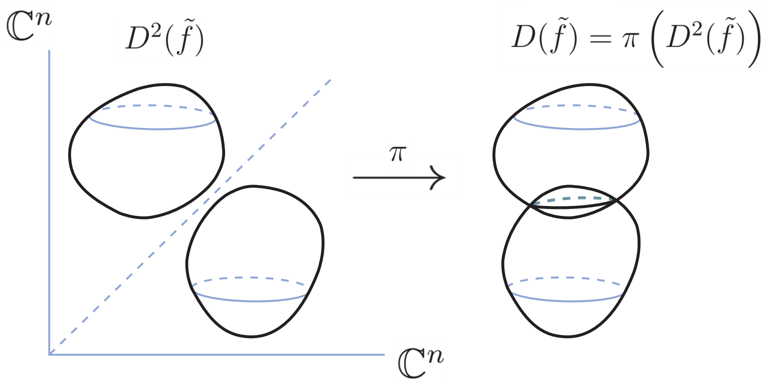

Figura 7: Representación de la proyección del espacio de puntos dobles al dominio y la aparición de homología.

Una propiedad muy interesante es que, sorpresivamente, también encaja con la conjetura débil de Mond.

Teorema 13. *Para $f\colon (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ de corrango uno, $\mathscr{A}_e$-codimensión finita y $(n, n+1)$* nice dimensions*, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) *f es estable.*

(II) $\mu_I(f) = 0$.

(III) $\mu_D(f) = 0$.

Hablemos, por fin, de la equisingularidad de Whitney.

Definición 14. Sean $f\colon (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ de corrango uno, $\mathscr{A}_e$-codimensión finita y $(n, n+1)$ *nice dimensions*, $F(x,t) = (f_t(x), t)$ un desdoblamiento a un parámetro de f, fíjese un representante de este, $F\colon U \to V \times T$ con $U \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, $V \subset \mathbb{C}^{n+1}$ y $T \subset \mathbb{C}$. En este caso, F es *Whitney equisingular* si la estratificación de F por tipos estables es una *estratificación de Thom* (*i.e.*, Whitney b-regular en salida y llegada y, además, F es una aplicación de Thom, *cf.* [5]). ◂

En 1993, Gaffney [4] caracterizó la equisingularidad de Whitney como que todas las multiplicidades polares de todos los estratos de la estratificación por tipos estables en salida y llegada sean constantes. El problema con este resultado es que se necesita una cantidad enorme de invariantes (del orden de n^2) y, además, la hipótesis de que F es excelente, así que estudiamos un par de familias que reducen en un orden de magnitud el número de invariantes que hay que comprobar.

Definición 15. Dada una $f\colon (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ de corrango uno, $\mathscr{A}_e$-codimensión finita y $(n, n+1)$ *nice dimensions*, la sucesión μ_I^* de f se define como

$$\mu_I^*(f) = (\mu_I^{(n+1)}(f), \dots, \mu_I^{(2)}(f)),$$

donde cada $\mu_I^{(i)}(f)$ se define como el número de esferas que aparecen en la intersección entre la imagen de la perturbación estable de f y un hiperplano genérico de dimensión i. ◂

De forma similar:

Definición 16. Dada una $f\colon (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ de corrango uno, $\mathscr{A}_e$-codimensión finita y $(n, n+1)$ *nice dimensions*, la sucesión μ_D^* de f se define como

$$\mu_D^*(f) = (\mu_D^{(n)}(f), \dots, \mu_D^{(2)}(f)),$$

donde cada $\mu_D^{(i)}(f)$ se define como el número de esferas que aparecen en la intersección entre el locus de puntos dobles de la perturbación estable de f y un hiperplano genérico de dimensión i. ◂

Y, por fin, nuestro resultado principal:

Teorema 17. *Sea $f\colon (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ de corrango uno, $\mathscr{A}_e$-codimensión finita y $(n, n+1)$* nice dimensions. *Sea $F(x,t) = (f_t(x), t)$ un desdoblamiento a un parámetro de f. Entonces, F es Whitney equisingular si y solo si $\mu_I^*(f_t)$ y $\mu_D^*(f_t)$ son constantes.*

5. Trabajo futuro

Evidentemente, solo queda algo por cubrir en este sentido, que es la *trivialidad topológica*. Esta noción no quiere decir más que la estratificación por tipos estables es topológicamente trivial (*cf.* [5]) en salida y llegada y F es de Thom.

Probar algo al respecto en este contexto es muy complicado. Para el caso de hipersuperficies en $\mathbb{C}^{n+1}$ está probado por Tráng y Ramanujam [35] en el 1976, pero para $n \neq 2$. Esta restricción viene de ser el único caso donde no hay teoremas de h-cobordismo y sigue abierta en la actualidad. En 43 años no se ha avanzado en esta cuestión gran cosa y para nuestro contexto no se puede aplicar el teorema de h-cobordismo, por lo menos con la misma idea, debido a la estratificación.

Esta cuestión la hemos intentado abordar de diferentes maneras, por ejemplo imitando la idea de Parusiński [28] con un campo vectorial, pero el campo resultante no era continuo. Cualquier sugerencia o idea es bienvenida.

Referencias

[1] Callejas-Bedregal, R.; Houston, K., y Ruas, M. A. S. «Topological Triviality of Families of Singular Surfaces». En: *arXiv Mathematics e-prints* (2006). arXiv: math/0611699 [math.CV].

[2] Damon, James y Mond, David. «$\mathscr{A}$-codimension and the vanishing topology of discriminants». En: *Inventiones Mathematicae* 106.2 (1991), págs. 217-242. issn: 0020-9910. https://doi.org/10.1007/BF01243911.

[3] Fernández de Bobadilla, Javier y Pe Pereira, María. «Equisingularity at the normalisation». En: *Journal of Topology* 1.4 (2008), págs. 879-909. issn: 1753-8416. https://doi.org/10.1112/jtopol/jtn024.

[4] Gaffney, Terence. «Polar multiplicities and equisingularity of map germs». En: *Topology. An International Journal of Mathematics* 32.1 (1993), págs. 185-223. issn: 0040-9383. https://doi.org/10.1016/0040-9383(93)90045-W.

[5] Gibson, Christopher G.; Wirthmüller, Klaus; Plessis, Andrew A. du, y Looijenga, Eduard J. N. *Topological stability of smooth mappings*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 552. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[6] Goryunov, Victor y Mond, David. «Vanishing cohomology of singularities of mappings». En: *Compositio Mathematica* 89.1 (1993), págs. 45-80. issn: 0010-437X.

[7] Greuel, G. M. «Der Gauss-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten». En: *Mathematische Annalen* 214 (1975), págs. 235-266. issn: 0025-5831. https://doi.org/10.1007/BF01352108.

[8] Greuel, Gert-Martin. «Constant Milnor number implies constant multiplicity for quasihomogeneous singularities». En: *Manuscripta Mathematica* 56.2 (1986), págs. 159-166. issn: 0025-2611. https://doi.org/10.1007/BF01172153.

[9] Houston, Kevin. «A general image computing spectral sequence». En: *Singularity theory*. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007, págs. 651-675. https://doi.org/10.1142/9789812707499_0027.

[10] Houston, Kevin. «Stratification of unfoldings of corank 1 singularities». En: *The Quarterly Journal of Mathematics* 61.4 (2010), págs. 413-435. issn: 0033-5606. https://doi.org/10.1093/qmath/hap012.

[11] Jong, T. de y Straten, D. van. «Disentanglements». En: *Singularity theory and its applications, Part I (Coventry, 1988/1989)*. Vol. 1462. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1991, págs. 199-211. https://doi.org/10.1007/BFb0086383.

[12] Marar, W. L. «The Euler characteristic of the disentanglement of the image of a corank 1 map germ». En: *Singularity theory and its applications, Part I (Coventry, 1988/1989)*. Vol. 1462. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1991, págs. 212-220. https://doi.org/10.1007/BFb0086384.

[13] Marar, W. L.; Nuño-Ballesteros, J. J., y Peñafort-Sanchis, G. «Double point curves for corank 2 map germs from $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}^3$». En: *Topology and its Applications* 159.2 (2012), págs. 526-536. issn: 0166-8641. https://doi.org/10.1016/j.topol.2011.09.028.

[14] Marar, Washington Luiz y Mond, David. «Multiple point schemes for corank 1 maps». En: *Journal of the London Mathematical Society. Second Series* 39.3 (1989), págs. 553-567. issn: 0024-6107. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-39.3.553.

[15] Mather, J. N. «Stability of C^∞ mappings. III. Finitely determined mapgerms». En: *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* 35 (1968), págs. 279-308. issn: 0073-8301.

[16] Mather, J. N. «Stability of C^∞ mappings. I. The division theorem». En: *Annals of Mathematics. Second Series* 87 (1968), págs. 89-104. issn: 0003-486X. https://doi.org/10.2307/1970595.

[17] Mather, J. N. «Stability of C^∞ mappings. IV. Classification of stable germs by R-algebras». En: *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* 37 (1969), págs. 223-248. issn: 0073-8301.

[18] Mather, J. N. «Stability of C^∞ mappings. II. Infinitesimal stability implies stability». En: *Annals of Mathematics. Second Series* 89 (1969), págs. 254-291. issn: 0003-486X. https://doi.org/10.2307/1970668.

[19] Mather, J. N. «Stability of C^∞ mappings. V. Transversality». En: *Advances in Mathematics* 4 (1970), 301-336 (1970). issn: 0001-8708. https://doi.org/10.1016/0001-8708(70)90028-9.

[20] Mather, J. N. «Stability of C^∞ mappings. VI: The nice dimensions». En: *Proceedings of Liverpool Singularities-Symposium, I (1969/70)*. 1971, 207-253. Lecture Notes in Math., Vol. 192.

[21] McCleary, John. *A user's guide to spectral sequences*. Second. Vol. 58. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. isbn: 0-521-56759-9.

[22] Milnor, J. *Singular points of complex hypersurfaces*. Princeton University Press y the University of Tokio Press, 1968.

[23] Mond, D. y Nuño-Ballesteros, J. J. *Singularities of Mappings The Local Behaviour of Smooth and Complex Analytic Mappings*. Springer Nature, 2019.

[24] Mond, David. «Vanishing cycles for analytic maps». En: *Singularity theory and its applications, Part I (Coventry, 1988/1989)*. Vol. 1462. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1991, págs. 221-234. https://doi.org/10.1007/BFb0086385.

[25] Mond, David y Montaldi, James. «Deformations of maps on complete intersections, Damon's $\mathcal{K}_V$-equivalence and bifurcations». En: *Singularities (Lille, 1991)*. Vol. 201. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994, págs. 263-284.

[26] Nuño-Ballesteros, J. J.; Oréfice-Okamoto, B., y Tomazella, J. N. «Equisingularity of families of isolated determinantal singularities». En: *Mathematische Zeitschrift* 289.3-4 (2018), págs. 1409-1425. issn: 0025-5874. https://doi.org/10.1007/s00209-017-2004-y.

[27] Nuño-Ballesteros, J. J. y Pallarés-Torres, I. «A Lê-Greuel type formula for the image Milnor number». En: *Hokkaido Mathematical Journal* 48.1 (2019), págs. 45-59. issn: 0385-4035. https://doi.org/10.14492/hokmj/1550480643.

[28] Parusiński, Adam. «Topological triviality of μ-constant deformations of type $f(x) + tg(x)$». En: *The Bulletin of the London Mathematical Society* 31.6 (1999), págs. 686-692. issn: 0024-6093. https://doi.org/10.1112/S0024609399006086.

[29] Ruas, M. A. S. y Silva, O. N. «Whitney equisingularity of families of surfaces in $\mathbb{C}^3$». En: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 166.2 (2019), págs. 353-369. issn: 0305-0041. https://doi.org/10.1017/S0305004117000883.

[30] Sagan, Bruce E. *The symmetric group*. Second. Vol. 203. Graduate Texts in Mathematics. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions. Springer-Verlag, New York, 2001. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6804-6.

[31] Siersma, Dirk. «Vanishing cycles and special fibres». En: *Singularity theory and its applications, Part I (Coventry, 1988/1989)*. Vol. 1462. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1991, págs. 292-301. https://doi.org/10.1007/BFb0086389.

[32] Teissier, Bernard. «Variétés polaires. II. Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney». En: *Algebraic geometry (La Rábida, 1981)*. Vol. 961. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1982, págs. 314-491. https://doi.org/10.1007/BFb0071291.

[33] Tráng, Lê Dũng. «Computation of the Milnor number of an isolated singularity of a complete intersection». En: *Akademija Nauk SSSR. Funkcional'nyi Analiz i ego Priloženija* 8.2 (1974), págs. 45-49. issn: 0374-1990.

[34] Tráng, Lê Dũng. «Le concept de singularité isolée de fonction analytique». En: *Complex analytic singularities*. Vol. 8. Adv. Stud. Pure Math. North-Holland, Amsterdam, 1987, págs. 215-227. https://doi.org/10.2969/aspm/00810215.

[35] Tráng, Lê Dũng y Ramanujam, C. P. «The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type». En: *American Journal of Mathematics* 98.1 (1976), págs. 67-78. issn: 0002-9327. https://doi.org/10.2307/2373614.

[36] Tráng, Lê Dũng y Teissier, B. «Cycles evanescents, sections planes et conditions de Whitney. II». En: *Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981)*. Vol. 40. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, págs. 65-103.

[37] Tráng, Lê Dũng y Teissier, Bernard. «Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières». En: *Annals of Mathematics. Second Series* 114.3 (1981), págs. 457-491. issn: 0003-486X. https://doi.org/10.2307/1971299.

[38] Wall, C. T. C. «A note on symmetry of singularities». En: *The Bulletin of the London Mathematical Society* 12.3 (1980), págs. 169-175. issn: 0024-6093. https://doi.org/10.1112/blms/12.3.169.

[39] Zariski, O. «Some open questions in the theory of singularities». En: *B.A.M.S.* (1971).