

TEMat monográficos

VOL. 3 – 12/2021

e-ISSN 2660-6003

Actas del VIII *Encuentro de Jóvenes Topólogos*

Santiago de Compostela, 15-17 de octubre de 2019

Proceedings of the VIII *Encuentro de Jóvenes Topólogos*

Santiago de Compostela, 15th-17th October 2019



TEMat monográficos

vol. 3

12/2021

Actas del VIII Encuentro de Jóvenes Topólogos



<http://xtsunxet.usc.es/etop2019/VIIIEJT.html>

<https://temat.es/monograficos/issue/view/vol-3>

<http://www.anem.es/>

Una iniciativa de la
Asociación Nacional de Estudiantes de Matemáticas



Publica / Published by



Asociación Nacional de Estudiantes de Matemáticas
Plaza de las Ciencias, 3
Despacho 525, Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
28040 – Madrid

temat@temat.es
contacto@anem.es

TEMat monográficos – vol. 3 – 12/2021

e-ISSN: 2660-6003

<https://temat.es/monograficos>

© 2021 Asociación Nacional de Estudiantes de Matemáticas.

© 2021 los autores de los artículos / the articles' authors.

© ⓘ Salvo que se indique lo contrario, el contenido de esta revista está disponible bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento 4.0 Internacional.

© ⓘ Except otherwise noted, the contents of this journal are available under a Creative Commons Attribution 4.0 International licence.

Editores invitados / Invited editors

Beatriz Álvarez Díaz, Universidade de Santiago de Compostela
David Mosquera Lois, Universidade de Santiago de Compostela

Editores del volumen /Volume editors

Alberto Espuny Díaz, Technische Universität Ilmenau
Isaac Sánchez Barrera, Universitat Politècnica de Catalunya

Responsables de la serie / Series coordinators

Alberto Espuny Díaz, Technische Universität Ilmenau
Gregorio Martínez Sempere, Universidad de Sevilla
Pablo Nicolás Martínez, Universitat Politècnica de Catalunya
Isaac Sánchez Barrera, Universitat Politècnica de Catalunya

Comité organizador / Organising committee

Beatriz Álvarez Díaz, Universidade de Santiago de Compostela
Álvaro Carballido Costas, Universidade de Santiago de Compostela
Carlos Franco Sanmartín, Universidade de Santiago de Compostela
David Mosquera Lois, Universidade de Santiago de Compostela
Víctor Sanmartín López, Universidade de Santiago de Compostela

Sobre *TEMat* / About *TEMat*

TEMat es una revista de divulgación de trabajos de estudiantes de matemáticas publicada sin ánimo de lucro por la Asociación Nacional de Estudiantes de Matemáticas. Se busca publicar trabajos divulgativos de matemáticas de todo tipo, escritos principalmente (pero no exclusivamente) por estudiantes.

TEMat persigue el doble objetivo de dar visibilidad a la calidad y diversidad de los trabajos realizados por estudiantes de matemáticas a la vez que permite a los estudiantes publicar sus primeros artículos. Se contemplan para su publicación artículos escritos en castellano de todas las áreas de las matemáticas, puras y aplicadas, así como aplicaciones científicas o tecnológicas en las que las matemáticas jueguen un papel central.

TEMat is a nonprofit journal for the dissemination of works written by mathematics students, published by the Asociación Nacional de Estudiantes de Matemáticas. We aim to publish mathematics dissemination papers of any kind, written mainly (but not exclusively) by students.

TEMat pursues the goal of showcasing the quality and diversity of the works written by students, while also allowing them to publish their first papers. We will consider for publication any paper written in Spanish about any area of mathematics, both pure and applied, as well as scientific or technological applications where mathematics play a prominent role.

Sobre *TEMat monográficos* / About *TEMat monográficos*

TEMat monográficos complementa los objetivos de *TEMat*, ofreciendo a escuelas de investigación, así como seminarios, talleres o congresos de estudiantes, la posibilidad de que sus asistentes publiquen artículos sobre los contenidos estudiados de manera homogénea, a la vez que se agrupan estos contenidos para que otras personas que no hayan podido asistir al evento puedan estudiarlos por su cuenta. A la vez, esto permite dar difusión a la labor de los organizadores y profesores que se encargan de los eventos y al trabajo desarrollado por jóvenes matemáticos.

TEMat monográficos complements *TEMat*'s goals by offering research schools, seminars, workshops or student conferences the chance to publish a monographic volume where participants may publish papers about the contents of said activity. Simultaneously, this allows to have all the content in one single volume, so that individuals who could not attend the event may study this content by themselves. This also showcases the work of organisers and lecturers, as well as the performance of young mathematicians.

Sumario / Table of contents

Sobre este volumen / About this volume	VII
«Un teorema de Hedlund para 3-variedades foliadas», Álvaro Carballido Costas	1
«La homotopía de los complejos de cadenas», Guille Carrión Santiago	13
«Combinatorics and simplicial groupoids», Alex Cebrian	29
«El espacio de deformaciones de variedades tridimensionales hiperbólicas orientables», Juan Luis Durán Batalla	41
«Números de Milnor en la imagen, puntos múltiples y familias de aplicaciones holomorfas», Roberto Giménez Conejero	57

Sobre este volumen / About this volume

El presente volumen de *TEMat monográficos* contiene contribuciones de algunos de los ponentes del VIII *Encuentro de Jóvenes Topólogos*, celebrado en Santiago de Compostela en octubre de 2019 y organizado por la Red Española de Topología (RET).

This volume of *TEMat monográficos* contains contributions authored by some of the speakers of the VIII *Encuentro de Jóvenes Topólogos*, celebrated in Santiago de Compostela in October 2019 and organized by the Red Española de Topología (RET).

Un teorema de Hedlund para 3-variedades foliadas

✉ Álvaro Carballido Costas

Universidade de Santiago de Compostela
alvarocarballidocostas@gmail.com

Resumen: El objetivo de este texto es dar una prueba elemental de la minimalidad del flujo horocíclico sobre 3-variedades foliadas por superficies hiperbólicas obtenidas como la suspensión de una representación no inyectiva $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+(S^1)$ de un grupo de superficie Γ .

Abstract: The goal of this text is to give an elementary proof of the minimality of the horocycle flow over foliated 3-manifolds obtained as the suspension of a non-injective representation $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Diffeo}_+(S^1)$ of a surface group Γ .

Palabras clave: flujo horocíclico, foliación, Hedlund, minimalidad, superficie hiperbólica, suspensión.

MSC2010: 37C85, 37D40, 57R30.

Agradecimientos: Al profesor Fernando Alcalde Cuesta por ayudarme a comprender todo lo necesario y más para la realización de este artículo.

Referencia: CARBALLIDO COSTAS, Álvaro. «Un teorema de Hedlund para 3-variedades foliadas». En: *TEMat monográficos*, 3 (2021): *Actas del VIII Encuentro de Jóvenes Topólogos*, págs. 1-12. ISSN: 2660-6003. URL: <https://temat.es/monograficos/article/view/vol3-p1>.

© Este trabajo se distribuye bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento 4.0 Internacional
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

1. Introducción

El semiplano complejo superior $\mathbb{H} = \{z = x + iy \mid y > 0\}$ dotado de la métrica $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$ es una variedad riemanniana de curvatura constante negativa e igual a -1 , llamada *plano hiperbólico* o *semiplano de Poincaré*. Si Σ es una superficie hiperbólica, esta se puede obtener como cociente $\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ del plano hiperbólico por un subgrupo discreto de isometrías de \mathbb{H} .

Los horociclos en el plano hiperbólico \mathbb{H} son las circunferencias tangentes al borde $\partial\mathbb{H}$ y las líneas horizontales. El flujo horocíclico (estable) $h_s : T^1\mathbb{H} \rightarrow T^1\mathbb{H}$ es un flujo definido sobre el fibrado tangente unitario al plano hiperbólico que consiste, como veremos, en moverse sobre el horociclo (estable) asociado.

Identificando $T^1\mathbb{H}$ con el grupo de Lie $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm Id\}$, el flujo horocíclico h_s sobre $T^1\mathbb{H}$ coincide con la acción natural por la derecha $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U$ del grupo unipotente

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dada una superficie hiperbólica $\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{H}$, su fibrado tangente unitario $T^1\Sigma \cong \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ y se puede definir el flujo horocíclico h_s sobre la superficie Σ como la acción por la derecha $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U$. El teorema de Hedlund [9] nos dice que, si Σ es compacta, las órbitas de la acción $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U$ son densas. Es decir, el flujo horocíclico sobre una superficie hiperbólica compacta es *minimal*.

De forma intuitiva, una foliación \mathcal{F} de dimensión n sobre una variedad M es una descomposición de la variedad en subvariedades inmersas, llamadas *hojas*, todas de dimensión n y de forma que tienen un buen comportamiento local que describiremos posteriormente. Si las hojas son superficies hiperbólicas (es decir, tienen curvatura -1), podemos definir el flujo horocíclico en cada una de esas hojas y extenderlo globalmente a un flujo $h_s : T^1\mathcal{F} \rightarrow T^1\mathcal{F}$ sobre el tangente unitario a la foliación, llamado *flujo horocíclico foliado*. El estudio de la minimalidad del flujo horocíclico foliado fue propuesto por primera vez por M. Martínez, S. Matsumoto y A. Verjovsky [11].

El problema de la minimalidad del flujo horocíclico foliado ha sido abordado en varios trabajos [1, 2, 12], obteniendo diversos resultados en situaciones distintas a la que vamos a abordar en este texto. Nosotros construiremos las 3-variedades foliadas a través de la suspensión de una representación $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+(S^1)$ de un grupo de superficie Γ en los difeomorfismos de la circunferencia S^1 .

En el caso de representaciones no inyectivas daremos una prueba elemental del siguiente resultado, que es un caso particular del presentado en [2].

Teorema 1 (Hedlund foliado). *Sea (M, \mathcal{F}) una 3-variedad foliada por superficies hiperbólicas densas obtenida como suspensión de una representación no inyectiva $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+(S^1)$. Entonces, el flujo horocíclico foliado sobre $T^1\mathcal{F}$ es minimal.*

El caso de representaciones inyectivas es más complejo y no siempre es cierto que el flujo horocíclico es minimal. El único resultado aplicable es un teorema de Matsumoto [12], que nos asegura que para 3-variedades foliadas por superficies hiperbólicas la minimalidad de la acción $T^1\mathcal{F} \curvearrowright U$ es equivalente a la minimalidad de la acción $T^1\mathcal{F} \curvearrowright B$ del grupo afin

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Hay, sin embargo, casos de foliaciones obtenidas por representaciones inyectivas para las que la B -acción no es minimal.

2. Geometría hiperbólica

2.1. Plano hiperbólico

Sea $\mathbb{H} = \{z = x + iy \mid y > 0\}$ el *plano hiperbólico* o *semiplano de Poincaré*, es decir, el semiplano complejo superior dotado de la métrica $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$. Este espacio es el ejemplo más sencillo de superficie

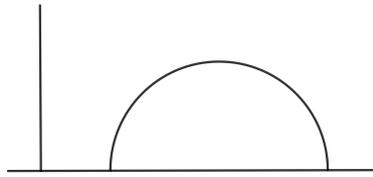


Figura 1: Plano hiperbólico.

hiperbólica, es decir, de superficie con curvatura de Gauss constante e igual a -1 . Las geodésicas de este espacio son las rectas verticales y los semicírculos con centro en el eje real, como se muestra en la figura 1.

Si denotamos por $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ el disco abierto unidad, la transformación conforme

$$\Psi: z \in \mathbb{H} \rightarrow \Psi(z) = i \frac{z - i}{z + i} \in \mathbb{D},$$

llamada *transformación de Cayley*, nos proporciona un modelo de geometría equivalente al del plano hiperbólico, dotado de la métrica riemanniana

$$ds^2 = \frac{4dzd\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}.$$

En este modelo, las geodésicas son los radios del círculo y las circunferencias tangentes al borde del disco $\partial\mathbb{D}$.

Se verifica (véase [10]) que el grupo de isometrías que conservan la orientación del plano hiperbólico es

$$\text{Isom}_+(\mathbb{H}) = \left\{ z \in \mathbb{H} \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \in \mathbb{H} \mid ad - bc = 1 \right\},$$

isomorfo al grupo de Lie $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm\text{Id}\}$, donde

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ac - bd = 1 \right\}.$$

En efecto, cada matriz

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R})$$

determina una transformación

$$z \in \mathbb{H} \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \in \mathbb{H}.$$

De esta forma, el grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa de forma natural sobre el plano hiperbólico \mathbb{H} mediante isometrías. Más adelante necesitaremos la clasificación de las isometrías del plano hiperbólico:

Definición 2. Un elemento $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$ se dice

- (1) *hiperbólico* si fija dos puntos en $\partial\mathbb{H}$ y ninguno en \mathbb{H} ,
- (2) *parabólico* si fija un único punto en $\partial\mathbb{H}$ y ninguno en \mathbb{H} ,
- (3) *elíptico* si fija un punto en \mathbb{H} . ◀

El objetivo ahora es introducir las superficies hiperbólicas y caracterizarlas mediante acciones libres y propiamente discontinuas de grupos fuchsianos sobre \mathbb{H} . Para ello, comenzaremos recordando las nociones necesarias de acciones de grupos.

2.2. Acciones de grupos

Sea Γ un grupo topológico y M un espacio topológico, habitualmente una variedad riemanniana. Una acción $\Gamma \curvearrowright M$ es una aplicación continua

$$\varphi : \Gamma \times M \rightarrow M$$

verificando las siguientes dos propiedades:

- (1) $\varphi(1, x) = x, \quad \forall x \in M,$
- (2) $\varphi(\gamma, \varphi(\gamma', x)) = \varphi(\gamma\gamma', x), \quad \forall \gamma, \gamma' \in \Gamma, \forall x \in M.$

En lo que sigue, dada una acción $\Gamma \curvearrowright M$, denotaremos $\gamma.x$ el elemento $\varphi(\gamma, x)$. Denotamos por

$$\Gamma.x = \{\gamma.x \mid \gamma \in \Gamma\}$$

la *órbita* del punto $x \in M$. Estas órbitas definen una relación de equivalencia sobre M , y el espacio cociente $\Gamma \backslash M$ se llama *espacio de órbitas*.

Definición 3. Una acción $\Gamma \curvearrowright M$ se dice *minimal* si todas sus órbitas son densas en M . ◀

A nosotros nos interesa un tipo particular de acciones, llamadas *acciones libres y propiamente discontinuas*.

Definición 4. Una acción $\Gamma \curvearrowright M$ se dice *libre* si se verifica que

$$\gamma.x = x \implies \gamma = 1.$$

Se dice *transitiva* si para cada $x, y \in M$ existe un elemento $\gamma \in \Gamma$ tal que $y = \gamma.x$. ◀

La noción de acción propiamente discontinua es un poco más compleja, pero aparece naturalmente al preguntarse cuándo el espacio de órbitas $\Gamma \backslash M$ de una acción sobre la variedad diferenciable M sigue siendo una variedad diferenciable. A partir de ahora, los grupos que consideremos serán discretos, es decir, dotados de la topología discreta.

Definición 5. Una acción $\Gamma \curvearrowright M$ de un grupo discreto Γ sobre un espacio topológico Hausdorff M se dice *propiamente discontinua* si

- (1) el espacio de órbitas $\Gamma \backslash M$ es Hausdorff,
- (2) para cada $x \in M$, el grupo de isotropía $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.x = x\}$ es finito, y
- (3) para cada $x \in M$ existe un entorno V_x tal que
 - (i) $\gamma.V_x = V_x, \quad \forall \gamma \in \Gamma_x,$
 - (ii) para cada $\gamma \notin \Gamma_x, \gamma.V_x \cap V_x = \emptyset.$ ◀

La importancia de este tipo de acciones la da el siguiente teorema.

Teorema 6. Sean Γ un grupo discreto y M una variedad diferenciable. Supongamos que el grupo actúa sobre la variedad $\Gamma \curvearrowright M$ de forma libre y propiamente discontinua. Entonces, existe una única estructura de variedad diferenciable sobre el espacio de órbitas $\Gamma \backslash M$ de forma que

$$\pi : M \rightarrow \Gamma \backslash M$$

es una cubierta diferenciable.

En particular, si M es una variedad riemanniana de curvatura de Gauss constante en todo punto, entonces podemos dotar al espacio de órbitas $\Gamma \backslash M$ de una estructura de variedad riemanniana con curvatura de Gauss constante e igual a la de M en todo punto.

Para más información sobre este tema, véase [3].

2.3. Superficies hiperbólicas

Ya estamos en condiciones de precisar lo que es una superficie hiperbólica y enunciar el teorema de Poincaré que las caracteriza como espacios de órbitas de acciones de grupos fuchsianos.

Definición 7. Una *superficie hiperbólica* es una superficie con curvatura de Gauss constante e igual a -1 . ◀

Como habíamos visto, tenemos una acción $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H}$ y, por tanto, cualquier subgrupo $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ actúa también sobre \mathbb{H} .

Definición 8. Un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$ se llama *grupo fuchsiano*. ◀

Teniendo en cuenta el teorema anterior, si $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ es un grupo fuchsiano que actúa libremente sobre \mathbb{H} , el espacio de órbitas $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ es una superficie hiperbólica.

El recíproco también es cierto y la demostración se puede encontrar en [10].

Teorema 9 (Poincaré). Dada una superficie hiperbólica Σ , siempre existe un grupo fuchsiano $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ que actúa libremente sobre \mathbb{H} tal que $\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{H}$.

2.4. Grupos de superficie

Los grupos fuchsianos que nos van a interesar son los grupos de superficie.

Definición 10. Un grupo fuchsiano $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ cocompacto (es decir, $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ es compacto) y sin torsión se llama *grupo de superficie*. ◀

Dado un grupo fuchsiano Γ , se define su conjunto límite como

$$L(\Gamma) = \overline{\Gamma \cdot z} \cap \partial \mathbb{H},$$

que es independiente del punto $z \in \mathbb{H}$ escogido.

Un grupo fuchsiano Γ se dice *no elemental* si su conjunto límite $L(\Gamma)$ es no finito. En particular, los grupos de superficie son grupos no elementales, ya que su conjunto límite coincide con todo el borde del plano hiperbólico $\partial \mathbb{H}$.

Los dos teoremas siguientes relativos a grupos no elementales serán la clave en la prueba del teorema de Hedlund foliado que presentaremos más adelante.

Teorema 11 ([13, Theorem 12.2.14]). Si Γ es un grupo de superficie y $N \triangleleft \Gamma$ es un subgrupo normal, entonces $L(N) = L(\Gamma) = \partial \mathbb{H}$.

La acción lineal $SL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ induce una acción $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \{\pm \text{Id}\}$ que seguiremos llamando *acción lineal*.

Teorema 12 ([6, Proposition 2.6]). Si Γ es un grupo de superficie, entonces existe un elemento $v \in E$ tal que $\overline{\Gamma \cdot v} = E$.

3. Teorema de Hedlund clásico

El objetivo de esta sección es dar las nociones necesarias para poder formular un teorema debido a G. A. Hedlund [9] sobre la minimalidad del flujo horocíclico en superficies hiperbólicas.

3.1. Flujo horocíclico en el plano hiperbólico

Los horociclos en el plano hiperbólico \mathbb{H} son las circunferencias tangentes al borde $\partial \mathbb{H}$ y las líneas horizontales. Un vector tangente unitario $u \in T^1 \mathbb{H}$ determina dos horociclos para los que el vector u es ortogonal a ambos. En uno de ellos, llamado *horociclo estable*, el vector apunta hacia el interior, mientras que en el otro, llamado *horociclo inestable*, apunta hacia el exterior, como se muestra en la figura 2.

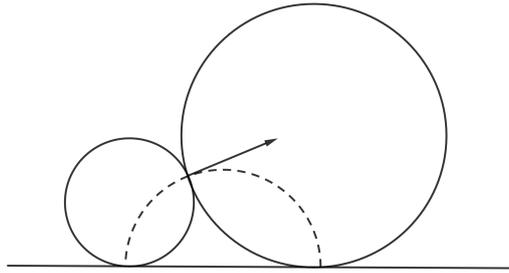


Figura 2: Horociclos.

Definición 13. El flujo horocíclico $h_s : T^1\mathbb{H} \rightarrow T^1\mathbb{H}$ es el flujo definido sobre el tangente unitario al plano hiperbólico definido como sigue: dado un vector $u \in T^1\mathbb{H}$, el vector $h_s(u) \in T^1\mathbb{H}$ se obtiene desplazando el vector u una distancia hiperbólica $|s|$ a lo largo del único horociclo estable que define. Se desplaza en sentido horario si $s < 0$ y antihorario si $s > 0$. Vease la figura 3. ◀

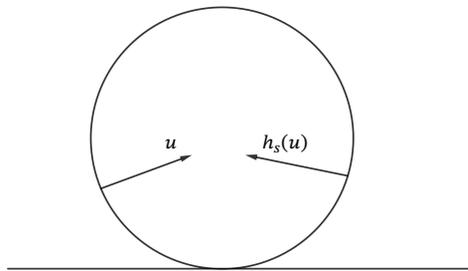


Figura 3: Flujo horocíclico.

3.2. Formulación algebraica del flujo horocíclico

El grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa sobre $T^1\mathbb{H}$ a través de la diferencial, es decir, dado $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ y $u = (z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$, la acción viene dada por

$$g.u = (g(u), g_*(z)\vec{u}).$$

Proposición 14. La acción $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright T^1\mathbb{H}$ anterior es libre y transitiva y podemos identificar $PSL(2, \mathbb{R}) \cong T^1\mathbb{H}$.

Demostración. Si escribimos $g = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R})$ entonces la acción se escribe como

$$g.(z, \vec{u}) = \left(\frac{az + b}{cz + d}, \frac{1}{(cz + d)^2} (u^1 + iu^2) \right),$$

donde $\vec{u} = u^1 + iu^2 \in T_z^1\mathbb{H} \cong \mathbb{C}$.

Dado $(z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ es sencillo comprobar (usando las fórmulas anteriores) que existe una única isometría $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ de forma que $g.(i, \vec{e}_2) = (z, \vec{u})$, siendo $\vec{e}_2 \in T_i^1\mathbb{H}$ el vector unitario con primera coordenada nula.

Teniendo esto en cuenta, la aplicación $\varphi : PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow T^1\mathbb{H}$ definida por $\varphi(g) = g.(i, \vec{e}_2)$ es un homeomorfismo que nos permite identificar

$$PSL(2, \mathbb{R}) \cong T^1\mathbb{H}. \quad \blacksquare$$

Bajo esta identificación, el flujo horocíclico h_s coincide con la acción natural por la derecha $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U$ del grupo unipotente

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

De forma explícita, dado

$$g = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R}),$$

se tiene que

$$h_s(g) = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R}).$$

Esta forma algebraica de describir el flujo horocíclico nos permitirá extenderlo de forma sencilla a contextos más generales, como superficies hiperbólicas o algunos tipos de variedades foliadas.

3.3. Flujo horocíclico sobre una superficie hiperbólica

Como decíamos antes, toda superficie hiperbólica $\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ se puede obtener como el espacio de órbitas de la acción de un grupo fuchsiano Γ sobre el plano hiperbólico \mathbb{H} .

El fibrado tangente unitario $T^1\Sigma$ de tal superficie coincide con el espacio $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$, que a su vez coincide con $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$. Teniendo esto en cuenta, junto con la caracterización algebraica del flujo horocíclico damos la siguiente definición.

Definición 15. Dada una superficie hiperbólica $\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{H}$, se define el *flujo horocíclico*

$$h_s : \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$$

como $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U$, la acción por la derecha del grupo unipotente U sobre el tangente unitario a tal superficie $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$. Es decir,

$$h_s(\Gamma.g) = \Gamma.g \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para cada $g \in PSL(2, \mathbb{R})$. ◀

Recordemos que un flujo, o más generalmente una acción de un grupo sobre un espacio, se dice *minimal* si todas sus órbitas son densas. El teorema de Hedlund clásico nos dice cuándo el flujo horocíclico sobre una superficie hiperbólica es minimal.

Teorema 16 (Hedlund). Si Σ es una superficie hiperbólica compacta, entonces el flujo horocíclico h_s es *minimal*.

El recíproco de este teorema también es cierto [5]: si el flujo horocíclico sobre una superficie hiperbólica es minimal, entonces la superficie tiene que ser compacta.

3.4. Dualidad

Veremos en este apartado lo que llamaremos *principio de dualidad* que nos asegura que la minimalidad del flujo horocíclico $h_s : \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ sobre una superficie hiperbólica es equivalente a la minimalidad de la acción lineal $\Gamma \curvearrowright E$ que definiremos más adelante. Esta dualidad, debida a H. Furstenberg [7], nos permitirá en secciones posteriores dar una prueba elemental de un teorema de tipo Hedlund en el caso de cierto tipo de variedades foliadas.

Si Γ es un grupo de superficie y U el grupo unipotente, hay acciones naturales la izquierda y por la derecha de estos grupos sobre $PSL(2, \mathbb{R})$:

$$\Gamma \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowleft U.$$

Estas acciones inducen otras dos:

$$\Gamma \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R})/U = E \quad \text{y} \quad \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowleft U.$$

A la primera la llamamos *acción lineal*, pues Γ actúa sobre E como subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$, y la segunda es el flujo horocíclico. Es natural pensar que la minimalidad de estas dos acciones tengan relación. El principio de dualidad nos asegura que la minimalidad de una es equivalente a la minimalidad de la otra.

Teorema 17 (principio de dualidad). *El flujo horocíclico $\Gamma \backslash \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U$ es minimal si y solo si la acción lineal $\Gamma \curvearrowright E$ es minimal. Esta dualidad la denotaremos por*

$$\Gamma \backslash \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U \sim \Gamma \curvearrowright E.$$

Con esto, podemos reformular el teorema de Hedlund clásico de la siguiente forma:

Teorema 18 (Hedlund). *Si Γ es un grupo de superficie, entonces la acción lineal $\Gamma \curvearrowright E$ es minimal.*

4. Foliaciones y suspensiones

El objetivo ahora es extender el flujo horocíclico a 3-variedades foliadas definiendo un flujo al que llamaremos *flujo horocíclico foliado*. Estas 3-variedades foliadas se construirán mediante la suspensión de una representación de un grupo de superficie en el grupo de los difeomorfismos de la circunferencia.

4.1. Foliaciones

Dada una variedad diferenciable M de dimensión n , una foliación de dimensión $p \leq n$ sobre M es una descomposición de M en subvariedades inmersas, llamadas *hojas*, de dimensión p y dispuestas de modo que localmente se parece a la descomposición canónica de \mathbb{R}^n por los subespacios \mathbb{R}^p . De esta forma, el primer ejemplo de foliación se obtiene al considerar $M = \mathbb{R}^n$ y definir la hoja que pasa por $(x, y) = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^n$ como el plano afín

$$L_y = \{(x', y) \in \mathbb{R}^n \mid x' = (x'_1, \dots, x'_p) \in \mathbb{R}^p\} = \mathbb{R}^p \times \{y\}$$

de dimensión p . Se dice entonces que la familia $\mathcal{F} = \{L_y \mid y \in \mathbb{R}^q\}$ es una *foliación de dimensión p y codimensión q* y el par $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F})$ es una *variedad foliada*.

Aunque la idea de foliación es intuitiva y el ejemplo anterior es sencillo, conviene dar una definición más precisa de lo que es una foliación.

Definición 19. Dada una variedad M de dimensión n , se llama *atlas foliado* de dimensión p sobre M a un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ formado por difeomorfismos

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow B^p \times B^q$$

definidos sobre abiertos U_α que recubren M , siendo B^p y B^q las bolas abiertas de radio unidad centradas en el origen en \mathbb{R}^p y \mathbb{R}^q con $n = p + q$. Además, este atlas tiene que verificar la siguiente condición: si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces el cambio de cartas

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

está dado por

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = (g_{\alpha\beta}(x, y), h_{\alpha\beta}(y)).$$

Las subvariedades embebidas $P_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(B^p \times \{y\})$ se llaman *placas*. Por definición, si dos abiertos foliados U_α y U_β se cortan, la unión de dos placas P_α y P_β que pasan por un punto de la intersección sigue siendo una subvariedad embebida y conexa de dimensión p .

Definición 20. Se llama *hoja* a una unión conexa y maximal de placas. Por cada punto $x \in M$ pasa una única hoja que denotaremos por L_x . La descomposición

$$\mathcal{F} = \{L_x \mid x \in M\}$$

se llama *foliación* de M definida por el atlas foliado $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$.

Ejemplo 21. Dado un número irracional $\theta \notin \mathbb{Q}$, la acción $\mathbb{R} \curvearrowright T^2$ de los reales sobre el toro T^2 definida por el flujo

$$\Phi_t(e^{2\pi x}, e^{2\pi y}) = (e^{2\pi(x+t)}, e^{2\pi(y+t)})$$

determina una foliación sobre el toro de dimensión 1 con todas las hojas densas. Véase la figura 5.

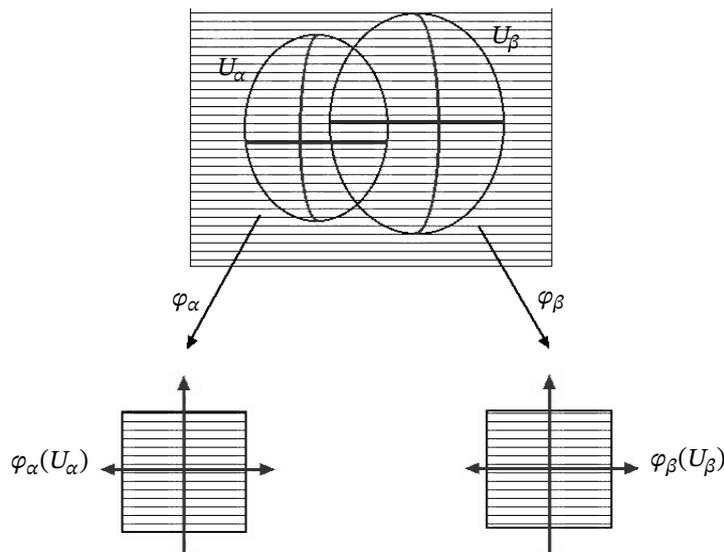


Figura 4: Cambio de cartas de un atlas foliado.

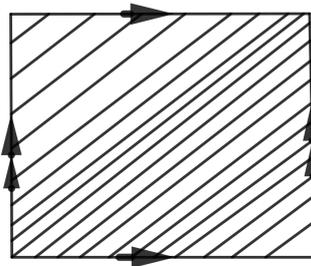


Figura 5: Foliación lineal del toro.

4.2. Suspensión de una representación

Nos interesa considerar una variedad foliada por superficies hiperbólicas, es decir, en la que cada hoja de la foliación sea una superficie hiperbólica. La *suspensión* de una representación nos permitirá obtener este tipo de espacios. Cabe mencionar que, aunque la suspensión de una representación se puede hacer de forma bastante general, nos limitaremos a suspensiones de representaciones de grupos de superficie en $\text{Difeo}_+(S^1)$. Recordemos que una *representación* $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+(S^1)$ no es más que un homomorfismo de grupos.

Si tenemos una representación $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+(S^1)$ de un grupo de superficie Γ , se llama *acción diagonal* a la acción de Γ sobre $\mathbb{H} \times S^1$ definida por

$$\gamma \cdot (z, \zeta) = (\gamma(z), \rho(\gamma)(\zeta))$$

para cada $z \in \mathbb{H}$ y cada $\zeta \in S^1$. Llamemos

$$q : \mathbb{H} \times S^1 \rightarrow \Gamma \backslash (\mathbb{H} \times S^1)$$

a la aplicación cociente y $\mathcal{H} = \{\mathbb{H} \times \{\zeta\} \mid \zeta \in S^1\}$ a la *foliación horizontal* de $\mathbb{H} \times S^1$. Esta foliación es invariante por la acción de Γ y, por lo tanto, pasa al cociente en una nueva foliación

$$\mathcal{F} = \{q(\mathbb{H} \times \{\zeta\}) \mid \zeta \in S^1\}$$

sobre la variedad cociente $M = \Gamma \backslash (\mathbb{H} \times S^1)$.

Las hojas

$$q(\mathbb{H} \times \{\zeta\}) \cong \Gamma_\zeta \backslash \mathbb{H},$$

donde $\Gamma_\zeta = \{\gamma \in \Gamma \mid \rho(\gamma)(\zeta) = \zeta\}$ es el subgrupo de isotropía de $\zeta \in S^1$. A su vez, $\Gamma_\zeta < PSL(2, \mathbb{R})$ es un grupo fuchsiano, luego cada una de las hojas de la foliación \mathcal{F} de M tiene estructura natural de superficie hiperbólica. Por eso se dice que la variedad M está foliada por superficies hiperbólicas.

Definición 22. Se dice que el par (M, \mathcal{F}) es la *suspensión de la representación* ρ . ◀

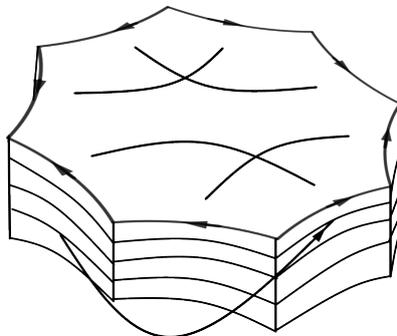


Figura 6: Suspensión.

Para profundizar sobre esta construcción véase [8].

4.3. Flujo horocíclico foliado

El objetivo ahora es definir el flujo horocíclico sobre la variedad foliada $M = \Gamma \backslash (\mathbb{H} \times S^1)$ obtenida mediante la suspensión de una representación ρ .

Dada una variedad foliada (M, \mathcal{F}) , como hemos indicado antes, se define el *fibrado tangente a la foliación* \mathcal{F} como

$$T\mathcal{F} = \bigsqcup_{L \in \mathcal{F}} TL.$$

De forma análoga, como cada hoja de la foliación tiene asociada una métrica riemanniana, se define el *fibrado tangente unitario a la foliación* \mathcal{F} como

$$T^1\mathcal{F} = \bigsqcup_{L \in \mathcal{F}} T^1L.$$

Es en este fibrado donde está definido el flujo horocíclico foliado

$$h_s^+ : T^1\mathcal{F} \rightarrow T^1\mathcal{F}.$$

Para definir de forma sencilla este flujo, lo que haremos será caracterizar algebraicamente este fibrado tangente para que, como sucedía antes, el flujo horocíclico esté definido por la acción por la derecha del grupo U .

Notemos en primer lugar que $T^1\mathcal{H} = T^1\mathbb{H} \times S^1$ y $T^1\mathcal{F} \cong \Gamma \backslash T^1\mathcal{H}$. Recordando que $T^1\mathbb{H} \cong PSL(2, \mathbb{R})$ obtenemos que

$$T^1\mathcal{F} \cong \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1).$$

Ahora bien, el grupo unipotente U actúa por la derecha sobre $PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1$ mediante multiplicación sobre el primer factor y trivialmente sobre el segundo. Por tanto, U también actúa sobre $T^1\mathcal{F} = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1)$.

Definición 23. Sea (M, \mathcal{F}) la suspensión de una representación ρ . Se define el *flujo horocíclico foliado* $h_s : T^1\mathcal{F} \rightarrow T^1\mathcal{F}$ como la acción por la derecha del grupo U sobre $T^1\mathcal{F} \cong \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1)$. Explícitamente,

$$h_s(\Gamma \cdot (g, \zeta)) = \Gamma \cdot \left(g \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \zeta \right)$$

para cada $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ y cada $\zeta \in S^1$. ◀

Una vez definido el flujo horocíclico foliado cabe preguntarse si es minimal, es decir, si todas sus órbitas son densas. Nos centraremos en el caso de que la representación ρ sea una representación no inyectiva.

5. Teorema de Hedlund foliado

5.1. Dualidad

Consideremos (M, \mathcal{F}) la suspensión de una representación $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+(S^1)$ de un grupo de superficie Γ . La clave está en considerar de nuevo la dualidad introducida en la sección 3. En este caso, se tiene el siguiente resultado

Teorema 24 (principio de dualidad). *La minimalidad del flujo horocíclico foliado $h_s : T^1\mathcal{F} \rightarrow T^1\mathcal{F}$ es equivalente a la minimalidad de la acción diagonal $\Gamma \curvearrowright E \times S^1$ dada por*

$$\gamma.(v, \zeta) = (\gamma.v, \rho(\gamma)(\zeta))$$

con $\gamma \in \Gamma$, $v \in E$ y $\zeta \in S^1$. Con la notación introducida en la sección 3 tenemos que

$$\Gamma \backslash (\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times S^1) \curvearrowright U \sim \Gamma \curvearrowright E \times S^1.$$

Notemos que si el flujo horocíclico foliado es minimal, por dualidad, la acción $\Gamma \curvearrowright E \times S^1$ también lo es. Más aún, como Γ actúa de forma independiente sobre ambos factores de $E \times S^1$, si el flujo horocíclico es minimal, entonces la acción $\Gamma \curvearrowright S^1$ también es minimal. Notemos que la acción $\Gamma \curvearrowright E$ es minimal por el teorema de Hedlund clásico.

Esta condición necesaria la vamos a añadir como hipótesis. A su vez, usando un principio de dualidad parecido al introducido anteriormente, se ve que la minimalidad de la acción $\Gamma \curvearrowright S^1$ es equivalente a que la foliación \mathcal{F} por superficies hiperbólicas tenga hojas densas en M .

Hipótesis. La foliación \mathcal{F} sobre M obtenida mediante la suspensión de una representación ρ tiene hojas densas, o, de modo equivalente, la acción $\Gamma \curvearrowright S^1$ es minimal. ◀

5.2. Enunciado

En el caso de una representación no inyectiva $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+(S^1)$ se tiene el siguiente resultado, que es un caso particular del resultado demostrado en [2].

Teorema 25 (Hedlund foliado). *Sea (M, \mathcal{F}) una 3-variedad foliada obtenida como suspensión de una representación $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+(S^1)$ de un grupo de superficie Γ . Supongamos que la foliación \mathcal{F} es minimal y la representación ρ es no inyectiva. Entonces, el flujo horocíclico foliado h_s^+ definido sobre el tangente unitario $T^1\mathcal{F}$ es minimal.*

En el caso de que la representación ρ sea inyectiva, el argumento del teorema anterior no funciona y es necesario usar el siguiente resultado.

Teorema 26 (Matsumoto [12]). *Sea (M, \mathcal{F}) una 3-variedad foliada por superficies hiperbólicas densas obtenida como la suspensión de una representación $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+(S^1)$. Entonces, la minimalidad de la acción $T^1\mathcal{F} \curvearrowright U$ es equivalente a la minimalidad de la acción $T^1\mathcal{F} \curvearrowright B$ del grupo afín.*

De hecho, el teorema anterior es más general y se aplica a cualquier 3-variedad foliada por superficies hiperbólicas. Sin embargo, hay foliaciones inyectivas tales que la acción $T^1\mathcal{F} \curvearrowright B$ no es minimal.

5.3. Prueba del teorema

En esta última parte procederemos a la prueba del teorema de Hedlund foliado (teorema 25). Como señalábamos, por dualidad nos basta probar que la acción diagonal $\Gamma \curvearrowright E \times S^1$ es minimal. Como Γ es un grupo de superficie, entonces $L(\Gamma) = \partial\mathbb{H}$. Como el núcleo $N = \text{Ker}\rho \triangleleft \Gamma$ es no trivial, sabemos por el teorema 11 que $L(N) = L(\Gamma) = \partial\mathbb{H}$. Luego N es también un grupo no elemental y, por tanto, existe $v \in E$ tal que $N.v = E$, de acuerdo con el teorema 12.

Procedemos en tres etapas:

- (i) Para cada $\zeta \in S^1$, tenemos que $E \times \{\zeta\} \subset \overline{\Gamma.(v, \zeta)}$. En efecto, como $E = \overline{N.v}$, para cada $w \in E$ existe una sucesión $\{\gamma_n\}$ de elementos de N tal que $\{\gamma_n.v\} \rightarrow w$. Así, la sucesión de puntos

$$\gamma_n.(v, \zeta) = (\gamma_n.v, \zeta) \in \Gamma.(v, \zeta)$$

converge al punto $(w, \zeta) \in \overline{\Gamma.(v, \zeta)}$, lo que prueba la afirmación (i).

- (ii) Para cada $\zeta \in S^1$, la Γ -órbita de (v, ζ) es densa, es decir, $\overline{\Gamma.(v, \zeta)} = E \times S^1$. En efecto, consideremos un punto arbitrario $(v', \zeta') \in E \times S^1$. Puesto que $\Gamma \curvearrowright S^1$ es minimal por hipótesis, hay una sucesión $\{\gamma_n\}$ de elementos de Γ tal que $\{\rho(\gamma_n)\zeta\} \rightarrow \zeta'$. Por otra parte, por la propiedad (i), los puntos

$$(\gamma_n^{-1}v', \zeta) \in E \times \{\zeta\} \subset \overline{\Gamma.(v, \zeta)}.$$

Puesto que $\overline{\Gamma.(v, \zeta)}$ es Γ -invariante, tenemos una sucesión de puntos

$$\gamma_n.(\gamma_n^{-1}v', \zeta) = (v', \rho(\gamma_n)\zeta)$$

pertenecientes a $\overline{\Gamma.(v, \zeta)}$ que converge al punto (v', ζ') . Luego $(v', \zeta') \in \overline{\Gamma.(v, \zeta)}$, lo que prueba la afirmación (ii).

- (iii) Por último, para cada $(v', \zeta') \in E \times S^1$, tenemos que $\overline{\Gamma.(v', \zeta')} = E \times S^1$. En efecto, por el teorema 18 la acción $\Gamma \curvearrowright E$ es minimal, existe una sucesión $\{\gamma'_n\}$ de elementos de Γ tal que $\{\gamma'_n.v'\} \rightarrow v$. Por compacidad de S^1 , extrayendo una subsucesión convergente si fuese necesario, podemos suponer que la sucesión $\{\rho(\gamma'_n)(\zeta')\}$ converge a un punto $\zeta \in S^1$. En tal caso, la sucesión de puntos

$$\gamma'_n.(v', \zeta') = (\gamma'_n.v', \rho(\gamma'_n)(\zeta')) \in \Gamma.(v', \zeta')$$

converge al punto (v, ζ) y, por consiguiente, $(v, \zeta) \in \overline{\Gamma.(v', \zeta')}$. Como consecuencia de la propiedad (ii) y de que $\overline{\Gamma.(v', \zeta')}$ es Γ -invariante y cerrado, deducimos que

$$E \times S^1 = \overline{\Gamma.(v, \zeta)} \subset \overline{\Gamma.(v', \zeta')}$$

y, por tanto, $E \times S^1 = \overline{\Gamma.(v', \zeta')}$. Luego hemos probado que la acción diagonal $\Gamma \curvearrowright E \times S^1$ es minimal.

Referencias

- [1] ALCALDE, F y DAL'BO, F «Remarks on the dynamics of the horocycle flow for homogeneous foliations by hyperbolic surfaces». En: *Expo. Math.* 33 (2015).
- [2] ALCALDE, F; DAL'BO, F; MARTÍNEZ, M., y VERJOVSKY, A. «Minimality of the horocycle flow on laminations by hyperbolic surfaces with non-trivial topology». En: *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 36 (2016).
- [3] BOOTHBY, W. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic press, 2002.
- [4] CARBALLIDO COSTAS, Á. *Un teorema de Hedlund para fibrados foliados sobre superficies hiperbólicas*. Trabajo Fin de Máster. Universidade de Santiago de Compostela, 2019.
- [5] DAL'BO, F. «Topologie du feuilletage fortement stable». En: *Ann. Inst. Fourier* 50 (2000).
- [6] DAL'BO, F. *Geodesic and horocycle trajectories*. London: Springer-Verlag, 2011.
- [7] FURSTENBERG, H. «Strict ergodicity and transformations of the torus». En: *Amer. J. Math.* 83 (1961).
- [8] HECTOR, G. *Introduction to the geometry of foliations. Part A*. Vieweg & Sohn, 1981.
- [9] HEDLUND, G. A. «Fuchsian groups and transitive horocycles». En: *Duke Math. J.* 2 (1936).
- [10] KATOK, S. *Fuchsian groups*. Chicago: University of Chicago press, 2011.
- [11] MARTÍNEZ, M.; MATSUMOTO, S., y VERJOVSKY, A. «Horocycle flow for laminations by hyperbolic Riemann surfaces and Hedlund's theorem». En: *J. Mod. Dyn.* 10 (2016).
- [12] MATSUMOTO, S. «Remarks on the horocycle flow for foliations by hyperbolic surfaces». En: *Proc. Amer. Math. Soc.* 145 (2017).
- [13] RATCLIFFE, J. G. *Foundations of hyperbolic manifolds*. New York: Springer, 2006.

La homotopía de los complejos de cadenas

✉ Guille Carrión Santiago

Universitat Autònoma de Barcelona

guillecarrion@mat.uab.cat

Resumen: Los complejos de cadenas surgen de forma natural de la topología y poseen muchas propiedades homotópicas como, por ejemplo, la relación de homotopía o ser contráctil. Analizaremos las construcciones de objetos cilindro y de camino con el fin de entender bien la relación de homotopía en complejos de cadenas y la diferencia con los cuasi-isomorfismos. Además, introduciremos algunos conceptos de categorías de modelos y los aplicaremos en la categoría de complejos de cadenas.

Abstract: Chain complexes arise naturally from topology and possess many homotopic properties such as the homotopy relation or being contractible. We will study the constructions of cylinder and path objects in order to understand the homotopy relationship in chain complexes and the difference with quasi-isomorphisms. We will also introduce some notions from model categories and apply them to the category of chain complexes.

Palabras clave: complejos de cadenas, categoría de modelos, teoría de homotopía, objeto cilindro, objeto caminos, homotopía.

MSC2010: 18G35, 18N40, 55U15.

Agradecimientos: Muchas gracias a Natàlia Castellana y a Antonio Díaz por leer la versión preliminar de estas notas.

El autor está financiado por el proyecto FEDER-MEC MTM2016-80439-P del Ministerio Español de Economía y Competitividad.

Referencia: CARRIÓN SANTIAGO, Guille. «La homotopía de los complejos de cadenas». En: *TEMat monográficos*, 3 (2021); *Actas del VIII Encuentro de Jóvenes Topólogos*, págs. 13-28. ISSN: 2660-6003. URL: <https://temat.es/monograficos/article/view/vol3-p13>.

© Este trabajo se distribuye bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento 4.0 Internacional <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

1. Introducción

Los complejos de cadenas sobre grupos abelianos $\text{Ch}(\mathbf{Ab})$ aparecen de forma natural en la topología algebraica para definir la homología de un espacio topológico. Dado X un espacio topológico, construimos el complejo de cadenas singulares

$$C(X) : \dots C_i(X) \xrightarrow{d_i} C_{i-1}(X) \rightarrow \dots \rightarrow C_2(X) \xrightarrow{d_2} C_1(X) \xrightarrow{d_1} C_0(X) \longrightarrow 0,$$

donde $C_i(X)$ es el grupo abeliano libre generado por las i -símplices singulares en X , de forma que la homología de X es la homología del complejo de cadenas $C(X)$, es decir,

$$H_i(X) = H_i(C(X)) = \ker \partial_i / \text{Im} \partial_{i+1}.$$

Una propiedad importante es que, si $f, g : X \rightarrow Y$ son dos aplicaciones homótopas, estas definen el mismo homomorfismo de grupos en homología:

$$f_* = g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y).$$

Pero es más, se puede definir una relación de homotopía entre homomorfismos de complejos de cadenas que imita esta relación para espacios topológicos; para ello haremos uso del concepto de categoría de modelos.

¡Atención! Antes de que decida dejar de leer, quiero adelantarle que no va a necesitar saber gran cosa de categoría de modelos y que *solo trabajaremos con complejos de (co)cadenas y espacios topológicos*. El concepto de «categoría de modelos» estará de fondo y no es necesario que sea un experto en el tema. Por el contrario, sí será interesante que esté familiarizado con algunos conceptos de teoría de categorías, los cuales puede encontrar en los apéndices A1 y A2 de [7]; los capítulos I, II y III de [3], y, si tiene algunos conocimientos, la sección 2 de [1]. No obstante, definiremos el concepto de categoría de modelos para el lector que desee entrar en detalle.

Definición 1. Dado un diagrama conmutativo

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

un **levantamiento** para dicho diagrama es una aplicación $h : B \rightarrow X$ tal que $hi = f$ y $ph = g$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow i & \nearrow h & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Definición 2 ([1, Definición 3.3]). Una **categoría de modelos** es una categoría \mathcal{M} bicompleta¹ equipada con tres clases distinguidas de morfismos:

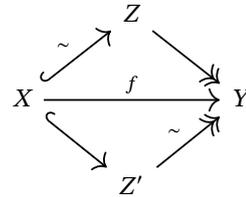
- $\xrightarrow{\sim}$ equivalencias débiles;
- \twoheadrightarrow fibraciones;
- \hookrightarrow cofibraciones.

Si un morfismo es equivalencia débil y cofibración (resp. fibración) diremos que es una cofibración (resp. fibración) acíclica.

- A1. Cada clase es cerrada frente a la composición y contiene todas las identidades.

¹Una categoría \mathcal{M} se dice que es bicompleta si existe todos los límites y colímites finitos.

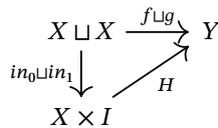
- A2. Dados f, g dos morfismos tales que fg está definido, se tiene que si dos de las tres son equivalencias débiles, entonces la tercera lo es.
- A3. Si f es un retracto de g , f está en las mismas clases que g .
- A4. Dado un diagrama conmutativo como (1), existe un levantamiento si i es una cofibración acíclica y p una fibración o si i es una cofibración y p una fibración acíclica.
- A5. Cualquier morfismo $f : X \rightarrow Y$ factoriza como



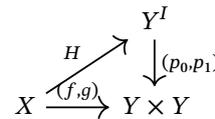
Si el lector se siente abrumado con esta definición, es suficiente que piense que una categoría de modelos \mathcal{M} nos permite desarrollar una teoría de homotopía sobre dicha categoría. Comenzando por la relación de homotopía, ¿qué significa que dos aplicaciones $f, g \in \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y)$ ² sean homótopas?

Tenemos dos posibles opciones para definir esta relación de equivalencia:

Definición 3. Dos aplicaciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ son **homótopas** si la aplicación $f \sqcup g : X \sqcup X \rightarrow Y$ se extiende a una aplicación $H : X \times I \rightarrow Y$:



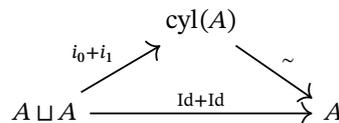
Definición 4. Dos aplicaciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ son **homótopas** si la aplicación $(f, g) : X \rightarrow Y \times Y$ se levanta a una aplicación $H : X \rightarrow Y^I$:



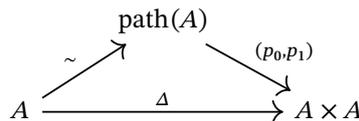
Para ver que ambas definiciones son equivalentes es suficiente comprobar que $H : X \rightarrow Y^I$ es continua si y solo si la evaluación $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Y$ es continua (véase [5, Teorema 46.11]).

Para definir la relación de homotopía en una categoría de modelos necesitamos definir primero las nociones de objeto cilindro y de objeto de caminos.

Definición 5. Sea \mathcal{M} una categoría de modelos y A un objeto de \mathcal{M} . Un **objeto cilindro** para A es un objeto $\text{cyl}(A)$ en \mathcal{M} equipado con tres morfismos $i_0, i_1 : A \sqcup A \rightarrow \text{cyl}(A)$ y $p : \text{cyl}(A) \xrightarrow{\sim} A$ de forma que el siguiente diagrama es conmutativo:



Un **objeto de caminos** para A es un objeto $\text{path}(A)$ en \mathcal{M} equipado con tres morfismos $p_0, p_1 : \text{path}(A) \rightarrow A$ e $i : A \xrightarrow{\sim} \text{path}(A)$ de forma que el siguiente diagrama es conmutativo:



El objetivo de este texto es ser una agradable introducción a la categoría de modelos para complejos de cadenas. A pesar de la promesa de no abrumar al lector con demasiados tecnicismos, conviene dar al menos una estructura de categoría de modelos para **Top** en la que esta definición «sea lo que tiene que ser».

²Aquí $\text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y)$ es el conjunto de aplicaciones continuas entre los espacios topológicos X e Y .

1.1. Categoría de modelos de Hurewicz (o de Strøm)

Sea $A \subset B$ un subespacio cerrado e $i : A \rightarrow B$ la inclusión de subespacio. Decimos que i es una cofibración cerrada de Hurewicz si, para cada Y , el siguiente diagrama se levanta:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & Y^I \\ \downarrow i & & \downarrow p_0 \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

es decir, si «toda homotopía definida en A se extiende a una homotopía definida en todo el espacio».

Una aplicación $p : X \rightarrow Y$ es una fibración de Hurewicz si p tiene la propiedad del levantamiento de homotopías. Esto es, para cada espacio A , el siguiente diagrama se levanta:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow i_0 & & \downarrow p \\ A \times I & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Teorema 6 ([4, Teorema 17.1.1]). *La categoría de espacios topológicos es una categoría de modelos si definimos*

- $\xrightarrow{\sim}$ como las equivalencias débiles, las equivalencias de homotopía,
- \hookrightarrow como las cofibraciones, las cofibraciones cerradas de Hurewicz y
- \twoheadrightarrow como las fibraciones, las fibraciones de Hurewicz.

Esta categoría de modelos recibe el nombre de categoría de modelos de Hurewicz o de Strøm. El lector más familiarizado con la materia conocerá la existencia de la categoría de modelos de Quillen para espacios topológicos (véase [4, Sección 17.2] o [1, Sección 8]). Pero para nuestro objetivo, con tener una referencia para espacios topológicos es suficiente.

Para la categoría de modelos de Hurewicz es trivial comprobar que para todo espacio topológico, $X \times I$ es un objeto cilindro y que X^I es un objeto de caminos para X .

1.2. Homotopía

Una vez definido el objeto cilindro y el objeto de caminos para una categoría de modelos, reescribiendo las definiciones de homotopía para espacios topológicos tenemos las equivalentes para categorías de modelos:

Definición 7. Sea \mathcal{M} una categoría de modelos. Diremos que dos morfismos $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y)$ son **homótopos por la izquierda**, y lo denotaremos por $f \stackrel{l}{\sim} g$, si existe un objeto cilindro $\text{cyl}(X)$ tal que el morfismo $f + g : X \sqcup X \rightarrow Y$ se extiende a $H : \text{cyl}(X) \rightarrow Y$.

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \xrightarrow{f+g} & Y \\ \downarrow in_0+in_1 & \nearrow H & \\ \text{cyl}(X) & & \end{array}$$

Definición 8. Sea \mathcal{M} una categoría de modelos. Diremos que dos morfismos $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y)$ son **homótopos por la derecha**, y lo denotaremos por $f \stackrel{r}{\sim} g$, si existe un objeto de caminos $\text{path}(X)$ tal que el morfismo $(f, g) : X \rightarrow Y \times Y$ se levanta a $H : X \rightarrow \text{path}(X)$.

$$\begin{array}{ccc} & Y^I & \\ & \downarrow (p_0, p_1) & \\ X & \xrightarrow{(f, g)} & Y \times Y \\ & \nearrow H & \end{array}$$

Observación 9. Cuando pasamos de espacios topológicos a categorías de modelos, la relación de homotopía definida por cilindros y caminos puede no ser la misma; es más, en general, estas relaciones no tienen por qué ser de equivalencia. Pueden consultarse más detalles en las notas originales de Quillen [6, Capítulo I, sección 1.5].

2. Categoría de modelos para complejos de cadenas

En esta sección vamos a trabajar en la categoría de complejos de cadenas de grupos abelianos y en adelante escribiremos Ch para referirnos a $\text{Ch}(\mathbf{Ab})$. Nos centraremos en grupos abelianos para simplificar la mayoría de cálculos, pero los resultados son ciertos también para $R\text{-mod}$. Es posible dar los resultados en complejo de cadenas y de cocadenas, pero para homogeneizar la notación, trabajaremos siempre en complejos de cadenas sin asumir, en general, ninguna acotación sobre el grado. Definiremos de manera formal qué significa que dos aplicaciones sean homótopas y probaremos más adelante que es justo la definición de homotopía con cilindros y caminos para categorías de modelos.

Definición 10. Sean $f, g : C \rightarrow D$ dos aplicaciones entre complejos de cadenas. Decimos que f es **homótopa** a g , y denotaremos $f \simeq g$, si y solo si existe una aplicación $s : C \rightarrow D$ de grado 1 tal que

$$f - g = \partial_D s + s \partial_C,$$

donde ∂_D y ∂_C son las diferenciales de D y C , respectivamente. Decimos que $f : C \rightarrow D$ es una **equivalencia de homotopía** si existe una aplicación $g : D \rightarrow C$ tal que

$$fg \simeq \text{Id}_D \text{ y } gf \simeq \text{Id}_C. \quad \blacktriangleleft$$

Para poder ver que esta definición de homotopía coincide con la definición de homotopía (a izquierda y derecha) en la categoría de modelos definida en la definición 7 (o definición 8) tenemos que dotar a Ch de estructura de categoría de modelos.

Definición 11. Decimos que un monomorfismo $m : C \rightarrow D$ entre grupos abelianos **escinde**, si existe un morfismo $r : D \rightarrow C$ tal que $rm = \text{Id}_C$. Dualmente, decimos que un epimorfismo $e : D \rightarrow C$ entre grupos abelianos **escinde**, si existe un morfismo $s : C \rightarrow D$, tal que $es = \text{Id}_C$. \blacktriangleleft

Teorema 12 ([4, Teorema 18.3.1, Definición 18.3.3]). Sea $f : C \rightarrow D$ una aplicación en Ch . Definimos que f es

- $\xrightarrow{\sim}$ una equivalencia débil si es una equivalencia de homotopía,
- \hookrightarrow una cofibración si grado a grado es un monomorfismo que escinde y
- \twoheadrightarrow una fibración si grado a grado es un epimorfismo que escinde.

En tal situación, Ch tiene estructura de categoría de modelos.

Aunque esta categoría de modelos es útil para «igualar» aplicaciones homótopas (veremos esto más adelante), no es tan útil para trabajar en homología, ya que una aplicación entre complejos de cadenas que induce un isomorfismo en homología no siempre es una equivalencia de homotopía.

Definición 13. Decimos que una aplicación $f : C \rightarrow D$ entre complejos de cadenas es un **cuasi-isomorfismo** si, para cada $k \in \mathbb{Z}$, la aplicación inducida en homología

$$f_* : H_k(C) \xrightarrow{\cong} H_k(D)$$

es un isomorfismo. \blacktriangleleft

Ejemplo 14. Consideremos los complejos de cadenas

$$C : \dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad D : \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0.$$

Claramente,

$$H_0(C) = H_2(C) = \mathbb{Z}_2 = H_0(D) = H_2(D) \quad \text{y} \quad H_n(C) = H_n(D) \text{ en otro caso.}$$

Por tanto, es sensato pensar que podría existir una equivalencia de homotopía entre ellos. La única aplicación $f : C \rightarrow D$ candidata a ser equivalencia de homotopía es

$$\begin{array}{ccccccccccc} C : \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow p & & \downarrow 0 & & \downarrow p & & \downarrow 0 \\ D : \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

siendo $p : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ la proyección. La única aplicación $D \rightarrow C$ es la constante 0, que claramente no puede ser una inversa homotópica de f . En el ejemplo 28 veremos que f es un cuasi-isomorfismo. ◀

Este ejemplo ilustra que existen cuasi-isomorfismos que no son equivalencias de homotopía. Este «problema» lo solucionamos con las categorías de modelos de Quillen.

Teorema 15 (categoría de modelos de Quillen proyectiva [1, sección 7]). *Sea $\text{Ch}_{\geq 0}$ la categoría de complejos de cadenas acotados inferiormente. La siguiente clasificación de homomorfismos define una categoría de modelos en $\text{Ch}_{\geq 0}$. Una aplicación $f : C \rightarrow D$ es una*

- $\xrightarrow{\sim}$ *equivalencia débil si f induce un isomorfismo en homología,*
- \hookrightarrow *cofibración si en cada grado es un monomorfismo con conúcleo proyectivo y*
- \twoheadrightarrow *fibración si es un epimorfismo en cada grado.*

Dual a esta categoría de modelos está la categoría de modelos de Quillen inyectiva.

Teorema 16 (categoría de modelos de Quillen inyectiva). *Sea $\text{Ch}_{\leq 0}$ la categoría de complejos de cadenas acotados superiormente. La siguiente clasificación de homomorfismos define una categoría de modelos en $\text{Ch}_{\leq 0}$. Una aplicación $f : C \rightarrow D$ es una*

- $\xrightarrow{\sim}$ *equivalencia débil si f induce un isomorfismo en homología,*
- \hookrightarrow *cofibración si en cada grado es monomorfismo y*
- \twoheadrightarrow *fibración si en cada grado es un epimorfismo que escinde con núcleo inyectivo.*

Dada una categoría de modelos \mathcal{M} se construye una categoría $\text{Ho}(\mathcal{M})$ que recibe el nombre de categoría homotópica (ver [1, sección 5]) en la que las equivalencias débiles en \mathcal{M} pasan a ser isomorfismos en $\text{Ho}(\mathcal{M})$. En el caso de complejos de cadenas acotados, estas dos últimas categorías de modelos inducen (como es de esperar) la misma categoría homotópica. Para nuestro objetivo trabajaremos fundamentalmente con la categoría de modelos del teorema 12, aunque es interesante conocer estas dos últimas.

2.1. Objeto cilindro y objeto de caminos

En esta sección construiremos el objeto cilindro y el objeto de caminos para complejos de cadenas inspirándonos en la construcción sobre espacios topológicos. Para ello, tomemos un espacio topológico X . Para simplificar el razonamiento, supondremos que X es un CW-complejo. Lo primero que nos preguntamos es ¿qué complejo de cadenas jugará el papel del intervalo $[0, 1]$?

Si consideramos $C(I)$ el complejo de cadenas celular de $[0, 1]$ considerando 0 y 1 como 0-celdas y $(0, 1)$ como una 1-celda, tenemos

$$C(I) : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(\text{Id}_{\mathbb{Z}}, -\text{Id}_{\mathbb{Z}})} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

En adelante, con el fin de no recargar la notación, llamaremos indistintamente I al intervalo $[0, 1]$ y a su complejo de cadenas celular.

Comencemos por la construcción del cilindro. Para apoyarnos visualmente, pensemos que $X = I^2$ y veamos la descomposición celular de $X \times I$.

La descomposición celular del producto consiste en el producto cartesiano de las celdas de X por las celdas de I y la dimensión de cada celda es la suma de las dimensiones de cada uno de los factores. Si pensamos en el ejemplo en el que $X = I^2$, las 0-celdas de $X \times I$ son producto de 0-celdas de X por 0-celdas de I ; las 1-celdas son 1-celdas de X por 0-celdas de I y 1-celdas de I por 0-celdas de X ; las 2-celdas son la 2-celda de X por cada una de las 0-celdas de I y las 1-celdas de X por la 1-celda de I , y, por último, la 3-celda es la 2-celda de X por la 1 celda de I , tal y como vemos en la figura 1. Si denotamos por X^n las n -celdas de X y por I^n las n -celdas de I , las m -celdas de $X \times I$ son celdas del producto $X^i \times I^j$ con $i + j = m$.

En general, para un CW-complejo X , el complejo de cadenas celular de $X \times I$ es

$$C(X \times I) : \dots C_n(X) \oplus C_{n-1}(X) \oplus C_n(X) \rightarrow \dots \rightarrow C_1(X) \oplus C_0(X) \oplus C_1(X) \rightarrow C_0(X) \oplus C_0(X).$$

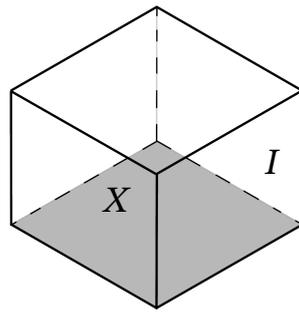


Figura 1: $X \times I$ para $X = I^2$.

Al pasar de espacios a complejos de cadenas, el producto directo pasa a ser el producto tensorial. Construiremos con detalle el producto tensorial total de dos complejos de cadenas.

Dados C, D dos complejos de cadenas, consideremos el bicomplejo de cadenas

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longleftarrow & C_{p-1} \otimes_{\mathbb{Z}} D_q & \longleftarrow & C_p \otimes_{\mathbb{Z}} D_q & \longleftarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longleftarrow & C_{p-1} \otimes_{\mathbb{Z}} D_{q-1} & \longleftarrow & C_p \otimes_{\mathbb{Z}} D_{q-1} & \longleftarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

cuyas diferenciales horizontal y vertical son

$$\partial_h = \partial \otimes \text{Id}D_q \quad \text{y} \quad \partial_v = (-1)^p \text{Id}C_p \otimes \partial.$$

Definimos el **producto tensorial (total)** de C y D , que denotaremos por $C \otimes D$, como el complejo de cadenas cuyo grado n es

$$(C \otimes D)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes_{\mathbb{Z}} D_q$$

y cuya diferencial viene dada por la suma de las diferenciales horizontales y verticales. Para el caso de $C = I$, el bicomplejo queda

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longleftarrow & I_0 \otimes_{\mathbb{Z}} C_{n+1} & \longleftarrow & I_1 \otimes_{\mathbb{Z}} C_{n+1} & \longleftarrow & 0 \\
 & & \partial \downarrow & & -\partial \downarrow & & \\
 0 & \longleftarrow & I_0 \otimes_{\mathbb{Z}} C_n & \longleftarrow & I_1 \otimes_{\mathbb{Z}} C_n & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

Para cualquier grupo abeliano G se verifica que

$$G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong G \quad \text{y} \quad G \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) = G \oplus G,$$

luego el bicomplejo anterior queda

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longleftarrow & C_{n+1} \oplus C_{n+1} & \xleftarrow{(\text{Id}, -\text{Id})} & C_{n+1} & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow -\partial & & \\
 0 & \longleftarrow & C_n \oplus C_n & \xleftarrow{(\text{Id}, -\text{Id})} & C_n & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

Definición 17. Dado un complejo de cadenas C , definimos el **cilindro de C** como el complejo de cadenas

$$\text{cyl}(C) : \dots \rightarrow C_n \oplus C_{n-1} \oplus C_n \rightarrow C_{n-1} \oplus C_{n-2} \oplus C_{n-1} \rightarrow \dots$$

y cuya diferencial viene dada por $\partial((c_1, c_2, c_3)) = (\partial(c_1) + c_2, -\partial(c_2), \partial(c_3) - c_2)$. ◀

Pasemos ahora a la construcción del objeto de caminos. Dado un espacio topológico X , el espacio de caminos X^I es el espacio topológico de aplicaciones continuas de I en X , es decir, en el lenguaje categórico, como conjunto $X^I = \text{Hom}_{\text{Top}}(I, X)$ y luego lo «enriquecemos» con la topología compacto-abierta. Así pues, consideremos C un complejo de cadenas y pensemos, como antes, en el bicomplejo³ de cadenas

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\text{Ab}}(I_0, C_p) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\text{Ab}}(I_1, C_p) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\text{Ab}}(I_0, C_{p-1}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\text{Ab}}(I_1, C_{p-1}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

donde la diferencial horizontal viene dada por

$$f \mapsto f \circ (\text{Id}_{\mathbb{Z}}, -\text{Id}_{\mathbb{Z}}),$$

las verticales

$$\begin{array}{ccc}
 f : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow C_p & & f : \mathbb{Z} \rightarrow C_p \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \partial \circ f & & -\partial \circ f.
 \end{array}$$

En general, para cualquier grupo abeliano G se cumple que

$$(\star) \quad \text{Hom}_{\text{Ab}}(\mathbb{Z}, G) \cong G \quad \text{y} \quad \text{Hom}_{\text{Ab}}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, G) \cong G \oplus G.$$

Para que ahora la diferencial tenga el sentido correcto, definimos el complejo de cadenas $\text{Hom}(I, C)$ como el complejo de cadenas cuyo grado n es

$$\text{Hom}(I, C)_n = \bigoplus_{q-p=n} \text{Hom}_{\text{Ab}}(I_p, C_q) = \text{Hom}_{\text{Ab}}(I_0, C_n) \oplus \text{Hom}_{\text{Ab}}(I_1, C_{n+1}) \stackrel{(\star)}{\cong} C_n \oplus C_n \oplus C_{n+1}.$$

³Igual que antes, se puede definir el complejo de cadenas $\text{Hom}(C, D)$ para complejos de cadenas cualesquiera. La construcción es similar al producto tensorial teniendo cuidado con el cambio del sentido de las flechas.

Definición 18. Dado un complejo de cadenas C , definimos el **complejo de caminos de C** como el complejo de cadenas

$$\text{path}(C): \dots \rightarrow C_n \oplus C_{n+1} \oplus C_n \rightarrow C_{n-1} \oplus C_n \oplus C_{n-1} \rightarrow \dots$$

cuya diferencial viene dada por $\partial(c, c', c'') = (\partial c, c'' - c - \partial c', \partial c'')$. ◀

Ejemplo 19 (Esfera). Para cada $n \in \mathbb{Z}$, definimos la n -esfera (en Ch) como el complejo de cadenas S^n que tiene por grado n el grupo abeliano \mathbb{Z} y en el resto 0. Describamos en detalle $\text{cyl}(S^0)$ y $\text{path}(S^0)$.

Comenzamos por el producto tensorial de $S^0 \otimes I$. Este surge de hacer la suma de la diagonal en el bicomplejo

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longleftarrow & \mathbb{Z} \otimes (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) & \longleftarrow & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} & \longleftarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

La única diferencial no nula viene dada por $\partial(k) = (k, -k)$, y al sumar en la diagonal obtenemos

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longleftarrow & \text{cyl}(S^0)_{-1} & \longleftarrow & \text{cyl}(S^0)_0 & \longleftarrow & \text{cyl}(S^0)_1 & \longleftarrow & \text{cyl}(S^0)_2 & \longleftarrow & \dots \\ \dots & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longleftarrow & \mathbb{Z} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \dots \\ & & & & (k, -k) & \longleftarrow & k & & & & \end{array}$$

Para el caso del objeto de caminos tenemos que calcular el complejo de cadenas $\text{Hom}(I, S^0)$. Como antes, tenemos que empezar por el bicomplejo

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

donde la única diferencial no nula es $d(k, k') = k - k'$. Si sumamos ahora en la diagonal obtenemos

$$\begin{array}{ccccccccccc} \text{path}(S^0)_1 & \longrightarrow & \text{path}(S^0)_0 & \longrightarrow & \text{path}(S^0)_{-1} & \longrightarrow & \text{path}(S^0)_{-2} & & & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & & & (k, k') & \longrightarrow & k - k' & & & & \end{array}$$

Ejemplo 20 ($G \rightarrow H$). Consideremos G y H dos grupos abelianos y $f: G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Construimos el complejo de cadenas C cuyo grado n es

$$C_n = \begin{cases} 0 & \text{resto,} \\ G & \text{si } n = 1, \\ H & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

y cuya única diferencial no nula es $f : C_1 \rightarrow C_0$. Comencemos construyendo el cilindro:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longleftarrow & H \oplus H & \xleftarrow{(\text{Id}, -\text{Id})} & H & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow f \oplus f & & \downarrow -f & & \\
 0 & \longleftarrow & G \oplus G & \xleftarrow{(\text{Id}, -\text{Id})} & G & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Si sumamos ahora en la diagonal obtenemos

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{cyl}(C)_{-1} & \longleftarrow & \text{cyl}(C)_0 & \longleftarrow & \text{cyl}(C)_1 & \longleftarrow & \text{cyl}(C)_2 \longleftarrow \text{cyl}(C)_3 \\
 0 & \longleftarrow & G \oplus G & \longleftarrow & H \oplus H \oplus G & \longleftarrow & H \longleftarrow 0 \\
 & & (f(h) + g, f(h') - g) & \longleftarrow & (h, h', g) & & \\
 & & & & (h, -h, -f(h)) & \longleftarrow & h.
 \end{array}$$

Para el caso de objeto de caminos, el bicomplejo de cadenas $\text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(I_p, C_q)$ viene dado por

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & H \oplus H & \xrightarrow{\text{Id}-\text{Id}} & H & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow (f, f) & & \downarrow -f & & \\
 0 & \longrightarrow & G \oplus G & \xrightarrow{\text{Id}-\text{Id}} & G & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

y si sumamos en la diagonal

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{path}(C)_{-2} & \longleftarrow & \text{path}(C)_{-1} & \longleftarrow & \text{path}(C)_0 & \longleftarrow & \text{path}(C)_1 \longleftarrow \text{path}(C)_2 \\
 0 & \longleftarrow & G & \longleftarrow & G \oplus G \oplus H & \longleftarrow & H \oplus H \longleftarrow 0 \\
 & & g - g' - f(h) & \longleftarrow & (g, g', h) & & \\
 & & & & (f(h), f(h'), h - h') & \longleftarrow & (h, h').
 \end{array}$$

Ejemplo 21. Con el ejemplo anterior en mente, repliquemos la construcción del cilindro en espacios topológicos, concretamente para el caso de S^1 con la descomposición celular dada por una 0-celda y una 1-celda, es decir, $S^1 = e^0 \cup e^1$. En ese caso, el complejo celular es como el anterior:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Además, vamos a considerar la descomposición celular del intervalo $I = e_0^0 \cup e_1^0 \cup e_1^1$.

Por tanto, tenemos que la descomposición celular de $S^1 \times I$ (ver figura 2) es la siguiente:

$$\begin{array}{l}
 \text{0-celdas: } (e^0 \times e_0^0), (e^0 \times e_1^0). \\
 \text{1-celdas: } (e^1 \times e_0^0), (e^1 \times e_1^0), (e^0 \times e_1^1). \\
 \text{2-celdas: } (e^1 \times e_1^1).
 \end{array}$$

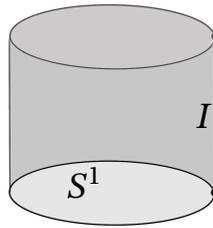


Figura 2: $S^1 \times I$.

Por tanto, su complejo de cadenas celular es

$$0 \rightarrow \langle e^1 \rangle \xrightarrow{\partial_2} \langle e^1 \rangle \oplus \langle e^1 \rangle \oplus \langle e^0 \rangle \xrightarrow{\partial_1} \langle e^0 \rangle \oplus \langle e^0 \rangle$$

donde la diferencial viene dada por la aplicación de adjunción, es decir,

$$\begin{aligned} \partial_2(h) &= (h, -h, \partial h), \\ \partial_1(h, h', g) &= (\partial(h) + g, \partial(h') - g). \end{aligned}$$

Ejercicio 1. El ejemplo anterior ilustra que, dado un CW-complejo, la construcción del objeto cilindro en complejos de cadenas imita a la construcción en espacios topológicos y después tomar cadenas celulares. ¿Pasará algo similar con la construcción del objeto de caminos? ◀

En ocasiones, y por el carácter dual de cyl y path , en el contexto de complejos de cadenas, al objeto de caminos se le suele llamarse cocilindro (y se denota por cocyl). No obstante, lo llamaremos path por semejanza a lo que ocurre en espacios topológicos en cuanto a que, en lugar de pensar $\text{Hom}_{\text{Top}}(I, -)$, hacemos $\text{Hom}(I, -)$. El carácter dual de esta construcción lo veremos aun más claro en la sección 2.4.

Teorema 22. Dado un complejo de cadenas C , las siguientes aplicaciones son equivalencias de homotopía:

$$\begin{array}{ccc} \text{path}(C) & \xrightleftharpoons[\sigma]{\tau} & C \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} \text{cyl}(C) \\ (c, 0, c) & \longleftarrow | c & \longrightarrow (c, 0, 0) \\ & c + c'' & \longleftarrow | (c, c', c'') \\ (c, c', c'') & \longrightarrow & c''. \end{array}$$

Demostración. Probemos el caso $C \xrightarrow{\sigma} \text{path}(C) \xrightarrow{\tau} C$, ya que el otro es análogo. Se tiene que $\tau\sigma(c) = \tau(c, 0, c) = c$, por lo que $\tau\sigma = \text{Id}_C$. Comprobemos que $\sigma\tau \simeq \text{Id}_{\text{path}(C)}$. Para ello, definimos explícitamente la homotopía. Sea $s : \text{path}(C) \rightarrow \text{path}(C)$ de grado 1, dada por la fórmula $s(c, c', c'') = (c', 0, 0)$. Se verifica que

$$(c, c', c'') - \sigma\tau(c, c', c'') = (c, c', c'') - (c'', 0, c'') = (c - c'', -c', 0).$$

Por otro lado, $(\partial s + s\partial)(c, c', c'') = (c - c'', -c', 0)$. Por tanto, $\text{Id} - \sigma\tau = s\partial + \partial s$, lo que nos dice que $\text{Id} \simeq \sigma\tau$. ■

Proposición 23 ([4, Proposición 18.3.6]). Sea $f : C \rightarrow D$ una aplicación entre complejos de cadenas. f es una cofibración (según el teorema 12) si y solo si, para todo $B \in \text{Ch}$, el siguiente diagrama se levanta:

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \text{path}(B) \\ \downarrow f & & \downarrow p_0 \\ D & \longrightarrow & B \end{array}$$

Y, dualmente, f es una fibración si y solo si, para todo $B \in \text{Ch}$, el siguiente diagrama se levanta:

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & C \\ \downarrow i_0 & & \downarrow \\ \text{cyl}(B) & \longrightarrow & D \end{array}$$

Esta proposición nos da una caracterización de las cofibraciones (resp. fibraciones) como las aplicaciones que tienen la propiedad de extensión (resp. levantamiento) de homotopías. La prueba de esta proposición es puramente algebraica y se deja como ejercicio para el lector, aunque se puede consultar en [4, Sección 18.3]. Es común encontrar la definición de la categoría de modelos introducida en el teorema 12 en función de los objetos cilindros y caminos, ya que de esta forma se crea aún más un paralelismo con la categoría de modelos de Hurewicz (ver teorema 6).

2.2. Relación de homotopía

A continuación comprobaremos que, en efecto, dos aplicaciones entre complejos de cadenas son homótopas si (y solo si) son homótopas en el sentido de serlo en categoría de modelos descrito en el teorema 12.

Teorema 24. Sean $f, g: C \rightarrow D$ dos aplicaciones entre complejos de cadenas. Son equivalentes:

1. $f \simeq g$ (según la definición 10).
2. Existe una aplicación H que cierra el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C \oplus C & \xrightarrow{f+g} & D \\ \downarrow in_0 \oplus in_1 & \nearrow H & \\ \text{cyl}(C) & & \end{array}$$

Y, por tanto, f es homótopa a g por la izquierda.

Demostración. Como $f \simeq g$, existe una aplicación $s: C \rightarrow D$ de grado 1 tal que $f - g = s\partial + \partial s$. Definimos $H: \text{cyl}(C) \rightarrow D$ por $H(c, c', c'') = f(c) + g(c'') + s(c')$. Hay que ver que es una aplicación de complejos de cadenas, es decir, para todo $n \in \mathbb{Z}$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (c, 0, 0) & & C_n \oplus C_{n-1} \oplus C_n \xrightarrow{H} D_n \\ \downarrow & & \downarrow \partial \\ (\partial(c) + c', -\partial(c'), \partial(c'') - c') & & C_{n-1} \oplus C_{n-2} \oplus C_{n-1} \xrightarrow{H} D_{n-1} \end{array}$$

Por un lado tenemos que

$$\partial H(c, c', c'') = \partial f(c) + \partial s(c') + \partial g(c''),$$

y por otro lado tenemos que

$$H\partial(c, c', c'') = h(\partial c + c', -\partial c', \partial c'' - c') = f(\partial c + c') - s\partial c' + g(\partial c'' - c').$$

Por linealidad de f y g se tiene que

$$\partial f(c) + \partial s(c') + \partial g(c'') = f(\partial c) + f(c) - s\partial c' + g(\partial c'') - g(c').$$

Por hipótesis, f y g son aplicaciones de complejos de cadenas, luego $\partial f = f\partial$ y $\partial g = g\partial$, y por tanto

$$\partial s(c') = f(c) - s\partial c' - g(c').$$

Pero $f - g = s\partial + \partial s$, y entonces $\partial H = H\partial$ y es la homotopía que buscamos.

Recíprocamente, veamos que la aplicación $s_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$ dada por $s_n(c) = H(0, c, 0)$ es la aplicación que buscamos. En efecto,

$$s\partial(c) + \partial s(c) = H(0, \partial c, 0) + \partial H(0, c, 0).$$

Pero H es una aplicación de complejos de cadenas, por lo que $\partial H = H\partial$, luego

$$s\partial(c) + \partial s(c) = H(0, \partial c, 0) + H(c, -\partial c, -c) = H(c, 0, -c) = f(c) - g(c). \quad \blacksquare$$

Como sabemos que la relación de homotopía en Ch es una relación de equivalencia, entonces la relación de homotopía por la izquierda (en la categoría de modelos del teorema 12) también lo es. Veamos ahora que esta coincide con la relación de homotopía por la derecha.

Teorema 25. Sean $f, g : C \rightarrow D$ aplicaciones entre complejos de cadenas. Entonces, son equivalentes:

1. $f \simeq g$ (Según la definición 10).
2. Existe una aplicación $H : C \rightarrow \text{path}(D)$ que cierra el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \text{path}(D) \\ & \nearrow H & \downarrow (p_0, p_1) \\ C & \xrightarrow{(f, g)} & D \oplus D \end{array}$$

de lo que se deduce que f es homótopa a g por la derecha.

Demostración. Supongamos que $f \simeq g$; entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe una aplicación $s_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$ tal que $f - g = s\partial + \partial s$. Veamos que la aplicación $H : C \rightarrow \text{path}(D)$ dada por $H = (f, s, g)$ es la aplicación buscada. Una comprobación directa muestra que H hace el diagrama conmutativo, por lo que solo hay que ver que es, en efecto, una aplicación de complejo de cadenas. Pero esto es elemental, ya que

$$\partial H = \partial(f, s, g) = (\partial f, g - f - \partial s, \partial g).$$

Ahora bien, sabemos que $g - f - \partial s = s\partial$ y que f y g conmutan con la diferencial, por lo que

$$\partial H = \partial(f, s, g) = (\partial f, g - f - \partial s, \partial g) = (f\partial, s\partial, g\partial) = H\partial.$$

Recíprocamente, supongamos que existe $H : C \rightarrow \text{path}(D)$ que cierra el diagrama. En cada grado $H = (f, h, g)$ y, además, H es una aplicación de complejo de cadenas, es decir, $\partial H = H\partial$, esto es,

$$(\partial f, f - g - \partial h, \partial g) = \partial H = H\partial(f\partial, h\partial, g\partial).$$

Deducimos que la aplicación de grado uno $h : C \rightarrow D$ verifica $f - g = \partial h + h\partial$, por lo que concluimos que $f \simeq g$. ■

En resumen, lo que nos dicen estos teoremas es que

$$\begin{array}{ccc} f \overset{r}{\sim} g & \longleftrightarrow & f \overset{l}{\sim} g \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & f \simeq g & \end{array}$$

Estas equivalencias se deben a que, para todo complejo de cadenas C , las aplicaciones $0 \rightarrow C$ y $C \rightarrow 0$ son, respectivamente, cofibraciones y fibraciones en la categoría de modelos del teorema 12.

2.3. Cono

Si pensamos en el ejemplo 14, esto nos dice que, para la estructura de categoría de modelos descrita en el teorema 15 (o 16), ser una equivalencia débil no implica tener una inversa homotópica. En tal caso, para detectar equivalencias débiles en la categoría de modelos del teorema 15 (o 16) o cuasi-isomorfismos nos apoyaremos de una construcción similar a las anteriores.

Definición 26. Dada una aplicación $f : C \rightarrow D$ entre complejos de cadenas, definimos el **cono de f** como el complejo de cadenas $\text{cone}(f)$ cuyo grado n es $C_{n-1} \oplus D_n$ y la diferencial viene dada por la fórmula

$$\delta(c, d) = (-\delta c, \delta(d) - f(c)).$$

Asimismo, dado un complejo de cadenas C , definimos $\text{cone}(C)$ como el complejo de cadenas $\text{cone}(\text{Id}_C)$. ◀

Teorema 27 ([7, Corolario 1.5.4]). *Una aplicación $f : C \rightarrow D$ entre complejos de cadenas es un cuasi-isomorfismo si y solo si el complejo de cadenas $\text{cone}(f)$ es exacto.*

Ejemplo 28. Consideremos la aplicación descrita en el ejemplo 14. En tal caso, $\text{cone}(f)$ es

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & k & \longmapsto & 2k & & (k, \bar{k}') & \longmapsto & 2k & & & & \\ & & & & & & k & \longmapsto & (0, -\bar{k}) & & k & \longmapsto & -\bar{k}. \end{array}$$

Un cálculo directo comprueba que la sucesión es exacta. ◀

2.4. Cilindro y caminos de una aplicación

Una construcción con la que estamos muy familiarizados en espacios topológicos es el cilindro de una aplicación. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua. Definimos el cilindro de f como el espacio topológico

$$\text{cyl}(f) = (X \times I) \sqcup Y /_{(x,1) \sim f(x)}.$$

Esto es, en lenguaje categórico, el pushout

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_1} & X \times I \\ \downarrow f & & \downarrow \\ Y & \dashrightarrow & \text{cyl}(f) \end{array}$$

Se verifica trivialmente que

$$\begin{array}{ccc} & \text{cyl}(X) & \\ \nearrow & & \searrow \sim \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Veamos que esto mismo se puede definir para complejos de cadenas y que, para toda aplicación entre complejos de cadenas, nos da la descomposición A5. definición 2 de categoría de modelos.

Definición 29. Dada una aplicación $f : C \rightarrow D$ entre complejos de cadenas, definimos el **objeto cilindro de f** , que denotaremos por $\text{cyl}(f)$, como el pushout

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{i_0} & \text{cyl}(C) \\ \downarrow f & & \downarrow \\ D & \dashrightarrow & \text{cyl}(f) \end{array}$$

y el **objeto de caminos de** f , $\text{path}(f)$, como el pullback

$$\begin{array}{ccc} \text{path}(f) & \dashrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \text{path}(D) & \xrightarrow{p_0} & D \end{array}$$

Aunque estas definiciones para los complejos de cadenas $\text{path}(f)$ y $\text{cyl}(f)$ en términos de propiedades universales de pullbacks y pushouts son muy útiles y permiten trabajar bien en el contexto de categoría de modelos, en el contexto del álgebra homológica no son tan prácticas. Para ellos introduciremos una definición explícita (se deja como ejercicio comprobar que ambas coinciden).

Definición 30. Dada una aplicación entre complejos de cadenas $f : C \rightarrow D$, definimos $\text{cyl}(f)$ como el complejo de cadenas

$$\begin{aligned} \text{cyl}(f) : \dots &\longrightarrow C_n \oplus C_{n-1} \oplus D_n \longrightarrow C_{n-1} \oplus C_{n-2} \oplus D_{n-1} \longrightarrow \dots \\ (c, c', d) &\longmapsto (\delta c + c', -\delta c', \delta d - f(c')), \end{aligned}$$

y $\text{path}(f)$ como el complejo de cadenas

$$\begin{aligned} \text{path}(f) : \dots &\longrightarrow C_n \oplus D_{n+1} \oplus D_n \longrightarrow C_{n-1} \oplus D_n \oplus D_{n-1} \longrightarrow \dots \\ (c, d, d') &\longmapsto (\delta c, d' - f(c) - \delta d, \delta d'). \end{aligned}$$

Observación 31. Sea C un complejo de cadenas. Se verifica que $\text{path}(C) = \text{path}(\text{Id}_C)$ y $\text{cyl}(C) = \text{cyl}(\text{Id}_C)$.

Proposición 32. Dada una aplicación $f : C \rightarrow D$ entre complejos de cadenas, f admite dos descomposiciones:

$$\begin{array}{ccc} C \hookrightarrow \text{cyl}(f) \xrightarrow{\sim} D & & C \xrightarrow{\sim} \text{path}(f) \twoheadrightarrow D \\ (c, c', d) \longmapsto d + f(c) & & c \longmapsto (c, 0, f(c)) \\ c \longmapsto (c, 0, 0). & & (c, d, d') \longmapsto d'. \end{array}$$

Demostración. Lo probaremos para el complejo $\text{path}(f)$, siendo el otro totalmente análogo. Utilizaremos herramientas de álgebra homológica; no obstante, se puede (y se propone como ejercicio para el lector más experimentado) probar este resultado utilizando exclusivamente propiedades de categoría de modelos.

Comencemos viendo que $m : C \xrightarrow{\sim} \text{path}(f)$ es una cofibración acíclica. Una adaptación de la prueba del teorema 22 demuestra que es una equivalencia débil, por lo que solo hay que ver que es una cofibración. Por definición es inyectiva, por lo que solo hay que ver que existe $r : \text{path}(f) \rightarrow C$ tal que $r \circ m = \text{Id}_C$. Para ello, definimos $r(c, d', d) = c$ y se cumple que

$$rm(c) = r(c, 0, f(c)) = c.$$

Por otro lado, hay que ver que $e : \text{path}(f) \rightarrow D$ es una fibración. De la definición se sigue que es sobreyectiva, por lo que solo hay que ver que escinde, esto es, que existe $s : D \rightarrow \text{path}(f)$ tal que $e \circ s = \text{Id}_D$. Para ello definimos $s(d) = (0, 0, d)$ y se cumple que

$$es(d) = e(0, 0, d) = d. \quad \blacksquare$$

En el caso de $f = \text{Id}$ obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 33. Para todo complejo de cadenas C , se tiene que las aplicaciones de la definición 5

$$C \oplus C \xrightarrow{i_0+i_1} \text{cyl}(C) \xrightarrow{\sim} C, \quad C \xrightarrow{\sim} \text{path}(C) \xrightarrow{(p_0,p_1)} C \oplus C$$

verifican que, para el cilindro, $i_0 + i_1$ es una cofibración y p es una fibración acíclica, y para el objeto de caminos, i es una cofibración acíclica y (p_0, p_1) es una fibración.

En una categoría de modelos, si un objeto cilindro (resp. camino) verifica el corolario anterior, se dice que es un muy buen objeto cilindro (resp. camino).

Referencias

- [1] DWYER, W. G. y SPALIŃSKI, J. «Homotopy theories and model categories». En: *Handbook of algebraic topology*. North-Holland, Amsterdam, 1995, págs. 73-126.
- [2] HIRSCHHORN, Philip S. *Model categories and their localizations*. Vol. 99. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [3] MACLANE, Saunders. *Categories for the working mathematician*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.
- [4] MAY, J. P. y PONTO, K. *More concise algebraic topology*. Chicago Lectures in Mathematics. Localization, completion, and model categories. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2012.
- [5] MUNKRES, James R. *Topology*. Second edition of [MR0464128]. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000.
- [6] QUILLEN, Daniel G. *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.
- [7] WEIBEL, Charles A. *An introduction to homological algebra*. Vol. 38. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Combinatorics and simplicial groupoids

✉ Alex Cebrian
Universitat Autònoma de Barcelona
acebrian@mat.uab.cat

Abstract: This expository paper starts with a brief survey of the relation between partitions and surjections of sets, and then gives a quick introduction to the theories of incidence algebras, Segal groupoids and combinatorial species. The aim is to explain an objective construction, in terms of simplicial groupoids, of both the Faà di Bruno bialgebra and the plethystic bialgebra. This paper can be seen as an extended introduction to the author's paper [2].

Resumen: El presente artículo comienza con una breve exposición de la relación entre particiones y aplicaciones exhaustivas de conjuntos finitos. A continuación se introducen las nociones de coalgebra de incidencia, grupoide de Segal y especie combinatoria. Todo ello se usa para obtener construcciones objetivas de la biálgebra de Faà di Bruno y de la biálgebra plestística, ejemplificando la relevancia de los grupoides simpliciales en combinatoria. Esta contribución se puede ver como una introducción extensa al artículo del autor [2].

Keywords: objective combinatorics, incidence coalgebras, Segal groupoids, combinatorial species, plethysm.

MSC2010: 05A18, 05A19, 18G30, 18B40, 16T10.

Acknowledgements: The author was supported by the project FEDER-MEC MTM2016-80439-P.

Reference: CEBRIAN, Alex. "Combinatorics and simplicial groupoids". In: *TEMat monográficos*, 3 (2021): *Actas del VIII Encuentro de Jóvenes Topólogos*, pp. 29-40. ISSN: 2660-6003. URL: <https://temat.es/monograficos/article/view/vol3-p29>.

1. Introduction

It is well appreciated in combinatorics that working with combinatorial structures themselves gives a deeper understanding than working with their numbers. This is called objective combinatorics. The theory of species, developed by Joyal [8], is a cornerstone in this context. It makes use of category theory to objectify generating functions of combinatorial structures. On the other hand, decomposition spaces (certain simplicial spaces) provide a general machine to objectify the notion of incidence algebra in algebraic combinatorics. Decomposition spaces were introduced by Gálvez-Carrillo, Kock, and Tonks [5–7] in this framework and they are the same as 2-Segal spaces, introduced by Dyckerhoff and Kapranov [3] in the context of homological algebra and representation theory.

In section 3 we introduce incidence coalgebras and explain how they can be encoded in Segal groupoids, which are a simple special case of decomposition spaces. We apply this to express two incidence coalgebras in terms of Segal groupoids: the Faà di Bruno bialgebra and the plethystic bialgebra. The first comes from substitution of power series in one variable, and it is closely related to the theory of species. We explain this in section 4. The second comes from plethystic substitution of power series in infinitely many variables, and it is closely related to the theory of partitionals [11], a generalization of species to partitions. We explain this in section 5. Both the theory of species and the theory of partitionals are based on sets and partitions. However, to give an interpretation of these bialgebras through simplicial groupoids, it is better to work with the equivalent category of sets and surjections, as advocated in [4] and [2]. Section 2 is a survey of the relation between partitions and surjections. The two Segal groupoids realizing the Faà di Bruno bialgebra and the plethystic bialgebra are respectively *NS* (section 4), the fat nerve of the category of sets and surjections, and *TS* (section 5), introduced in [2].

2. Partitions and surjections

The content on partitions featuring in this section has been taken from [11]. A *partition* π of a finite set E is a family of subsets of E , called *blocks*, such that every block of π is nonempty, the blocks are pairwise disjoint, and every element of E is contained in some block. Given two partitions π, σ of E , we say that π is finer than σ (or σ is coarser than π), and denote by $\pi \leq \sigma$, if every block of π is a subset of some block of σ . In this case we define the *induced partition* $\sigma|\pi$ to be the partition on the set of blocks of π given by the blocks of σ . Also, the *restriction* of a partition π to a subset $B \subseteq E$ is the partition of B given by the intersections of B with the blocks of π and denoted by π_B .

Notice that the relation \leq defines a partial order on the set $\Pi(E)$ of all partitions of E , and this order has a minimum, given by the partition with singleton blocks and denoted by $\hat{0}$, and a maximum, given by the partition with one block and denoted by $\hat{1}$. In particular, for every $\pi, \sigma \in \Pi(E)$, the supremum $\pi \vee \sigma$ and the infimum $\pi \wedge \sigma$ of π and σ exist in $(\Pi(E), \leq)$, and they are respectively called the *join* and the *meet*. For example, if $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\pi = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6\}\}$ and $\sigma = \{\{1, 2, 6\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$, then

$$\begin{aligned} \pi \wedge \sigma &= \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}, \{6\}\}, & \pi \vee \sigma &= \{\{1, 2, 6\}, \{3, 4, 5\}\}, \\ \sigma|(\pi \vee \sigma) &= \{\{\{1, 2, 6\}\}, \{\{3, 4\}, \{5\}\}\} & \text{and } \pi_{\{1,3,4,6\}} &= \{\{1\}, \{3, 4\}, \{6\}\}. \end{aligned}$$

It is easy to see that, in fact,

$$\pi \wedge \sigma = \{B \cap C \mid B \in \pi, C \in \sigma, B \cap C \neq \emptyset\}.$$

The join is, roughly speaking, the union of all blocks with common elements. However, to give a precise and simple definition of the join, it is preferable to view partitions as equivalence relations. This will also help us to introduce other notions later. It is clear that a partition π on a set E defines an equivalence relation \sim_π on E , where two elements are related if they belong to the same block of π . In this setting, the meet of two partitions π, σ is given by (for $p, q \in E$) $p \sim_{\pi \wedge \sigma} q$ if $p \sim_\pi q$ and $p \sim_\sigma q$, and their join is given by $p \sim_{\pi \vee \sigma} q$ if there exists a finite sequence r_0, \dots, r_n such that

$$(1) \quad p = r_0 \sim_1 r_1 \sim_2 \cdots \sim_n r_n = q,$$

where each relation \sim_k is either \sim_π or \sim_σ . We say that two partitions π, σ are *independent* if every block of π meets every block of σ . We say that they *commute* if, for every $p, q \in E$, we have that $p \sim_\pi r \sim_\sigma q$ for some $r \in E$ if and only if $p \sim_\sigma s \sim_\pi q$ for some $s \in E$. It is straightforward to see that two partitions are independent if and only if they commute and their join is $\hat{1}$. The following result says that commuting is the same as being blockwise independent.

Proposition 1. *Let $\pi, \sigma \in \Pi(E)$. Then, π and σ commute if and only if for every $B \in \pi \vee \sigma$ the restrictions π_B and σ_B are independent partitions of B .*

We are now ready define the most intricate and important definition regarding partitions in this survey.

Definition 2 ([11]). Let σ be a partition of E . A pair (π, τ) of partitions of E is called a *transversal* of σ when

- (i) $\pi \leq \sigma$,
- (ii) $\pi \wedge \tau = \hat{0}$,
- (iii) π and τ commute, and
- (iv) $\sigma \vee \tau = \pi \vee \tau$. ◀

There is a category \mathbb{P} whose objects are pairs (E, π) , where E is a set and $\pi \in \Pi(E)$, and whose morphisms are defined as follows: if (F, σ) is another object of \mathbb{P} , a morphism

$$f : (E, \pi) \longrightarrow (F, \sigma)$$

is a bijection $f : E \rightarrow F$ which maps blocks of π to blocks of σ . Notice that \mathbb{P} is in fact a groupoid, since all the morphisms are invertible. In this groupoid, the isomorphism class of a partition (E, π) can be described by the sequence of natural numbers

$$(2) \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots), \text{ where } \lambda_k = \text{number of blocks of size } k \text{ of } (E, \pi).$$

Observe that $|E| = 1 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 + 3 \cdot \lambda_3 + \dots$ and that the number of blocks of π is $|\pi| = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$. Also, notice that the number of automorphisms of (E, π) is

$$\text{aut}(\lambda) = 1!^{\lambda_1} \lambda_1! \cdot 2!^{\lambda_2} \lambda_2! \cdot 3!^{\lambda_3} \lambda_3! \dots,$$

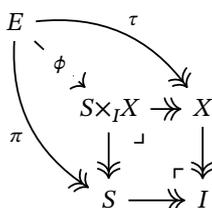
because an automorphism of π permutes the elements inside each block and permutes the blocks of the same size.

Let us translate all these notions from the category of partitions \mathbb{P} to the equivalent category of surjections \mathbb{S} . Among the advantages of surjections over partitions there is the fact that partitions of partitions are pairs of composable surjections. The category of surjections has as objects surjections $E \twoheadrightarrow S$ between finite sets and as morphisms commutative squares

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\sim} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{\sim} & R \end{array}$$

where the horizontal arrows are bijections. It is clear that $f : E \twoheadrightarrow S$ corresponds to the partition π of E given by $p \sim_\pi q$ if $f(p) = f(q)$ or, equivalently, the partition whose blocks are the fibres of f . Hence, the isomorphism class of a surjection is given by a sequence $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ where λ_k is the number of fibres of size k , and the number of automorphisms of f is also $\text{aut}(\lambda)$: in this case, $\lambda_1! \cdot \lambda_2! \dots$ is the number of bijections $S \xrightarrow{\sim} S$ permuting elements with a fibre of the same size, and $1!^{\lambda_1} \cdot 2!^{\lambda_2} \dots$ is the number of fibrewise bijections $E \xrightarrow{\sim} E$.

Consider $\pi, \tau \in \Pi(E)$ and let $\pi : E \twoheadrightarrow S$ and $\tau : E \twoheadrightarrow X$ be their corresponding surjections. Construct the diagram of sets



by taking pushout along π and τ and pullback of the pushout diagram. Note that all the arrows are surjections except perhaps ϕ . Note also that any pullback of surjections is also a pushout square.

Lemma 3. *Let π and τ be two partitions of E presented as surjections as above, and $\sigma : E \rightarrow B$ another partition. Let also $A \subseteq E$.*

- (i) $\pi \leq \sigma$ if and only if σ factors through $\pi: E \rightarrow S \rightarrow B$. Moreover, the surjection $S \rightarrow B$ corresponds to $\sigma|_{\pi}$.
- (ii) π_A corresponds to the unique surjection $A \rightarrow R$ (up to isomorphism) that factors the morphism $A \hookrightarrow E \rightarrow S$ as a surjection followed by an injection $A \rightarrow R \hookrightarrow S$.
- (iii) $\hat{0}$ is $E \rightarrow E$ and $\hat{1}$ is $E \rightarrow 1$.
- (iv) The join $\pi \vee \tau$ corresponds to the pushout surjection $E \rightarrow I$.
- (v) The meet $\pi \wedge \tau$ corresponds to the surjection $\phi : E \rightarrow \text{Im}(\phi)$. Hence, $\pi \wedge \tau = \hat{0}$ if and only if ϕ is injective.
- (vi) π and τ commute if and only if ϕ is surjective.
- (vii) π and τ are independent if and only if ϕ is surjective and $I = 1$.

Proof. (i), (ii) and (iii) are clear. (iv) follows from the fact that the pushout is precisely $X \sqcup_{/\sim} S$, where \sim is the equivalence relation generated by the relation of belonging to the same fibre along π and τ . This is precisely the same relation defined in (1).

For (v), recall that for every $p, q \in E$ we have that $p \sim_{\pi \wedge \tau} q$ if and only if $p \sim_{\pi} q$ and $p \sim_{\tau} q$, but this is the same as $\pi(p) = \pi(q)$ and $\tau(p) = \tau(q)$, which is the same as $\phi(p) = \phi(q)$. But this is equivalent to $p \sim_{\phi} q$, considering ϕ as a surjection to its image.

Finally, if π and τ are independent then $\pi \wedge \tau = \hat{1}$, so that $I = 1$, and every fibre along π has nonempty intersection with every fibre along τ , which means that ϕ is surjective. The converse is similar. This, together with proposition 1 shows (vi), since the set $\pi \vee \tau$ is precisely I . ■

In view of this lemma, a transversal of the surjection $\sigma : E \rightarrow B$ is a diagram

$$(3) \quad \begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & \sigma \swarrow & \downarrow \pi & \downarrow \tau & \\ & S & & X & \\ \downarrow & \searrow & & \searrow & \\ B & & I & & 1 \end{array}$$

where the square is obtained as the pushout of π and τ . The fact that $\pi \wedge \tau = \hat{0}$ and that π and τ commute implies that this square is also a pullback. Furthermore, the condition that the pushouts $\pi \vee \tau$ and $\sigma \vee \tau$ coincide gives a map $B \rightarrow I$. Conversely, any commutative square of the form

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ \swarrow & & \searrow \\ B & & I \\ \searrow & & \swarrow \\ & I & \end{array}$$

is a pushout in the category of surjections. Therefore, the map $B \rightarrow I$ says that $\pi \vee \tau$ coincides with $\sigma \vee \tau$. This diagrammatic rendition of the notion of transversal [2] will be the key to section 5.

3. Incidence coalgebras and Segal groupoids

Coalgebras arise in algebraic combinatorics from the ability to decompose structures into smaller ones. Recall that a *coalgebra* is the dual notion of a unital associative algebra. That is, a vector space V over

a field k together with k -linear maps $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$ and $\epsilon : V \rightarrow k$, called comultiplication and counit, respectively, satisfying

$$(\text{id}_V \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \text{id}_V) \circ \Delta \quad \text{and} \quad (\text{id}_V \otimes \epsilon) \circ \Delta = \text{id}_V = (\epsilon \otimes \text{id}_V) \circ \Delta.$$

In combinatorics, these vector spaces usually have a distinguished basis given by isomorphism classes of structures.

Rota [13] showed that many of these coalgebras admit an interpretation in terms of *incidence coalgebras of posets*: from any locally finite poset, form the free vector space on its intervals, and endow this with a coalgebra structure by defining the comultiplication as

$$\Delta([x, y]) = \sum_{x \leq m \leq y} [x, m] \otimes [m, y].$$

Observe that a poset can be viewed as a category where there is at most one arrow between any two objects. The theory for locally finite posets was generalized to categories by Leroux [10], and goes as follows: a category is *locally finite* if every arrow admits only a finite number of 2-step factorizations. The *incidence coalgebra* of a locally finite category is the free vector space spanned by its arrows, with comultiplication

$$\Delta(f) = \sum_{b \circ a = f} a \otimes b$$

and counit $\epsilon(\text{id}_x) = 1$ and $\epsilon(f) = 0$ otherwise. The coassociativity of Δ comes from the associativity of composition of arrows.

It is well appreciated in combinatorics that bijective proofs represent a deeper insight into combinatorial structures than algebraic proofs. Lawvere and Menni [9] pioneered the so-called objective method in this context, with the aim to work directly with the combinatorial structures, rather than their numbers, by using linear algebra over sets. Let **Set** be the category of sets. Then the objective counterpart of the vector space spanned by a set S is the slice category **Set** $_{/S}$ (cf. [5]). An object in this category is a morphism $A \xrightarrow{f} S$ of sets, and it corresponds to the vector whose s -entry (for $s \in S$) is $|f^{-1}(s)|$. Linear maps **Set** $_{/S} \rightarrow \mathbf{Set}_{/R}$ at the objective level are given by spans $S \leftarrow M \rightarrow R$, and obtained by taking pullback and postcomposition, as in (5) below. A coalgebra in **Set** $_{/S}$ is thus given by a comultiplication span $S \leftarrow M \rightarrow S \times S$ and a counit span $S \leftarrow N \rightarrow 1$. However, combinatorial structures have symmetries, and to deal with them it is useful to update this objective method to groupoids and homotopy linear algebra over groupoids. A brief introduction to the homotopy approach to groupoids in combinatorics can be found in [4, §3]. We explain the basic notions next.

A *groupoid* is a category whose arrows are all isomorphisms. We will denote by **Grpd** the category of groupoids, whose objects are groupoids and whose morphisms are functors. An *equivalence* of groupoids is an equivalence of categories. Given a groupoid X , we denote by $\pi_0(X)$ the set of isomorphism classes of X , and for $x \in X$ we denote by $\text{Aut}(x)$ the group of automorphisms of x . Concrete examples of this are the groupoids of partitions and surjections (see section 2), for instance.

The *homotopy pullback* of a diagram of groupoids $X \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} Y$ is the groupoid Z whose objects are triples (x, y, ϕ) with $x \in X, y \in Y$ and $\phi : f(x) \rightarrow g(y)$ an arrow of B , and whose arrows are pairs $(\alpha, \beta) : (x, y, \phi) \rightarrow (x', y', \phi')$ consisting of two arrows $\alpha : x \rightarrow x'$ and $\beta : y \rightarrow y'$ satisfying $g(\beta) \circ \phi = \phi' \circ f(\alpha) : f(x) \rightarrow g(y')$. Given a morphism of groupoids $X \xrightarrow{f} B$ and an object $b \in B$, the *homotopy fibre* of b along f is the groupoid X_b obtained by taking the homotopy pullback of the diagram $X \xrightarrow{f} B \xleftarrow{\tau_b} 1$. In the rest of the section, all the pullbacks and fibres are homotopy.

A groupoid X is *finite* if $\pi_0(X)$ is a finite set and $\text{Aut}(x)$ is a finite group for every element x . If only the latter is required, then it is called *locally finite*. A morphism of groupoids is called *finite* when all its homotopy fibres are finite.

Combinatorics is partially about counting structures, and this is done by taking cardinality of sets. However, sometimes this does not directly give the desired result, because, as mentioned above, symmetries between the structures have to be taken into account. These symmetries cannot be encoded inside a set, but can be

encoded inside a groupoid. If a combinatorial structure is encoded in a groupoid rather than in a set, then we need a notion of cardinality for groupoids. The following notion is a straightforward generalization of the idea that an action of a group of m elements on a set of n elements has cardinality n/m : the *homotopy cardinality* [5, §3] of a finite groupoid X is defined as

$$|X| := \sum_{x \in \pi_0 X} \frac{1}{|\text{Aut}(x)|} \in \mathbb{Q}.$$

Notice that, if X is a set, that is, $\text{Aut}(x) = 1$ for every $x \in X$, then its homotopy cardinality coincides with its cardinality. For B a groupoid, the homotopy objective counterpart of the vector space $\mathbb{Q}_{\pi_0 B}$ spanned by $\pi_0 B$ is the slice category $\mathbf{Grpd}_{/B}$. A finite map of groupoids $Y \xrightarrow{p} B$ corresponds to the vector

$$|p| := \sum_{b \in \pi_0 B} \frac{|Y_b|}{|\text{Aut}(b)|} \delta_b,$$

called the *homotopy cardinality* of p . In this sum, Y_b is the homotopy fibre, and δ_b is a formal symbol representing the isomorphism class of b . A simple computation shows that $|1 \xrightarrow{\tau_b} B| = \delta_b$.

The importance of factorizations of arrows in incidence coalgebras suggests a simplicial viewpoint. This leads to the generalization of Leroux theory to ∞ -categories and *decomposition spaces*, developed by Gálvez-Carrillo, Kock, and Tonks [5–7]. These are a kind of simplicial spaces that express the ability to decompose. It is worth mentioning that decomposition spaces encode many more combinatorial coalgebras than merely those arising from posets or categories. In this survey, however, we will only deal with Segal spaces, a particular case of decomposition space which express the ability to compose, besides the ability to decompose.

We denote by Δ the *simplex category*, whose objects are finite nonempty standard ordinals

$$[n] = \{0 < 1 < \dots < n\}$$

and whose morphisms are order preserving maps between them. These maps are generated by the *coface* maps $\partial^i : [n-1] \rightarrow [n]$ which skips i , and the *codegeneracy* maps $\sigma^i : [n+1] \rightarrow [n]$ which repeats i . The obvious relations between these maps, such as $\partial^j \partial^i = \partial^i \partial^{j-1}$ for $i < j$, are called *cosimplicial identities*.

A simplicial groupoid is a (pseudo-)functor $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Grpd}$. The image of $[n]$ is denoted by X_n and called the groupoid of n -simplices. The images of ∂^i and σ^i are denoted d_i and s_i and called face and degeneracy maps respectively. Explicitly, a simplicial groupoid is a sequence of groupoids $(X_n)_{n \geq 0}$ together with morphisms $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ and $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$ for $0 \leq i \leq n$, satisfying the *simplicial identities*, induced by the cosimplicial identities, such as $d_i d_j \simeq d_{j-1} d_i$ for $i < j$. The symbol \simeq means that the identities are not equalities but coherent isomorphisms. This, roughly speaking, is what the (pseudo-) above represents, but we do not have to worry about this here.

A simplicial groupoid X is a *Segal space* [6, §2.9, Lemma 2.10] if the following square is a pullback for all $n > 0$:

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} X_{n+1} & \xrightarrow{d_0} & X_n \\ d_{n+1} \downarrow & \lrcorner & \downarrow d_n \\ X_n & \xrightarrow{d_0} & X_{n-1} \end{array}$$

Segal spaces arise prominently through the fat nerve construction: the *fat nerve* of a category \mathcal{C} is the simplicial groupoid $X = N\mathcal{C}$ with $X_n = \text{Fun}([n], \mathcal{C})^{\simeq}$, the groupoid of functors $[n] \rightarrow \mathcal{C}$. In this case, the pullbacks above are strict, so that all the simplices are strictly determined by X_0 and X_1 , respectively the objects and arrows of \mathcal{C} , and the inner face maps are given by composition of arrows in \mathcal{C} . In the general case, X_n is determined from X_0 and X_1 only up to equivalence, but one may still think of it as a “category” object whose composition is defined only up to equivalence.

Let X be a simplicial groupoid. The spans

$$X_1 \xleftarrow{d_1} X_2 \xrightarrow{(d_2, d_0)} X_1 \times X_1, \quad X_1 \xleftarrow{s_0} X_0 \xrightarrow{t} 1,$$

define two functors

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} \Delta : \mathbf{Grpd}_{/X_1} & \longrightarrow & \mathbf{Grpd}_{/X_1 \times X_1} \\ S \xrightarrow{s} X_1 & \longmapsto & (d_2, d_0)_! \circ d_1^*(s), \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \epsilon : \mathbf{Grpd}_{/X_1} & \longrightarrow & \mathbf{Grpd} \\ S \xrightarrow{s} X_1 & \longmapsto & t_! \circ s_0^*(s). \end{array}$$

Recall also that upperstar is pullback and lowershriek is postcomposition. This is the general way in which spans interpret homotopy linear algebra [5].

As mentioned above, Segal spaces are a particular case of decomposition spaces [6, Proposition 3.7], simplicial groupoids with the property that the functor Δ is coassociative with the functor ϵ as counit (up to homotopy). In this case, Δ and ϵ endow $\mathbf{Grpd}_{/X_1}$ with a coalgebra structure [6, §5] called the *incidence coalgebra* of X . Note that, in the special case where X is the nerve of a poset, this construction becomes the classical incidence coalgebra construction after taking cardinality, as we shall do shortly.

A Segal space X is *CULF monoidal* [6, §4, 9] if it has a product $X_n \times X_n \rightarrow X_n$ for each n , compatible with the degeneracy and face maps, and such that for all n the squares

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} X_n \times X_n & \xrightarrow{g \times g} & X_1 \times X_1 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ X_n & \xrightarrow{g} & X_1 \end{array}$$

where g is induced by the unique endpoint-preserving map $[1] \rightarrow [n]$, are pullbacks [6, §4]. For example, the fat nerve of a monoidal extensive category is a CULF monoidal Segal space. Recall that a monoidal extensive category is a monoidal category $(\mathcal{C}, +, 0)$ for which the natural functors $\mathcal{C}_{/A} \times \mathcal{C}_{/B} \rightarrow \mathcal{C}_{/A+B}$ and $\mathcal{C}_{/0} \rightarrow 1$ are equivalences.

If X is CULF monoidal, then the resulting coalgebra is in fact a bialgebra [6, §9], with product given by

$$\odot : \mathbf{Grpd}_{/X_1} \otimes \mathbf{Grpd}_{/X_1} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Grpd}_{/X_1 \times X_1} \xrightarrow{+!} \mathbf{Grpd}_{/X_1} \\ (G \rightarrow X_1) \otimes (H \rightarrow X_1) \longmapsto G \times H \rightarrow X_1 \times X_1 \longmapsto G \times H \rightarrow X_1.$$

Briefly, a product in X_n compatible with the simplicial structure endows X with a product, but in order to be compatible with the coproduct it has to satisfy the diagram (6) (i.e., it has to be a CULF functor).

A Segal space X is *locally finite* [7, §7] if X_1 is a locally finite groupoid and both $s_0 : X_0 \rightarrow X_1$ and $d_1 : X_2 \rightarrow X_1$ are finite maps. In this case one can take homotopy cardinality to get a comultiplication

$$\Delta : \mathbb{Q}_{\pi_0 X_1} \xrightarrow{\quad} \mathbb{Q}_{\pi_0 X_1} \otimes \mathbb{Q}_{\pi_0 X_1} \\ |S \xrightarrow{s} X_1| \longmapsto |(d_2, d_0)_! \circ d_1^*(s)|$$

and similarly for ϵ (cf. [7, §7]). Moreover, if X is CULF monoidal, then $\mathbb{Q}_{\pi_0 X_1}$ acquires a bialgebra structure with the product $\cdot = |\odot|$. In particular, if we denote by $+$ the monoidal product in X , then $\delta_a \cdot \delta_b = \delta_{a+b}$ for any $|1 \xrightarrow{r_a} X_1|$ and $|1 \xrightarrow{r_b} X_1|$. The following lemma gives a formula to compute the coproduct of the isomorphism class of an element $f \in X_1$.

Lemma 4 ([2, §4]). *Let X be a Segal space. Then, for f in X_1 we have*

$$\Delta(\delta_f) = \sum_{b \in \pi_0 X_1} \sum_{a \in \pi_0 X_1} \frac{|\text{Iso}(d_0 a, d_1 b)_f|}{|\text{Aut}(b)||\text{Aut}(a)|} \delta_a \otimes \delta_b.$$

Here $\text{Iso}(d_0 a, d_1 b)$ refers to the set of isomorphisms from $d_0 a$ to $d_1 b$, and the subscript f means homotopy fibre.

4. Species and the Faà di Bruno bialgebra

One of the starting points for objective combinatorics is the theory of species, introduced by Joyal [8]. Through the notion of species, Joyal showed that manipulations with power series and generating functions can be carried out directly on the combinatorial structures themselves. A *species* is a functor

$$F: \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$$

from the category \mathbb{B} of finite sets and bijections to itself. To each finite set S , the species F associates another finite set $F[S]$, whose elements are called F -structures on the set S . Each bijection $S \rightarrow R$ gives a bijection $F[S] \rightarrow F[R]$. For example, there is a species Π that sends a set E to $\Pi(E)$, the set of all its partitions, and a bijection $E \xrightarrow{f} E'$ to the obvious bijection $\Pi(E) \rightarrow \Pi(E')$ given by f . Other examples include structures of graphs, trees, linear orders, etc.

We may attach different kinds of power series to a species F in order to enumerate the F -structures or the isomorphism classes of F -structures. The former are often called *labelled* structures, while the latter are called *unlabelled* structures. The *exponential generating function* associated to F is

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} |F[n]| \frac{x^n}{n!},$$

where $|F[n]|$ is the number of F -structures on a set of n elements. This function is used for labelled enumeration. The *type generating function* associated to F is

$$\tilde{F}(x) = \sum_{n \geq 0} |\tilde{F}[n]| x^n,$$

where $|\tilde{F}[n]|$ is the number of unlabelled structures of F . For example, it is easy to see that $|\Pi[3]| = 5$, while $|\tilde{\Pi}[3]| = 3$, because the three partitions $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$ and $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$ are isomorphic.

Several operations on generating functions can be lifted to the level of species [8]. For instance, given two species F and G , we define their *sum* and *product* by

$$(F + G)[S] = F[S] + G[S] \quad \text{and} \quad (F \cdot G)[S] = \sum_{\substack{S_1 + S_2 = S \\ S_1 \cap S_2 = \emptyset}} F[S_1] \times G[S_2],$$

respectively. Both operations are compatible with sum and multiplication of generating functions, so that $(F + G)(x) = F(x) + G(x)$, $(F \cdot G)(x) = F(x) \cdot G(x)$ and similarly for the type generating functions. Nevertheless, the operation that interests us most is *substitution* [8, §2.2]. Suppose that $G[\emptyset] = \emptyset$. Then,

$$(7) \quad (F \circ G)[S] = \sum_{\pi \in \Pi(S)} F[\pi] \times \prod_{B \in \pi} G[B],$$

where $F[\pi]$ interprets π as a set. Notice that this is not the composition of F and G as functors. Substitution of species is compatible with the exponential generating function, but not with the type generating function. To obtain a power series for unlabelled enumeration compatible with substitution, a third kind of generating function is required. The *cycle index series* of a species F [8, §3] is the formal power series (in infinitely many variables x_1, x_2, \dots)

$$Z_F(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |\text{Fix}(F[\sigma])| x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots \right),$$

where \mathfrak{S}_n denotes the group of permutations of $[n]$, σ_k is the number of cycles of size k of σ and $\text{Fix}(F[\sigma])$ is the set of F -structures fixed by $F[\sigma]$. For example, it is easy to see that

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} |\text{Fix}(\Pi[\sigma])| x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots = 5x_1^3 + 9x_1 x_2 + 4x_3.$$

The cycle index series was first used by Pólya [12]. It satisfies that $Z_F(x, 0, \dots) = F(x)$ and $Z_F(x, x^2, \dots) = \tilde{F}(x)$. Furthermore, it is compatible with the following notion of substitution.

Definition 5 ([12]). Given two power series, $F(x_1, x_2, \dots)$ and $G(x_1, x_2, \dots)$, their *plethystic substitution* is defined as

$$(G \otimes F)(x_1, x_2, \dots) = G(F_1, F_2, \dots),$$

with $F_k = F(x_k, x_{2k}, \dots)$. ◀

Returning to the definition of substitution of species (7), observe that the relevant information comes from a decomposition of S . This decomposition is in fact the comultiplication of the isomorphism class of the interval $[\hat{0}, \hat{1}]$ of partitions of S in the incidence bialgebra of the poset of partitions. Indeed,

$$(8) \quad \Delta([\hat{0}, \hat{1}]) = \sum_{\hat{0} \leq \pi \leq \hat{1}} [\hat{0}, \pi] \otimes [\pi, \hat{1}],$$

which becomes the same as (7) after expressing partitions as the disjoint union of their blocks, and interchanging the factors of the tensor product. In fact, disjoint union gives this coalgebra a structure of bialgebra, known as the *Faà di Bruno bialgebra*.

In purely algebraic terms, the *Faà di Bruno bialgebra* \mathcal{F} is the free algebra $\mathbb{Q}[A_1, A_2, \dots]$, where A_n is the dual map $A_n \in \mathbb{Q}[[x]]^*$ defined by

$$A_n(f) = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Its comultiplication is defined to be dual to substitution of power series. That is,

$$\Delta(A_n)(F, G) = A_n(G \circ F).$$

The comultiplication of A_n corresponds to the comultiplication of $[n]$ in the incidence coalgebra of partitions, and can be expressed with the *Bell polynomials* $B_{n,k}(A_1, A_2, \dots)$:

$$\Delta(A_n) = \sum_{k=1}^n B_{n,k}(A_1, A_2, \dots) \otimes A_k.$$

The polynomial $B_{n,k}$ counts the number of partitions of a set with n elements into k blocks, with A_i representing blocks of size i . For example,

$$B_{6,2} = 6A_1A_5 + 15A_2A_4 + 10A_3A_3.$$

The category of partitions is equivalent to the category of surjections, so that \mathcal{F} can be expressed from surjections too [8, §7.4], and in fact it looks simpler. In view of (ii) of lemma 3, equation (8) corresponds to

$$\Delta(S \twoheadrightarrow 1) = \sum_{S \twoheadrightarrow R \twoheadrightarrow 1} (S \twoheadrightarrow R) \otimes (R \twoheadrightarrow 1).$$

The algebra structure is again given by disjoint union of sets. This sum is over isomorphism classes of factorizations $S \twoheadrightarrow R \twoheadrightarrow 1$, meaning up to an isomorphism $R \xrightarrow{\sim} R'$ making the diagram commute. The precise statement that this comultiplication on surjections (or partitions) gives in fact the Faà di Bruno bialgebra fits very well into the theory of Segal spaces, where all the issues with isomorphism classes take care of themselves. We denote by \mathbf{S} the category whose objects are finite sets and whose morphisms are surjections.

Theorem 6 ([4, 8]). *The Faà di Bruno bialgebra \mathcal{F} is equivalent to $\mathbb{Q}_{\pi_0 \mathbf{S}}$, the homotopy cardinality of the incidence bialgebra of the fat nerve $\mathbf{NS} : \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Grpd}$ of the category of surjections.*

Proof. Notice that $\mathbf{S} \simeq (\mathbf{NS})_1$. We know that \mathcal{F} is generated by the functionals A_n . Any surjection is isomorphic to the disjoint union of surjections with singleton target. Hence, $\delta_n = |1 \xrightarrow{\uparrow n \rightarrow 1} \mathbf{S}|$ corresponds to A_n . Using lemma 4 we get

$$\Delta(\delta_n) = \sum_{b: k \rightarrow 1} \sum_{a: n \rightarrow k} \frac{|\text{Iso}(k, k)_{n \rightarrow 1}|}{|\text{Aut}(b)||\text{Aut}(a)|} \delta_a \otimes \delta_k.$$

It is clear that $|\text{Aut}(b)| = k!$. Now, in this case any element of $\text{Iso}(k, k)$ gives $n \rightarrow 1$, so that $|\text{Iso}(k, k)_{n \rightarrow 1}| = n! \cdot k!$ (the $n!$ appears because we are taking homotopy cardinality). Moreover, $\delta_a = \delta_{n_1} \cdots \delta_{n_k}$, where n_i are the fibres of $a : n \rightarrow k$. Altogether we obtain

$$\Delta(\delta_n) = \sum_{k \rightarrow 1} \sum_{n \rightarrow k} \frac{n!}{|\text{Aut}(n \rightarrow k)|} \prod_{i=1}^k \delta_{n_i} \otimes \delta_k,$$

which is easily checked to correspond to the comultiplication of A_n . \blacksquare

We would like to give an interpretation of plethystic substitution from partitions and surjections, as we have just done for substitution of ordinary power series. The monomials of ordinary power series are indexed by natural numbers, which coincide with isomorphism classes of sets. However, the monomials of power series in infinitely many variables are indexed by isomorphism classes of partitions $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$. This is why Nava and Rota [11] developed the notion of partitionals as a generalization of species, in order to give an interpretation of plethystic substitution analogous to the species interpretation of ordinary substitution. A sequence like λ could also represent the isomorphism class of a permutation, and in fact Bergeron [1] gave a similar interpretation but in terms of permutationals, rather than partitionals.

5. Partitionals and the plethystic bialgebra

A partitional [11] is a functor $M : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{B}$ from the category of partitions \mathbb{P} to the category of sets and bijections \mathbb{B} . The image $M[E, \pi]$ of (E, π) under M is the set of M -structures. By functoriality, the cardinality $|M[E, \pi]|$, depends only on the isomorphism class λ of the partition (E, π) (see (2)), and will be denoted by $M[\lambda]$. Therefore, we can define the *generating function* of M as

$$(9) \quad M(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\lambda} \frac{M[\lambda]}{\text{aut}(\lambda)} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots.$$

As in the case of species, several operations on generating functions can be lifted to the level of partitionals. The sum and the product are defined in a similar way as for species, and we will not do it here. The substitution, however, is more complex and involves the notion of transversal. Let M and R be two partitionals. Then, their *substitution* [11, §6] is defined as

$$(M \circ R)[E, \sigma] := \sum_{\substack{(\pi, \tau) \\ \text{transversal of } \sigma}} M[\tau, (\sigma \vee \tau)|\tau] \times \prod_{B \in \sigma \vee \tau} R[\pi_B, \sigma_B|\pi_B].$$

Substitution of partitionals is compatible with plethystic substitution of generating functions. That is, $(M \circ R)(x_1, x_2, \dots) = M(x_1, x_2, \dots) \otimes R(x_1, x_2, \dots)$ [11, §6]. Notice that, as before, this definition is also based on a decomposition of (E, σ) , which under isomorphism classes gives rise to a comultiplication in a bialgebra, the *plethystic bialgebra* [2, §3]. For each λ , define the functional $A_\lambda \in \mathbb{Q}[[\mathbf{x}]]^*$ by $A_\lambda(F) = F_\lambda$. The *plethystic bialgebra* \mathcal{P} is the free polynomial algebra $\mathbb{Q}[\{A_\lambda\}_\lambda]$ along with the comultiplication dual to plethystic substitution. That is, for each λ and $F, G \in \mathbb{Q}[[\mathbf{x}]]$,

$$\Delta(A_\lambda)(F, G) = A_\lambda(G \otimes F).$$

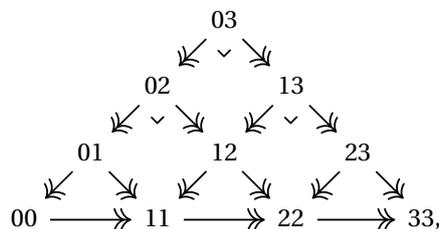
The counit is given by $\epsilon(A_\lambda) = \langle A_\lambda, x_1 \rangle$.

It is difficult to express \mathcal{P} as an incidence coalgebra from partitions, but using the machinery of section 3 we can find a Segal groupoid, arising also from surjections, whose incidence bialgebra is isomorphic to the plethystic bialgebra. First of all, let us apply the results of section 2 to express definition (9) in the context of surjections:

$$(10) \quad \Delta \left(\begin{array}{c} E \\ \Downarrow \sigma \Downarrow \\ B \twoheadrightarrow 1 \end{array} \right) = \sum_E \begin{array}{c} S \\ \Downarrow \mu \Downarrow \\ B \twoheadrightarrow I \end{array} \otimes \begin{array}{c} X \\ \Downarrow \lambda \Downarrow \\ I \twoheadrightarrow 1 \end{array}.$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \vee \Downarrow \\ S \quad X \\ \Downarrow \mu \Downarrow \quad \Downarrow \lambda \Downarrow \\ B \twoheadrightarrow I \twoheadrightarrow 1 \end{array}$$

Again, this sum is over isomorphism classes of transversals of surjections, meaning up to isomorphisms $S \xrightarrow{\sim} S'$ and $X \xrightarrow{\sim} X'$ making the diagram commute. To give a precise statement about the relation between surjections and the plethystic bialgebra we introduce the simplicial groupoid \mathbf{TS} [2, §2], whose n -simplices are pyramids like the one pictured below for $n = 3$:



where all the entries are finite sets, the arrows are surjections, and the squares are pullbacks of sets. Morphisms in \mathbf{TS}_n are levelwise bijections making the diagram commute. The face map d_i removes all the objects containing an i index, while the degeneracy maps s_i repeats the objects containing an i index. The fact that the squares are pullbacks makes it a Segal space. For instance,

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & 01 & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 00 & \longrightarrow & 11
 \end{array}
 \circ
 \begin{array}{ccc}
 & 12 & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 11 & \longrightarrow & 22,
 \end{array}
 = d_1 \left(\begin{array}{ccc}
 & & 02 \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & 01 & 12 \\
 \swarrow & & \searrow \\
 00 & \longrightarrow & 11 \longrightarrow 22
 \end{array} \right) = \begin{array}{ccc}
 & 02 & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 00 & \longrightarrow & 22,
 \end{array}
 \end{array}$$

which is defined up to isomorphism. Also, disjoint union of diagrams makes it a CULF monoidal Segal space [2, §2].

Theorem 7 ([2, §4]). *The plethystic bialgebra \mathbf{P} is isomorphic to $\mathbf{Q}_{\mathbf{TS}_1}$, the homotopy cardinality of the incidence bialgebra of \mathbf{TS} .*

Proving this result would be beyond the scope of this paper. The idea is that A_σ corresponds to

$$\delta_\sigma = |1 \xrightarrow{\sigma^{-1}} \mathbf{TS}_1|.$$

The homotopy fibre

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbf{TS}_1)_\sigma & \longrightarrow & \mathbf{TS}_2 \\
 \downarrow & \lrcorner & \downarrow d_1 \\
 1 & \xrightarrow{\sigma^{-1}} & \mathbf{TS}_1
 \end{array}$$

is precisely the groupoid of factorizations appearing in the subindex of the comultiplication (10) and the summands come, respectively, from d_2 and d_0 of the factorizations.

References

- [1] BERGERON, François. “Une combinatoire du pléthysme”. In: *Journal of Combinatorial Theory. Series A* 46.1-2 (1987), pp. 291–305. ISSN: 0097-3165. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(87\)90007-0](https://doi.org/10.1016/0097-3165(87)90007-0).
- [2] CEBRIAN, Alex. “A simplicial groupoid for plethysm”. In: *Algebraic & Geometric Topology* 21.1 (2021), pp. 421–445. ISSN: 1472-2747. <https://doi.org/10.2140/agt.2021.21.421>.
- [3] DYCKERHOFF, Tobias and KAPRANOV, Mikhail. *Higher Segal spaces*. Vol. 2244. Lecture Notes in Mathematics. Cham: Springer, 2019. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-27124-4>.

- [4] GÁLVEZ-CARRILLO, Imma; KOCK, Joachim, and TONKS, Andrew. “Groupoids and Faà di Bruno formulae for Green functions in bialgebras of trees.” In: *Advances in Mathematics* 254 (2014), pp. 79–117. ISSN: 0001-8708. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2013.12.015>.
- [5] GÁLVEZ-CARRILLO, Imma; KOCK, Joachim, and TONKS, Andrew. “Homotopy linear algebra”. In: *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematics* 148.2 (2018), pp. 293–325. ISSN: 0308-2105. <https://doi.org/10.1017/S0308210517000208>.
- [6] GÁLVEZ-CARRILLO, Imma; KOCK, Joachim, and TONKS, Andrew. “Decomposition spaces, incidence algebras and Möbius inversion. I: Basic theory”. In: *Advances in Mathematics* 331 (2018), pp. 952–1015. ISSN: 0001-8708. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2018.03.016>.
- [7] GÁLVEZ-CARRILLO, Imma; KOCK, Joachim, and TONKS, Andrew. “Decomposition spaces, incidence algebras and Möbius inversion. II: Completeness, length filtration, and finiteness”. In: *Advances in Mathematics* 333 (2018), pp. 1242–1292. ISSN: 0001-8708. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2018.03.017>.
- [8] JOYAL, Andre. “Une théorie combinatoire des séries formelles”. In: *Advances in Mathematics* 42 (1981), pp. 1–82. ISSN: 0001-8708. [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(81\)90052-9](https://doi.org/10.1016/0001-8708(81)90052-9).
- [9] LAWVERE, F. W. and MENNI, M. “The Hopf algebra of Möbius intervals”. In: *Theory and Applications of Categories* 24 (2010), pp. 221–265. ISSN: 1201-561X. URL: <https://www.emis.de/journals/TAC/volumes/24/10/24-10abs.html>.
- [10] LEROUX, Pierre. “Les catégories de Möbius”. In: *Résumés des conférences. Deuxième colloque sur l’algèbre des catégories (Amiens, 1975)*. Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques 16.3. 1975, pp. 280–282. URL: http://www.numdam.org/item/CTGDC_1975__16_3_217_0/.
- [11] NAVA, Oscar and ROTA, Gian-Carlo. “Plethysm, categories and combinatorics”. In: *Advances in Mathematics* 58 (1985), pp. 61–88. ISSN: 0001-8708. [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(85\)90049-0](https://doi.org/10.1016/0001-8708(85)90049-0).
- [12] PÓLYA, George. “Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen”. In: *Acta Mathematica* 68 (1937), pp. 145–254. ISSN: 0001-5962. <https://doi.org/10.1007/BF02546665>.
- [13] ROTA, Gian-Carlo. “On the foundations of combinatorial theory. I: Theory of Möbius functions”. In: *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* 2 (1964), pp. 340–368. ISSN: 0044-3719. <https://doi.org/10.1007/BF00531932>.

El espacio de deformaciones de variedades tridimensionales hiperbólicas orientables

✉ Juan Luis Durán Batalla
Universitat Autònoma de Barcelona
jduran@mat.uab.cat

Resumen: Sea M una variedad de dimensión 3 hiperbólica, orientada, completa y de volumen finito. El problema que nos planteamos es encontrar las métricas hiperbólicas obtenidas deformando una fijada. Para ello, trabajaremos con variedades que se puedan triangular mediante un número finito de tetraedros ideales, *i.e.*, topológicamente sin vértices. La existencia de una triangulación permite deformar la métrica original de un modo muy sencillo: recordando el patrón de pegado de los tetraedros, podemos modificarlos individualmente y pedir que se cumplan unas condiciones que garanticen un *buen* pegado. El conjunto de posibles parámetros para los tetraedros que cumplen estas condiciones se conoce como el espacio de deformaciones de la variedad. Thurston demostró que dicho espacio de deformaciones en torno a la métrica completa se puede parametrizar por un abierto de $\bar{\mathbb{C}}^k$, donde k es el número de *cúspides* o clases de vértices (suprimidos) en la triangulación. El resultado de Thurston es independiente de la triangulación fijada, debido a que el número de cúspides es un concepto topológico. Estas notas pretenden dar una idea de las nociones básicas que son necesarias para demostrar y entender el resultado anterior.

Abstract: Let M be a hyperbolic 3-manifold, oriented, complete and of finite volume. The problem we are tackling here is the one of finding the hyperbolic metrics which are obtained by deforming a fixed one. In order to do so, we will work with manifolds which can be triangulated through a finite number of ideal tetrahedra, *i.e.*, topologically without vertices. The existence of a triangulation allows to deform the original metric in a very simple way: recalling the gluing pattern of the tetrahedra, we can modify them individually and ask for some conditions to be met, which guarantee a *nice* gluing. The set of parameters for the tetrahedra satisfying the previous conditions is known as the deformations space of the manifold. Thurston proved that such deformation space around the complete metric can be parametrized by an open set of $\bar{\mathbb{C}}^k$, where k is the number of *cusps* or (deleted) vertex classes in the triangulation. Thurston's result is independent on the fixed triangulation, due to the fact that the number of cusps is a topological concept. These notes intend to give an idea of the basics notions which are necessary to prove and understand the aforementioned result.

Palabras clave: variedad tridimensional hiperbólica, triangulación ideal.

MSC2010: 57K32.

Agradecimientos: Parcialmente financiado por el proyecto MTM2015-66165-P y la ayuda BES-2016-079278 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades.

Referencia: DURÁN BATALLA, Juan Luis. «El espacio de deformaciones de variedades tridimensionales hiperbólicas orientables». En: *TEMat monográficos*, 3 (2021): *Actas del VIII Encuentro de Jóvenes Topólogos*, págs. 41-55. ISSN: 2660-6003. URL: <https://temat.es/monograficos/article/view/vol3-p41>.

1. Introducción

Uno de los mayores avances en el estudio de variedades tridimensionales es lo que se conoce como el teorema de geometrización de Thurston. Este teorema afirma que toda variedad tridimensional cerrada (compacta y sin borde) puede ser cortada en piezas de tal manera que cada una de estas piezas tenga una geometría de entre ocho estructuras geométricas [5, 12]. Entre estas ocho estructuras geométricas se encuentran los espacios de curvatura constante: la esfera (curvatura +1), el espacio euclidiano (curvatura 0) y el espacio hiperbólico (curvatura -1). De ellos, el más interesante es el hiperbólico; de hecho, dicho en un sentido algo vago, casi toda 3-variedad es hiperbólica. En palabras de Thurston [12]: «*of these eight, hyperbolic geometry is by far the most interesting, the most complex, and the most useful. The other seven come into play only in exceptional cases*». En la segunda sección del texto, veremos las nociones básicas de espacio hiperbólico y variedad hiperbólica, dando varios modelos equivalentes.

La conjetura de geometrización puede considerarse un análogo al teorema de uniformización a dimensión 3. Dicho teorema, en el cual Poincaré jugó un papel fundamental [8], implica que toda superficie de Riemann admite una métrica de curvatura constante: para las de género mayor o igual que 2 es de curvatura -1 (hiperbólica), siendo las excepciones el toro, de curvatura 0 (euclidiana) y la esfera, de curvatura +1 (esférica).

La influencia del trabajo de Poincaré en el de Thurston va más allá del teorema de uniformización. Poincaré también introdujo el concepto de triangulación de una variedad, esencial para el estudio combinatorio de estas. En este sentido, destacamos en particular el teorema fundamental del poliedro de Poincaré [4], que da las condiciones para que un poliedro en la esfera, el espacio euclidiano o el hiperbólico, con las caras identificadas por isometrías, dé lugar a una variedad. Thurston continúa con esta idea y trabaja con un tipo particular de triangulaciones llamadas ideales: los tetraedros de la triangulación están en el espacio hiperbólico, pero dichos tetraedros no tienen vértices. De esta manera, dedicamos la tercera sección del texto a ver un ejemplo que es esencial en el trabajo de Thurston, así como la definición formal de triangulación ideal y algunas propiedades.

En la primera parte de la última sección se ven las ecuaciones de compatibilidad necesarias para que deformaciones en los tetraedros de una triangulación den de nuevo lugar a una variedad. Las ecuaciones de compatibilidad se derivan esencialmente del teorema fundamental del poliedro de Poincaré. Finalizamos enunciando los teoremas que desencaminan al teorema de Thurston enunciado en el resumen: las deformaciones de la métrica hiperbólica completa se corresponden con un abierto de $\overline{\mathbb{C}}^k$, donde k es el número de vértices suprimidos en la triangulación (equivalentemente, cúspides). Una de las aplicaciones más importante de este resultado es que existen infinitos casos donde el espacio con la nueva métrica, tras completarse, da lugar a una nueva variedad hiperbólica completa. Esto permite construir sucesiones de variedades M_n tendiendo a la variedad original M .

Este resultado se presenta en yuxtaposición con el teorema de rigidez de Mostow-Prasad, que dice aproximadamente que si una variedad de volumen finito admite una estructura hiperbólica completa, esta es única. La consecuencia del teorema de Thurston es que, no obstante, podemos encontrar variedades hiperbólicas (no homeomorfas) tan cerca de la original como queramos.

2. Variedades hiperbólicas

Comenzaremos la sección la definición del espacio hiperbólico. Nos centraremos en los casos de dimensión 2 y 3, las definiciones y modelos que veremos se pueden generalizar a cualquier dimensión. En la segunda subsección definiremos con precisión qué es una variedad hiperbólica. Unas buenas referencias para esta sección son [10] y [1].

2.1. El espacio hiperbólico

Consideramos en primer lugar en \mathbb{R}^3 la siguiente forma bilinear simétrica:

$$(1) \quad \langle v, w \rangle := v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 - v_3 \cdot w_3.$$

A dicha forma bilineal se la denomina *producto interior lorentziano*. Dado $v \in \mathbb{R}^3$, se define la norma de v respecto a dicho producto interior como $\|v\| := \langle v, v \rangle$.

Definición 1. Sea \mathbb{R}^3 junto con el producto interior lorentziano. El espacio hiperbólico de dimensión 2, denotado \mathbb{H}^2 , se define como sigue:

$$\mathbb{H}^2 := \{v \in \mathbb{R}^3 : v_3 > 0 \text{ y } \|v\| = -1\}.$$

De manera análoga, en \mathbb{R}^4 , se define el producto interior lorentziano como

$$(2) \quad \langle v, w \rangle := v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3 - v_4 \cdot w_4.$$

Con él, podemos definir el espacio hiperbólico de dimensión 3 como

$$\mathbb{H}^3 := \{v \in \mathbb{R}^4 : v_4 > 0 \text{ y } \|v\| = -1\}. \quad \blacktriangleleft$$

Dada una superficie, S , inmersa en \mathbb{R}^3 , y $p \in S$, tenemos el plano tangente en p , que denotamos $T_p S$. Para cada punto en la superficie y su correspondiente plano tangente, tenemos la primera forma fundamental. La primera forma fundamental viene inducida por el producto euclidiano usual de \mathbb{R}^3 y permite calcular ángulos entre vectores tangentes, distancias, etc. De hecho, la primera forma fundamental no es más que la métrica riemanniana en S como subvariedad de \mathbb{R}^3 . De igual manera tenemos que en $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^3$ el producto interior lorentziano define, para cada punto $p \in \mathbb{H}^2$, una métrica en su espacio tangente $T_p \mathbb{H}^2$. Pese a que el producto lorentziano no es definido positivo, la métrica inducida en cada espacio tangente $T_p \mathbb{H}^2$ sí lo es, por lo que \mathbb{H}^2 es una variedad riemanniana. Lo anterior se generaliza sin problemas a \mathbb{H}^3 .

Dados $v, w \in \mathbb{H}^3$, la distancia inducida por la métrica riemanniana, $d_{\mathbb{H}^3}(v, w)$, satisface que $\langle v, w \rangle = \cosh(d_{\mathbb{H}^3}(v, w))$ (la fórmula se cumple también en \mathbb{H}^2). Las isometrías del espacio hiperbólico son precisamente restricciones a \mathbb{H}^3 de las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^4 que preservan el producto interior lorentziano $\langle \cdot, \cdot \rangle$, así como los vectores *de tipo tiempo positivos*, es decir, aquellos con norma negativa (tipo tiempo) y última coordenada positiva. El grupo de matrices 4×4 que lo satisface es el grupo de *transformaciones de Lorentz positivas* y se denota por $PO(1, 3)$.

Por último, las geodésicas del espacio son intersecciones de \mathbb{H}^3 con subespacios vectoriales de \mathbb{R}^4 de dimensión 2. En \mathbb{H}^2 las geodésicas también son restricciones de subespacios vectoriales bidimensionales, pero de \mathbb{R}^3 . Análogamente, los hiperplanos de \mathbb{H}^3 son subespacios vectoriales de dimensión 3 en \mathbb{R}^4 intersecados con \mathbb{H}^3 .

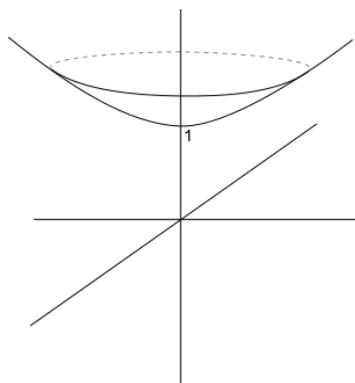


Figura 1: El espacio hiperbólico bidimensional.

Al anterior modelo se lo conoce por *modelo del hiperboloide*. No obstante, existen otros dos modelos, que son los que utilizaremos principalmente: el *modelo del disco de Poincaré* y el *modelo del semiplano superior*.

En el modelo del disco de Poincaré, nuestro espacio es la bola unidad abierta centrada en 0 en \mathbb{R}^n (con la norma euclidiana usual), $n = 2, 3$ dependiendo de si hablamos del espacio hiperbólico bi o tridimensional.

Sin embargo, la métrica que tomaremos en $B(0, 1)$ no será la euclidiana, sino $ds^2 = \frac{4 \sum dx_i^2}{(1 - \|x\|^2)^2}$. Usualmente denotamos al espacio por D^3 (D^2 en el caso bidimensional) para diferenciarlo de la bola con la métrica euclidiana. Con esta nueva métrica, las geodésicas son segmentos de circunferencia perpendiculares al borde de la bola, $S(0, 1)$, en un sentido euclidiano usual. Análogamente, los hiperplanos (en D^3) son secciones de esfera euclídea contenida en $B(0, 1)$ y perpendicular al borde de la bola $S(0, 1)$. La esfera $S(0, 1)$, pese a no ser parte del espacio hiperbólico, juega un papel importante en la teoría: se denomina la *frontera en el infinito* del espacio hiperbólico, denotada por $\partial_\infty(D^3)$.

El otro modelo, el del semiplano superior, será en el que más trabajaremos, ya que algunas de las definiciones o resultados que veremos son prácticamente inmediatos. Mantenemos la notación \mathbb{H}^2 o \mathbb{H}^3 . Para \mathbb{H}^3 , el espacio será el semiespacio superior de \mathbb{R}^3 , es decir, $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$. Análogamente, para \mathbb{H}^2 será el semiplano superior. La métrica que tomamos es $ds^2 = \frac{\sum dx_i^2}{x_n^2}$, donde $n = 2, 3$ dependiendo de si estamos en \mathbb{H}^2 o \mathbb{H}^3 . Es importante remarcar que, si nos restringimos a un plano euclidiano horizontal, la métrica es un múltiplo de la métrica euclidiana. Las geodésicas son de nuevo segmentos de circunferencia perpendiculares a la *frontera en el infinito*, $\partial_\infty(\mathbb{H}^3)$. Para ver cuál es la frontera en el infinito, es necesario saber que el paso del modelo del disco al del semiplano es a través de una cierta transformación de Möbius. La frontera en el infinito en este modelo sigue siendo topológicamente una esfera, la transformación de Möbius hace algo similar a la proyección estereográfica: envía $S(0, 1)$ (la frontera en el infinito del modelo del disco) a $(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cup \{\infty\}$. Consecuentemente, las geodésicas en \mathbb{H}^3 son secciones de circunferencia perpendiculares al plano horizontal o segmentos verticales. En un sentido más general, los hiperplanos son secciones de esfera contenidos en \mathbb{H}^3 y perpendiculares a la frontera, es decir, esferas con centro en $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ o planos verticales. En \mathbb{H}^2 la imagen es similar, la frontera en el infinito son $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \{\infty\}$ y las geodésicas son secciones de circunferencia perpendiculares a ella o segmentos verticales.

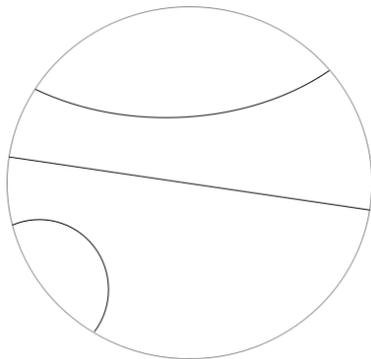


Figura 2: Disco de Poincaré.

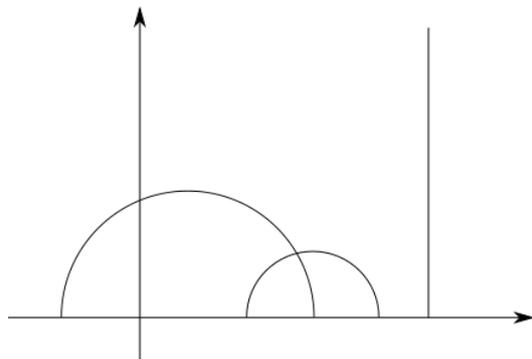


Figura 3: Semiplano Superior.

Tanto en el modelo del disco de Poincaré como en el del semiplano superior, se puede demostrar que las isometrías son precisamente las transformaciones de Möbius, es decir, composición de inversiones en esferas y reflexiones en planos, que dejan el respectivo espacio, D^3 o \mathbb{H}^3 , invariante. Además, la restricción a la frontera en el infinito, $S(0, 1)$ en el caso del disco, $(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cup \{\infty\}$, en el del semiplano, determina biunívocamente la isometría. Sabemos que $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \simeq \bar{\mathbb{C}}$, es decir, la esfera de Riemann. En $\bar{\mathbb{C}}$ las transformaciones de Möbius que preservan la orientación son las transformaciones lineales fraccionales:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0.$$

Este grupo se identifica con $PSL(2, \mathbb{C})$.

La característica principal del espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 es que tiene curvatura seccional constante -1 .

2.2. Variedades hiperbólicas

Ahora pasaremos a la cuestión de ver qué es una estructura hiperbólica en una variedad M (por simplicidad, la tomaremos sin frontera), lo cual es un caso particular de (G, X) -estructuras, donde X denota

a una variedad analítica real (de la misma dimensión que M) y G , un grupo de Lie actuando en X fiel y analíticamente. Frecuentemente X será el espacio euclídeo, la esfera o el espacio hiperbólico y G , un subgrupo de isometrías de X . Comencemos por la definición general.

Definición 2. Un (G, X) atlas de M es una colección de cartas $\phi_i : U_i \rightarrow X$, satisfaciendo que

1. $\{U_i\}$ es un recubrimiento por abiertos de M ;
2. cada ϕ_i es un homeomorfismo con su imagen, y
3. para cada $x \in U_i \cap U_j$, existe un entorno $N(x)$ de x contenido en $U_i \cap U_j$ y un elemento $g \in G$ tal que

$$\phi_i|_{N(x)} = g \circ \phi_j|_{N(x)}. \quad \blacktriangleleft$$

Notemos que la última condición es equivalente a decir que los cambios de cartas son localmente elementos de g : intuitivamente, estamos modelando nuestra variedad a partir de X con cambios de cartas isometrías de X . Además, se tiene que un (G, X) -atlas determina un único (G, X) -atlas maximal.

Definición 3. Una (G, X) -estructura en M es un (G, X) -atlas maximal. \blacktriangleleft

Definición 4. Una variedad M se dice hiperbólica si admite una $(\mathbb{H}^n, \text{Isom}(\mathbb{H}^n))$ -estructura. \blacktriangleleft

Si X es una variedad riemanniana, M hereda una estructura riemanniana definida por el requisito de que las cartas sean isometrías. El siguiente resultado nos permite relacionar variedades riemannianas y estructuras hiperbólicas.

Teorema 5 (Cartan–Ambrose–Hicks). *Una variedad riemanniana M completa, conexa y simplemente conexa de curvatura seccional constante -1 es isométricamente difeomorfa a \mathbb{H}^n .*

Además, también se da el siguiente teorema.

Teorema 6. *Toda (G, X) -variedad conexa, simplemente conexa y completa es isométricamente isomorfa a X . En particular, si existe una variedad con estas propiedades, X es completa.*

Estos dos teoremas implican lo siguiente.

Teorema 7. *Si M es una variedad riemanniana completa y conexa de dimensión n y tiene curvatura constante -1 , entonces M es el cociente de \mathbb{H}^n por un subgrupo discreto de isometrías actuando libremente. En particular, M es una variedad hiperbólica.*

No obstante, en el caso general, cuando la variedad no es completa, no es posible describirla como un cociente de \mathbb{H}^n , pero sigue siendo cierto que toda variedad riemanniana con curvatura seccional constante -1 (o negativa, en general) admite una (X, G) -estructura. Lo anterior se debe a que el teorema de Cartan–Ambrose–Hicks fue demostrado en primer lugar en una versión local por Cartan. Consecuentemente, podemos dar otra definición equivalente de variedad hiperbólica.

Definición 8. Una variedad riemanniana M se dice hiperbólica si tiene curvatura seccional constante negativa. \blacktriangleleft

Como ejemplo de variedades hiperbólicas, podemos decir que todas las superficies (orientables) de género mayor o igual que dos admiten estructuras hiperbólicas completas. De hecho, fijado un género g , el espacio de estructuras hiperbólicas completas que admite Σ_g se puede identificar con $\mathbb{R}_+^{3g-1} \times \mathbb{R}^{3g-1}$.

En el caso tridimensional, el siguiente resultado [1, pág. D.3.14] nos dice cómo son las variedades hiperbólicas de volumen finito.

Teorema 9. *Sea M una variedad hiperbólica de dimensión 3 conexa, orientable, completa y de volumen finito. Se tiene que $M = \text{Int}(\bar{M})$, donde \bar{M} es una variedad compacta, conexa y orientable cuya frontera es una unión disjunta de toros.*

Los toros de la frontera de la variedad \bar{M} se denominan *toros periféricos*. Como veremos más adelante, son una parte central en el estudio de las variedades de volumen finito.

3. Triangulaciones ideales de variedades hiperbólicas

De aquí en adelante, trataremos con variedades tridimensionales, conexas y orientables. Toda variedad completa se puede escribir como el cociente de \mathbb{H}^3 por un subgrupo discreto de isometrías actuando libremente. No obstante, Thurston tuvo una idea muy fructífera para trabajar con estas variedades: la triangulación por tetraedros ideales. Veremos un ejemplo que fue un pilar principal en los resultados de Thurston y nos permite justificar el uso de estos tetraedros ideales. Más adelante precisaremos definiciones.

3.1. Ejemplo esencial

Definición 10. Un nudo (en S^3) es un embebimiento suave de S^1 en S^3 . ◀

Consideramos el nudo del 8, del cual dibujamos en la figura 4 su representación planar.

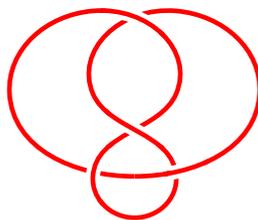


Figura 4: Nudo del 8.

Nos planteamos la siguiente cuestión: ¿el complemento del nudo del 8 en S^3 , es decir, $S^3 \setminus K$, donde K es el nudo, admite una estructura hiperbólica? En 1975, R. Riley [11] demostró que, en efecto, era hiperbólico. Para ello, encontró una representación del grupo fundamental de la variedad como subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C})$ y pudo demostrar que $S^3 \setminus K$ era un cociente de \mathbb{H}^3 por un subgrupo de isometrías. Sin embargo, a Thurston se le ocurrió un método constructivo de encontrar una estructura hiperbólica. El algoritmo que describiremos permite, para una gran familia de nudos, encontrar una triangulación de su complemento y, además, que esta triangulación sea «geométrica». Es decir, estos tetraedros serán tetraedros del espacio hiperbólico y estarán pegados por isometrías hiperbólicas.

A continuación describiremos informalmente el algoritmo:

- En primer lugar, proyectamos el nudo en un plano y separamos los puntos de intersección ligeramente fuera del plano. Recordemos que S^3 es homeomorfo a $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, así que el plano divide S^3 en dos subespacios homeomorfos a una bola tridimensional: estas serán nuestras dos 3-celdas.

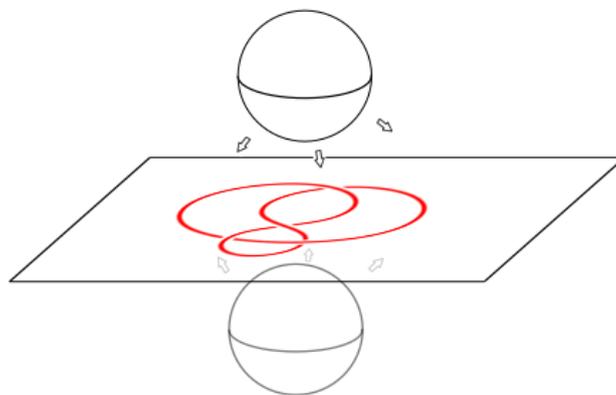


Figura 5: El plano del nudo separa en dos componentes conexas.

- Consideramos en cada uno de los dos semiespacios una esfera que vamos expandiendo hasta que cada una de las dos esferas empiece a entrar en contacto con el nudo. Si continuamos la expansión, el nudo dividirá la esfera en un número finito de regiones, que será por donde pegaremos las 3-celdas al finalizar el algoritmo.

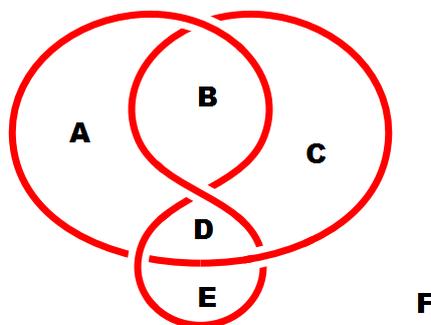


Figura 6: Regiones vistas desde la bola superior.

- Fuera de un entorno de las intersecciones (en el plano) del nudo consigo mismo, es posible realizar una homotopía de cada sección de cuerda delimitada por dichas autointersecciones a un punto. Cuando contraemos dichas secciones, el complemento del nudo no cambia topológicamente. El problema delicado es resolver las intersecciones.
- En las intersecciones añadimos una 1-celda vertical uniendo los segmentos de nudo inferior y superior. Esta 1-celda se corresponderá a aristas por donde realizaremos el pegado. Cuando consideramos estas 1-celdas, es posible extender las anteriores homotopías hasta las intersecciones sin que cambie la topología del complemento del nudo. (El proceso riguroso en este punto es bastante más complicado, nos remitimos para ello a [1, Fig. E.15-19]).

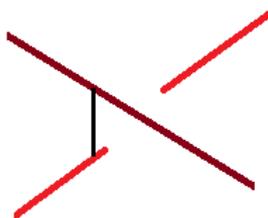


Figura 7: 1-celda vertical.

- Al aplicar los dos últimos pasos, es posible que nos quede alguna región con solo dos lados identificados, un *bígono*. Un bígono consiste en un polígono de 2 lados. Por ejemplo, si consideramos en una esfera dos puntos antipodales, es posible unirlos por dos geodésicas diferentes y construir así un bígono. Si durante el algoritmo llegamos aun bígono, podemos pegar los lados y eliminar la región.
- Tras finalizar este proceso, tendremos el plano visto desde arriba y desde abajo con cierto número de regiones identificadas. Ahora podemos subdividir las bolas o 3-celdas superior e inferior en poliedros que sigan el patrón de pegado anterior.

Al finalizar el algoritmo tenemos las 3-celdas, cuyo origen son las dos bolas que dividía el plano; las 2-celdas, las regiones que nos marca el nudo en las esferas; las 1-celdas, añadidas por nosotros en el cuarto paso, y 0-celdas, producto de las homotopías que contraían las secciones del nudo a un punto. Puesto que queremos triangular $S^3 \setminus K$, estas últimas, las 0-celdas, las debemos eliminar de la triangulación. Consecuentemente, en la triangulación final, los poliedros tendrán sus vértices suprimidos, ya que estos se corresponderían con el nudo.

Puesto que toda 3-variedad cerrada se puede construir a partir de nudos y enlaces (embebimientos de varias circunferencias) en S^3 , el algoritmo anterior resulta muy general, así que tiene sentido considerar triangulaciones sin vértices para una variedad aunque desconozcamos su construcción mediante nudos y enlaces.

En el caso del nudo del 8, lo que obtenemos es una triangulación topológica por dos tetraedros sin sus vértices. Para dotar de una estructura geométrica al complemento, nos faltaría dotar a los tetraedros de una estructura hiperbólica. Con este fin, en la siguiente sección consideraremos unos tipos de tetraedro del espacio hiperbólico que no tienen vértices.

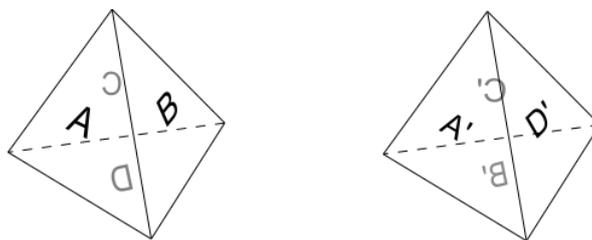


Figura 8: Triangulación del complemento del nudo del 8 (los tetraedros no tienen vértices).

Una buena referencia para ver el algoritmo en detalle es [1], y en [9] hay numerosos ejemplos.

3.2. Tetraedros ideales y su parametrización

Definición 11. Un tetraedro ideal en \mathbb{H}^3 es un tetraedro con todos sus vértices en la frontera en el infinito. ◀

Recordamos que en el modelo del disco de Poincaré la frontera en el infinito es $S(0, 1)$ y, en el modelo del semiespacio superior, $(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cup \{\infty\}$. Nótese que, topológicamente, un tetraedro ideal es homeomorfo a un tetraedro sin sus vértices.

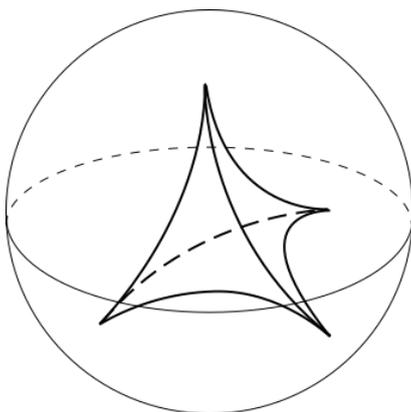


Figura 9: Tetraedro en D^3 .

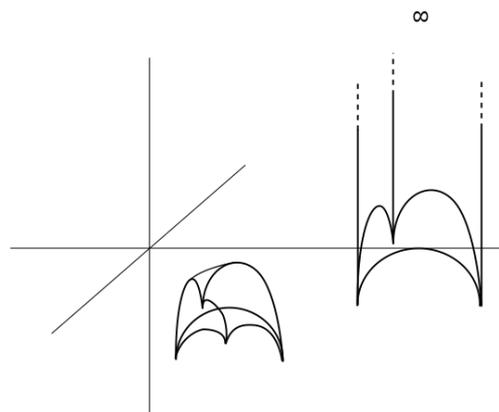


Figura 10: Tetraedros en \mathbb{H}^3 .

Definición 12. En el modelo del disco de Poincaré, una horoesfera centrada en $a \in \partial_\infty(D^3) = S(0, 1)$ es una esfera euclidiana contenida en la bola cerrada de centro 0 y radio unidad, $\overline{B(0, 1)}$, y tangente en a a $S(0, 1)$. ◀

La transformación de Möbius que envía el modelo del disco en el del semiplano superior envía las horoesferas o bien a una esfera euclídea contenida en el semiespacio cerrado superior y tangente al plano $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ en a , o bien a un plano horizontal, que es lo equivalente a una esfera tangente a $\infty \in \partial_\infty(\mathbb{H}^3)$. Esta última vendría de una horoesfera centrada en $(0, 0, 1) \in \partial_\infty(\mathbb{D}^3)$, que es el punto que la transformación de Möbius envía a ∞ .

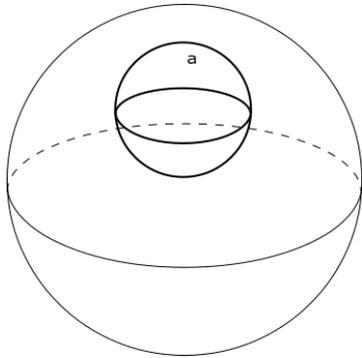


Figura 11: Horoesfera en D^3 .

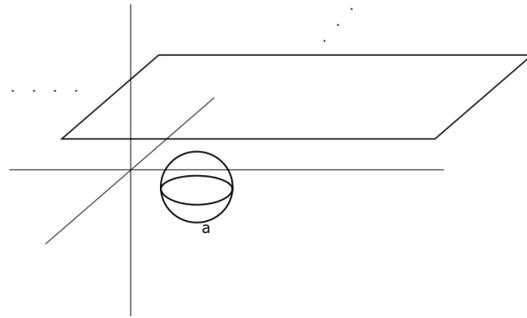


Figura 12: Horoesferas en \mathbb{H}^3 .

La noción de horoesfera es necesaria para definir el enlace de un vértice, concepto clave en la parametrización de los tetraedros.

Definición 13. Dado un vértice v de un tetraedro ideal, es decir, un vértice en la frontera del infinito, el enlace del vértice es la intersección del tetraedro con una horoesfera suficientemente pequeña centrada en el vértice. Se denota el enlace del vértice por $L(v)$.

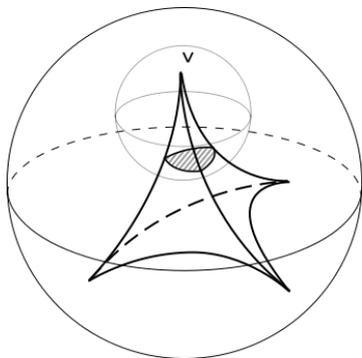


Figura 13: Enlace de tetraedro en D^3 .

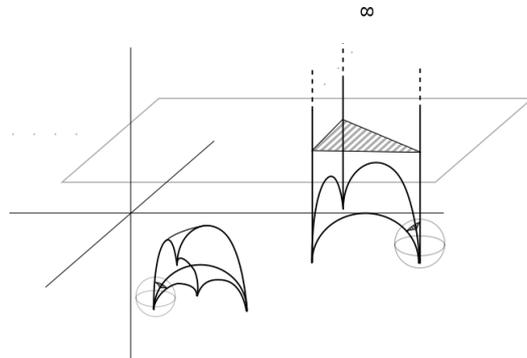


Figura 14: Enlaces de tetraedros en U^3 .

Pese a que la definición depende de la horoesfera escogida, cuando estas son suficientemente pequeñas, tenemos que los enlaces son similares en un sentido euclidiano.

Proposición 14. El enlace de un vértice de un tetraedro ideal es un triángulo euclidiano bien definido salvo similitud. Además, la clase de similitud euclidiana, preservando la orientación, del enlace de un vértice caracteriza al tetraedro salvo isometría, preservando la orientación.

Demostración. Haremos la demostración en el modelo del semiplano superior. Dado un tetraedro ideal en \mathbb{H}^3 siempre existe una (única si pedimos que preserve la orientación) isometría que envíe tres de sus vértices a tres puntos fijados. Por lo tanto, podemos suponer que el vértice de interés es el punto $\infty \in \partial_\infty(\mathbb{H}^3)$. Es inmediato que el enlace es un triángulo en un plano horizontal si tomamos un plano a suficiente altura, así que, teniendo en cuenta que en planos horizontales la métrica hiperbólica se restringe a un múltiplo de la euclidiana, es un triángulo euclidiano. Si tomamos otra horoesfera, tenemos otro múltiplo de la métrica euclidiana. Por lo tanto, ambos enlaces estarán relacionados por una similitud euclidiana.

Por otro lado, si tenemos dos tetraedros con dos vértices con la misma clase de similaridad euclidiana en los respectivos enlaces, entonces, aplicando una isometría en cada tetraedro, podemos suponer que ambos vértices son $\infty \in \partial_\infty(\mathbb{H}^3)$. Nos fijamos en los otros tres vértices, que están en el plano $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Como los enlaces tienen la misma clase de similaridad euclidiana, existe una similaridad euclidiana en dicho plano que envía los tres vértices de un tetraedro a los tres vértices del otro tetraedro. Acabamos de definir una similaridad, que en particular es una transformación de Möbius en la frontera del infinito, por lo que extiende a una única isometría de \mathbb{H}^3 . ■

Consecuentemente, si somos capaces de parametrizar triángulos euclidianos, seremos capaces de parametrizar tetraedros salvo similaridad. Dado un triángulo euclidiano, $\Delta(u, v, w) \subset \mathbb{C}$, de vértices u, v y w , asociamos a cada uno de los vértices la razón entre los dos lados adyacentes:

$$z(u) = \frac{w - u}{v - u}, \quad z(v) = \frac{u - v}{w - v}, \quad z(w) = \frac{v - w}{u - w}.$$

Estas razones se denominan *invariantes de los vértices*. Es inmediato comprobar que únicamente dependen de la clase de similaridad euclidiana. Cada uno de los invariantes de vértice determina los otros dos,

$$z(v) = \frac{1}{1 - z(u)}, \quad z(w) = \frac{z(u) - 1}{z(u)},$$

y tienen la propiedad de que el producto es $z(u)z(v)z(w) = -1$.

Si aplicamos una similaridad euclídea que envíe u a 0 y v a 1, entonces w será enviado a $z(u)$.



Figura 15: Podemos aplicar una similaridad para enviar un triángulo a otro.

Teorema 15. *Sea T un tetraedro ideal. Entonces, T está determinado salvo isometría por los tres ángulos diedrales α, β, γ incidentes a un vértice v y $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Además, los ángulos diedrales de aristas opuestas coinciden.*

Demostración. La clase de T viene determinada, salvo isometría, por la clase de similaridad de $L(v)$, donde v es un vértice cualquiera de T . Esta, a su vez, viene determinada por los ángulos de $L(v)$, que coinciden con los ángulos diedrales, lo cual demuestra también que su suma es π .

Por otro lado, si denotamos a los ángulos diedrales por $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = 1, 2$, donde tener la misma letra pero distinto subíndice indica que son de aristas opuestas, tenemos cuatro ecuaciones, una por cada vértice, del tipo $\alpha_i + \beta_j + \gamma_k = \pi$, para ciertos $i, j, k \in \{1, 2\}$. Resolviendo el sistema de ecuaciones, se concluye que $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$ y $\gamma_1 = \gamma_2$. ■

A continuación, consideramos los cuatro enlaces de vértice posibles en el tetraedro. Orientamos cada enlace siguiendo la regla de la mano derecha apuntando hacia el vértice del cual es enlace. De este modo, tenemos tres invariantes z_1, z_2, z_3 por cada enlace. A cada una de las tres aristas que acaban en el vértices le asignamos el invariante $z_i, i = 1, 2, 3$, correspondiente. Llamamos a este invariante *invariante de arista*. El anterior teorema implica que aristas opuestas tienen el mismo invariante. Asimismo, recordemos que, partiendo de cualquiera de los invariantes de vértice, se pueden obtener los otros dos. De este modo, podemos parametrizar el tetraedro mediante un único invariante $z_i, i = 1, 2, 3$, cualquiera y obtener todos los invariantes de arista a partir de él.

Algunas referencias sobre cómo parametrizar los tetraedros las encontramos en [1, 10, 13].

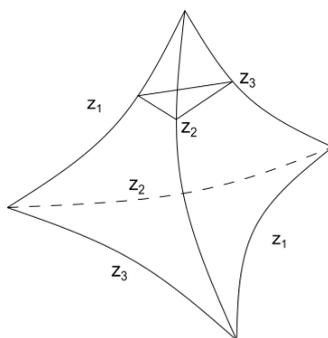


Figura 16: Invariantes de arista.

4. El espacio de deformaciones

En esta sección definiremos el espacio de deformaciones de una variedad M partiendo de una parametrización de una triangulación ideal de M . No nos planteamos cómo obtener esta triangulación o si existe en un principio. De hecho, es un problema abierto si estas triangulaciones ideales existen para todas las variedades con las que estamos trabajando (hiperbólicas, completas, orientables de volumen finito). No obstante, como ya hemos mencionado con anterioridad, se conocen triangulaciones ideales para muchas familias de variedades hiperbólicas. Asimismo, esta cuestión se puede sortear permitiendo tetraedros degenerados sin volumen, pero no ahondaremos en ello y asumiremos de aquí en adelante la existencia de triangulaciones ideales.

Algunas buenas referencias son [1, 7] y, para el caso particular del nudo del 8, [10, 13].

4.1. Ecuaciones de compatibilidad

Teorema 16 (rigidez de Mostow-Prasad). *Sea $n \geq 3$ y sean M_1, M_2 n -variedades hiperbólicas, completas, conexas, orientables y de volumen finito. Si existe un isomorfismo $f: \pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2)$, entonces está inducido por una única isometría de M_1 a M_2 .*

El teorema de rigidez de Mostow-Prasad implica que la estructura hiperbólica completa es única. Si hubiera dos, la identidad sería un isomorfismo entre los grupos fundamentales y, aplicando el teorema, las estructuras serían isométricas. También tiene como consecuencia que todo invariante de la métrica hiperbólica es un invariante de la variedad topológica.

Una vez que tenemos la triangulación por un número finito de tetraedros $\{\Delta_i\}$ ideales de la variedad completa, fijamos una arista de cada tetraedro, e_i , y consideramos su invariante de arista, que denotamos z_i^0 (el superíndice indicando que es el de la variedad completa). Cuando modifiquemos los tetraedros, si obtenemos una nueva estructura hiperbólica, esta no puede ser completa por el teorema de rigidez (o sería isométrica a la original).

La condición para obtener una variedad hiperbólica al pegar los tetraedros es que en cada punto exista un entorno que sea isométrico a una bola del espacio hiperbólico. En el interior de los tetraedros y en las caras esta condición se cumple de manera inmediata, puesto que el pegado es mediante isometrías. La complicación radica en que la condición se cumpla en las aristas.

Fijemos primero algo de notación. El pegado de las caras nos induce un pegado en las aristas y otro en los vértices. Denotamos a la clase de equivalencia de una arista, *ciclo de arista*, $[e]$, y a la del vértice, *punto cúspide*, $[v]$. También tenemos un pegado de los enlaces de todos los vértices pertenecientes a un mismo punto cúspide, denotamos a la superficie final, *enlace del punto cúspide* v , $L[v] = L(v_i) / \sim$, donde $v_i \in [v]$. Calculando la característica de Euler-Poincaré, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 17 ([10, 10.2.1]). *Si M es orientable, $L[v]$ es un toro.*

Estos toros de los enlaces están relacionados con los toros periféricos que mencionábamos al final de la sección 2.2.

Un argumento de característica de Euler-Poincaré también nos permite afirmar que el número de ciclos de arista es igual al número de tetraedros. Veamos geoméricamente que se tiene que cumplir para obtener una estructura hiperbólica.

Consideramos un ciclo de arista $[e] = \{e_1, \dots, e_n\}$ y denotamos al invariante de cada arista en el ciclo por $z(e_i)$. Supongamos que los tetraedros se pegan alrededor de la arista en el orden indicado por el subíndice, es decir, si comenzamos por el tetraedro Δ_{j_1} al que le corresponde e_1 , el siguiente tetraedro que se pega a Δ_{j_1} será el que contiene la arista e_2 , Δ_{j_2} , y así sucesivamente. Nótese que un mismo tetraedro puede aparecer más de una vez en el proceso, identificado por aristas distintas. Podemos asumir que el primer tetraedro está en \mathbb{H}^3 de tal manera que la arista e_1 es una arista vertical, con extremos 0 y ∞ , y los otros dos vértices son 1 y $z(e_1)$ y comenzar el pegado. Tras acabar la identificación, consideramos $L(\infty)$ de cada tetraedro, de tal manera que se escojan todas las horoesferas a la misma altura. Entonces, hay una bola del espacio hiperbólico alrededor de cada punto de la arista si y solo si el pegado de los enlaces $L(\infty)$ empieza y acaba en el mismo punto y solo da una vuelta alrededor de la arista (figura 17). Estas condiciones, en términos de los invariantes de arista, son

$$(3) \quad \prod_{i=1}^n z(e_i) = 1,$$

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n \arg(z(e_i)) = 2\pi.$$

A estas ecuaciones se las denomina *ecuaciones de compatibilidad*.

Teorema 18 ([10, 10.5.3]). *La variedad topológica con parámetros (z_1, \dots, z_n) admite una estructura hiperbólica si y solo si se cumplen las ecuaciones de compatibilidad (3) y (4) en cada ciclo de arista.*

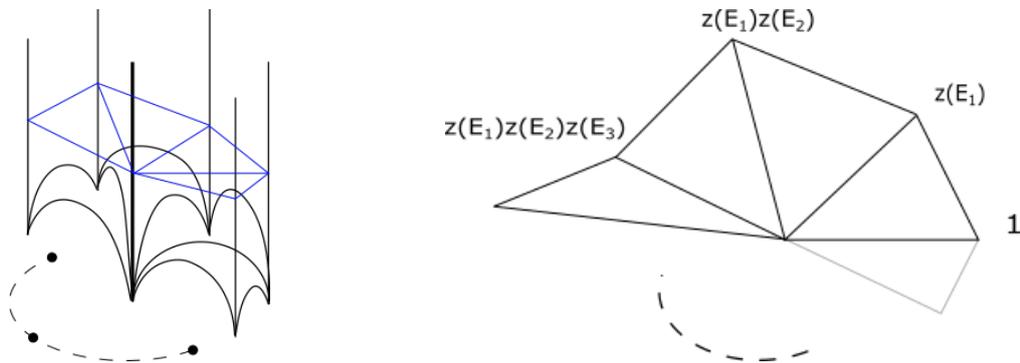


Figura 17: La condición geométrica se traduce utilizando invariantes de arista.

Definición 19. Sea M una variedad hiperbólica, completa, conexa, orientable y de volumen finito. Sea $\Delta = \{\Delta_i\}$ una triangulación ideal de M y sean (z_i^0) los parámetros correspondientes a la estructura completa. Se define el espacio de deformaciones respecto a la triangulación Δ como

$$Def(M, \Delta) := \{(z_1, \dots, z_n) \in U \cap \mathbb{C}^k \text{ satisfaciendo las ecuaciones de compatibilidad}\},$$

donde U es un entorno suficientemente pequeño de los parámetros (z_1^0, \dots, z_n^0) que dan lugar a la estructura completa. ◀

Nótese que, en un entorno suficientemente pequeño de los parámetros de la variedad completa, (z_i^0) , el cumplimiento de (3) implica automáticamente (4).

Debido al tipo de ecuación que tenemos, nuestro espacio de estudio es un subconjunto algebraico de \mathbb{C}^n , pero en principio no sabemos qué dimensión tiene. No obstante, debido a la teoría de variedades hiperbólicas tridimensionales, podemos afirmar que los puntos del espacio de deformaciones que dan lugar a una estructura completa son aislados, así que, tomando un entorno suficientemente pequeño, podemos afirmar que en $Def(M, \Delta)$ todas las estructuras son no completas a excepción de (z_i^0) [1, E.6.16].

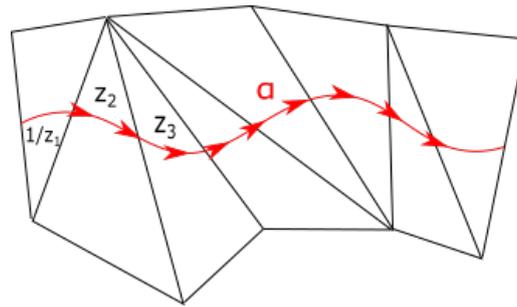


Figura 18: Derivada de la holonomía de α .

4.2. Holonomía y el resultado

El objetivo de esta última subsección es ver los resultados que desembocan en el teorema de Thurston, que resuelve el problema sobre la dimensión del espacio de deformaciones. Para ello, reparametrizaremos el espacio de deformaciones mediante la holonomía de la estructura. Además, uno de los problemas que tiene la definición del espacio de deformaciones es que no hay ninguna manera sencilla de identificar los parámetros de la estructura completa (z_i^0) dentro de todas las soluciones a las ecuaciones de compatibilidad. Como resultado adicional, obtenemos que, en la nueva parametrización que daremos, la estructura completa es un punto muy particular.

Vimos antes que en una variedad orientable el enlace de un punto cúspide, $L[v]$, es un toro, $(L[v]/\sim) \simeq T^2$. Vamos a definir un morfismo de grupos de $\pi_1(T^2)$ a \mathbb{C}^* . Para ello, nos centramos en un punto cúspide, $[v]$, y su enlace, y tomamos la triangulación del toro inducida por los enlaces de los vértices. Para cada lazo $\alpha \in \pi_1(T^2)$, tomamos un representante que no pase por ningún vértice de la triangulación y el paso por cada triángulo sea de tal manera que lo divida en dos, dejando uno de los vértices a un lado. Cada vértice aislado, v_i , tiene un invariante de vértice z_i . Se define la *derivada de la holonomía* en el toro $L[v]$ del siguiente modo:

$$(5) \quad \begin{aligned} H' : \pi_1(T^2) &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ [\alpha] &\longmapsto H'([\alpha]) = \prod z_i^{\epsilon_i}, \end{aligned}$$

donde $\epsilon_i = 1$ si α deja el vértice aislado a la izquierda, $\epsilon_i = -1$ si lo deja a la derecha.

Fijamos ahora en cada enlace de punto cúspide, $L[v_i] \simeq T_i^2$, una longitud y un meridiano, denotados l_i, m_i , respectivamente. El siguiente teorema nos permite identificar los parámetros de la estructura completa.

Teorema 20 ([1, E.6.17]). *M es completa si y solo si $H'([l_i]) = 1$ para todo $i = 1, \dots, k$, donde k es el número de puntos cúspide. Equivalentemente, si y solo si $H'([m_i]) = 1$, para todo $i = 1, \dots, k$.*

La idea detrás de este resultado es que la variedad es completa exactamente cuando, en la elección de cada enlace de vértice, podemos escoger horoesferas de manera coherente. Con coherente queremos decir que podemos hacer una única elección para cada enlace, de tal manera que el pegado se pueda hacer sin reescalados. En la figura 19, podemos ver la situación análoga en dimensión 2 para una métrica no completa. En lugar de un toro, tenemos una circunferencia como enlace del punto cúspide $[v]$. La elección de horociclo (análogo de la horoesfera en dimensión 2) no se puede hacer de manera coherente: al comenzar por uno cualquiera y dar una vuelta por el enlace, no volvemos al horociclo original, sino que hacemos una espiral. La derivada de la holonomía calcula si al seguir un lazo hay un cambio en la métrica (hemos cambiado de horoesfera) o no (seguimos en la misma). Si ha habido un cambio, *i.e.*, $H'([\alpha]) \neq 1$, no se pueden tomar horoesferas coherentemente y la estructura no es completa.

Teorema 21 ([1, E.6.19]). *El espacio de deformaciones de M tiene dimensión k, donde k es el número de puntos cúspide.*

La demostración del resultado es muy técnica y viene de involucrar las $2k$ ecuaciones de la derivada de la holonomía de longitudes y meridianos en la estructura completa, para acabar demostrando que el rango de nuestras ecuaciones es $n - k$.

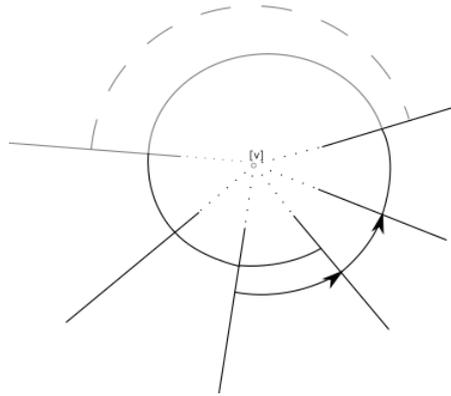


Figura 19: Horociclos entorno a $[v]$ con estructura no completa.

Finalizamos enunciando sin demostrar las proposiciones que permiten demostrar el teorema.

Proposición 22 ([1, E.6.18]). *La imagen de las aplicaciones*

$$\begin{aligned} (z_1, \dots, z_n) \in \text{Def}(M, \Delta) &\longmapsto (H'(l_i))_{i=1, \dots, k}, \\ (z_1, \dots, z_n) \in \text{Def}(M, \Delta) &\longmapsto (H'(m_i))_{i=1, \dots, k} \end{aligned}$$

cubre cada una un entorno de $\{1, \dots, 1\} \in \mathbb{C}^k$.

Dado $z \in \text{Def}(M, \Delta)$, denotamos $u_i(z) := \log(H'(l_i))$ y $v_i(z) := \log(H'(m_i))$, dando lugar a un resultado similar al anterior.

Proposición 23 ([1, E.6.21]). *La imagen de las aplicaciones*

$$\begin{aligned} (z_1, \dots, z_n) \in \text{Def}(M, \Delta) &\longmapsto (u_i)_{i=1, \dots, k}, \\ (z_1, \dots, z_n) \in \text{Def}(M, \Delta) &\longmapsto (v_i)_{i=1, \dots, k} \end{aligned}$$

cubre cada una un entorno de $\{0, \dots, 0\} \in \mathbb{C}^k$.

Por último, dados u_i, v_i , planteamos la ecuación

(Ecuación de Dehn)
$$p_i u_i + q_i v_i = 2\pi i,$$

con $(p_i, q_i) \in \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Así obtenemos el resultado de Thurston.

Teorema 24 ([1, E.6.23; 7, §4]). *La aplicación $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (p_i(z), q_i(z))_{i=1, \dots, k}$ es un difeomorfismo local con $(\infty, \dots, \infty) \in \overline{\mathbb{C}}^k$.*

Para demostrar la parte del difeomorfismo local, hacemos uso del teorema de inversión local: calculamos el Jacobiano de la aplicación y lo evaluamos en (z_j^0) , obteniendo que es distinto de 0.

Como consecuencia de este resultado, se puede ver cuál es la completación métrica de las nuevas estructuras hiperbólicas encontradas. Por ejemplo, si alguno de los p_i/q_i es irracional, la completación no es ni siquiera variedad. Sin embargo, cuando p_i y q_i son enteros coprimos (salvo algunas excepciones), la completación también tiene una estructura hiperbólica. A este resultado se le conoce como teorema de *cirujía de Dehn* hiperbólica [1, E.6.27], debido a que la construcción de la completación se puede realizar mediante la técnica homónima, aunque en este caso, el término *Dehn filling* es más apropiado. En otras palabras, el resultado afirma que casi todo Dehn filling es hiperbólico.

El resultado anterior permite encontrar sucesiones no triviales de variedades hiperbólicas completas con límite la original. Para ello escogemos enteros coprimos $(p_i, q_i) \rightarrow \infty$ y completamos las respectivas métricas. La existencia de estas sucesiones de variedades hiperbólicas completas es un fenómeno único de la dimensión 3.

Referencias

- [1] BENEDETTI, Riccardo y PETRONIO, Carlo. *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1992.
- [2] BROWDER, Felix, ed. *The Mathematical Heritage of Henri Poincaré*. Vol. 39.2. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1983. <https://doi.org/10.1090/pspum/039.2>.
- [3] DIEUDONNÉ, Jean. *A history of algebraic and differential topology, 1900-1960*. Modern Birkhäuser classics. Boston: Birkhäuser, 2009. ISBN: 9780817649067.
- [4] EPSTEIN, David y PETRONIO, Carlo. «An exposition of Poincaré's polyhedron theorem». En: *L'enseignement Mathématique* 40 (1994), págs. 113-170.
- [5] MILNOR, John. «Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds.» En: *Notices Amer. Math. Soc.* 50 (2003), págs. 1226-1233.
- [6] MILNOR, John W. «Hyperbolic geometry: The first 150 years». En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 6.1 (1982), págs. 9-25. ISSN: 0273-0979. <https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1982-14958-8>.
- [7] NEUMANN, Walter D. y ZAGIER, Don. «Volumes of hyperbolic three-manifolds». En: *Topology* 24 (1985), págs. 307-332.
- [8] POINCARÉ, H. «Sur l'uniformisation des fonctions analytiques». En: *Acta Mathematica* 31.0 (1908), págs. 1-63. ISSN: 0001-5962. <https://doi.org/10.1007/BF02415442>.
- [9] PURCELL, Jessica. *Hyperbolic Knot Theory (notes)*. Monash University. URL: <http://users.monash.edu/~jpurcell/papers/hyp-knot-theory.pdf> (visitado 15-11-2019).
- [10] RATCLIFFE, John G. *Foundations of hyperbolic manifolds*. Springer, 2011.
- [11] RILEY, Robert. «Discrete parabolic representations of link groups». En: *Mathematika* 22 (1975), págs. 141-150.
- [12] THURSTON, William P. «Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry». En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 6.3 (1982), págs. 357-382. ISSN: 0273-0979. <https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1982-15003-0>.
- [13] THURSTON, William P. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*. URL: <http://library.msri.org/books/gt3m/>.

Números de Milnor en la imagen, puntos múltiples y familias de aplicaciones holomorfas

✉ Roberto Giménez Conejero
Universitat de València
roberto.gimenez@uv.es

Resumen: Como parte de mi tesis doctoral, Juan José Nuño Ballesteros y yo hemos probado una conjetura, enunciada por K. Houston, sobre familias de desdoblamientos excelentes y encontrado una familia pequeña de invariantes para caracterizar la equisingularidad de Whitney, entre otras cosas, siempre en corango uno. Se darán las definiciones básicas y una pequeña guía por nuestro proceso desde nuestro planteamiento inicial hasta nuestro trabajo más actual.

Abstract: As a part of my PhD thesis, Juan José Nuño Ballesteros and I have proved a conjecture, stated by K. Houston, about excellent unfoldings, and we have found a small family of invariants to characterize the Whitney equisingularity, among other things, in corank one. I will give basic definitions and a little guide through our process, from our initial thoughts to our most recent work.

Palabras clave: número de Milnor, desdoblamientos excelentes, puntos dobles, equisingularidad.

MSC2010: 55G37, 55G99, 57D45, 55D99, 58Exx, 58F99.

Agradecimientos: Financiado por ayuda de contrato predoctoral del Ministerio de Educación y Formación profesional FPU16/03844.

Referencia: GIMÉNEZ CONEJERO, Roberto. «Números de Milnor en la imagen, puntos múltiples y familias de aplicaciones holomorfas». En: *TEMat monográficos*, 3 (2021): *Actas del VIII Encuentro de Jóvenes Topólogos*, págs. 57-67. ISSN: 2660-6003. URL: <https://temat.es/monograficos/article/view/vol3-p57>.

© Este trabajo se distribuye bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento 4.0 Internacional <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

1. Introducción

Milnor [22] probó que si una aplicación holomorfa $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ tiene un punto crítico aislado en 0, entonces, para un t de módulo pequeño, $f^{-1}(t)$ en una bola lo suficientemente pequeña tiene el tipo de homotopía de un *wedge* de n -esferas y su número de esferas no depende del t escogido. A este número ahora se le llama *número de Milnor de f* , $\mu(f)$. En adelante, toda aplicación es holomorfa salvo que se diga lo contrario.

Esto abrió multitud de frentes de investigación y motivó, en lugar de estudiar preimágenes de aplicaciones y sus singularidades, estudiar directamente las aplicaciones. Ahora bien, tomar un valor t de módulo pequeño en aplicaciones no tiene sentido si lo que miramos no son necesariamente antiimágenes sino la aplicación en sí. Dado que distintos conjuntos de nivel cercanos de una función pueden entenderse intuitivamente como una deformación los unos de los otros, tiene también sentido fijarse en deformaciones o *perturbaciones* de una $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$. No obstante, antes aparecía un entorno donde mirar lo que ocurre al mencionar una bola lo suficientemente pequeña. Esto último no tiene sentido, de nuevo, al hablar de una aplicación. Si antes el concepto análogo de conjuntos de nivel cercanos era *perturbaciones* de una aplicación, ahora el análogo a la *bola lo suficientemente pequeña* será germen de una aplicación estable. Un germen, $f : (X, S) \rightarrow (Y, 0)$, no es más que una clase de equivalencia bajo la relación $f_1 \sim f_2$ si existe un entorno de S donde las aplicaciones sean iguales. Además, en lo sucesivo, S será un conjunto de puntos finito y, cuando solo sea un punto, escribiremos simplemente 0.

Volviendo al término *perturbación*, esto no es más que tomar d parámetros $t \in \mathbb{C}^d$ y una familia $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^d, 0)$ tal que $F(x, t) = (f_t(x), t)$ y $f_0 = f$. A estas f_t se las llama *perturbaciones* de f y a la familia también se le llama *desdoblamiento*, sean las deformaciones estables o no. Esta última definición viene del inglés *unfolding*, y probablemente tenga más que ver con descubrir o revelar que con desdoblar. Un ejemplo sería $F(x, t) = (x^2, x^3 + tx, t)$, donde $d = 1$, $f_0(x) = (x^2, x^3)$ y una perturbación suya sería $f_t(x) = (x^2, x^3 + tx)$ con t no nulo.

Dando un enorme salto histórico y matemático llegamos a dos definiciones fundamentales para el caso de (gérmenes de) aplicaciones $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Hablemos primero de la \mathcal{A}_e -codimensión para luego hablar del *número de Milnor en la imagen*:

$$\begin{aligned} \text{codim}_{\mathcal{A}_e} f &:= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\theta(f)}{T_{\mathcal{A}_e} f} = \frac{\left\{ \frac{\partial}{\partial t} f_t \Big|_{t=0} : f_0 = f \right\}}{\left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\psi_t \circ f \circ \phi_t^{-1}) \Big|_{t=0} : \phi_0 = \text{id}, \psi_0 = \text{id} \right\}} \\ &= \frac{\theta(f)}{tf(\theta_n) + \omega f(\theta_p)}, \end{aligned}$$

donde la última expresión es la común dada en el área. La intuición sobre qué es este cociente se puede obtener por la penúltima expresión, aunque en la práctica se usa la última. Los elementos que aparecen en esta son

- $\theta(f)$, gérmenes de campos vectoriales sobre f ;
- θ_M , gérmenes de campos vectoriales en \mathbb{C}^M ;
- tf , la post-composición con la diferencial de f , y
- ωf , la pre-composición con f .

Esta definición se puede generalizar para otras dimensiones de la forma obvia, aunque no aparezca en este texto. Además este invariante algebraico cobra importancia después de que Mather [18] probase que, si $\text{codim}_{\mathcal{A}_e} f = 0$, entonces cualquier deformación para un parámetro t pequeño en realidad no deforma nada (módulo biholomorfismos en dominio y codominio) y viceversa. En esta situación se dice que f es *estable*. En la figura 1 se muestra un ejemplo para ayudar a construir la intuición.

En general, puede ocurrir que haya perturbaciones de f con t tan pequeño como queramos tales que f_t tiene $\text{codim}_{\mathcal{A}_e} f_t = 0$ (hay dimensiones donde esto pasa siempre, las *nice dimensions* de Mather [20]) y, al igual que antes mirábamos valores regulares de una función, ahora nos fijamos en este germen para hablar de topología. Si estudiamos estos gérmenes $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ y miramos la imagen de una

perturbación que sea estable, su tipo de homotopía en una bola pequeña también es el de un *wedge* de n -esferas (cf. [34]), y el número de esferas no depende de la perturbación estable. A la cantidad de esferas en este caso se la llama número de Milnor en la imagen, $\mu_I(f)$.

Por construir una intuición, los gérmenes estables de \mathbb{C}^2 a \mathbb{C}^3 son los siguientes y ninguno tiene número de Milnor positivo:

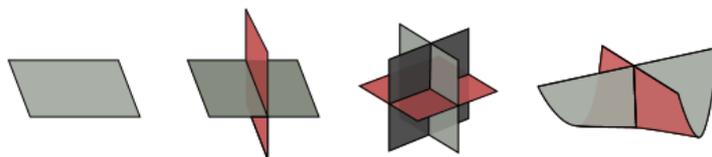


Figura 1: Todas las singularidades estables de \mathbb{C}^2 a \mathbb{C}^3 . De izquierda a derecha: inmersión, puntos dobles transversos, puntos triples transversos y *cross-cap*.

El lector entenderá que muchos conceptos básicos queden ocultos; para una mejor introducción al tema en cuestión véase [23], por ejemplo, o, con detalles, la serie de artículos de Mather [15-20].

2. Motivación histórica

En 1971, Oscar Zariski [39] demostró lo siguiente.

Teorema 1. *Supongamos que tenemos una familia a un parámetro de curvas planas, parametrizadas como la imagen del desdoblamiento $F: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, S \times \{0\}) \rightarrow (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0)$, i.e., cada curva está parametrizada por f_t , donde $F(x, t) = (f_t(x), t)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *El número de Milnor es constante en la familia.*
- (ii) *Hay singularidad aislada uniformemente en la familia.*
- (iii) *La familia es topológicamente trivial.*
- (iv) *La familia es Whitney equisingular.*

De hecho, número de Milnor de las curvas constante implica que $\mu_I(f_t)$ es constante, y cualquiera de ellas implica multiplicidad constante. Las tres últimas condiciones se comentarán a final del texto; se recomienda al lector volver una vez se haya leído las respectivas definiciones, aunque no son necesarias para seguir el hilo de la motivación.

Algo natural sería plantearse lo mismo para familias a un parámetro de \mathbb{C}^n a \mathbb{C}^{n+1} en general y, como era de esperar, la dificultad es muchísimo mayor. Denotemos por X_t las imágenes de f_t y hagamos un pequeño recorrido esquemático (no exhaustivo del todo) en los avances sobre esta cuestión para el caso de superficies, i.e., $F: (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, S \times \{0\}) \rightarrow (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$:

- Gaffney [4] probó en 1993 que F es *Whitney equisingular* si y solo si el número de Milnor de la curva de puntos dobles, $\mu(D_t)$, $m_1(X_t)$ y $m_0(\sigma_t)$ (dos invariantes algebraicos) son constantes.
- Fernández de Bobadilla y Pe Pereira [3] en 2008 y Callejas-Bedregal, Houston y Ruas [1] probaron que $\mu(D_t)$ es constante si y solo si F es *topológicamente trivial*.
- Estos últimos conjeturaron que F es *topológicamente trivial* si y solo si F es *Whitney equisingular*.
- Ruas y Silva [29] en 2016 demostraron que la conjetura era falsa.
- Marar, Nuño-Ballesteros y Peñafort-Sanchis [13] en 2012 probaron que F es *Whitney equisingular* si y solo si $\mu(D_t)$ y $\mu(X_t \cap H)$, el número de Milnor de $X_t \cap H$, son constantes para un plano genérico H .

En conclusión, el enunciado del teorema de Zariski ya deja de ser cierto para la siguiente dimensión, $n = 2$. Esto nos da todo un camino que trabajar, cuya dificultad parece ser inversamente proporcional a la cantidad de avances en estos casi 40 años. Hasta ahora hemos trabajado la implicación sobre que número de Milnor en la imagen constante implica singularidad aislada uniforme y la cuestión de si algunos invariantes topológicos son constantes entonces implican *Whitney equisingularidad*.

3. Conjetura de Houston

La conjetura de Houston sobre familias excelentes (en el sentido de Gaffney, cf. definición 10) tiene que ver con familias de gérmenes $f_t : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ de corrancho 1 y su comportamiento topológico como familia. Hagamos un recorrido por los principales resultados que utilizamos para probarla para, así, ir construyendo una intuición cada vez mejor sobre lo que versa la conjetura.

Un primer resultado que probamos en general fue el de la conservación del número de Milnor en la imagen, *i.e.*, si perturbamos un germen, f , y lo que queda no es estable, f_t , podemos volver a perturbar f_t para obtener algo estable, $f_{t,s}$ (véase la figura 2). ¿Cuál es la relación entre $\mu_I(f)$ y $\mu_I(f_t)$? Podría ocurrir que en la imagen de f_t haya aparecido homología, lo que nosotros probamos es que la homología que ha aparecido más $\mu_I(f_t)$ (la homología que *queda por aparecer*) es $\mu_I(f)$ (la *homología total*). Para expresar resultados al respecto formalmente hace falta la condición técnica de *nice dimensions*, que puede verse en [20]. Con ello, tenemos lo siguiente.

Teorema 2. *Sea $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ de \mathcal{A}_e -codimensión finita, $(n, n + 1)$ nice dimensions, y f_u una deformación de $f = f_0$ a un parámetro. Tómese un representante de la deformación tal que su codominio V es una bola de Milnor. Entonces,*

$$\mu_I(f) = \dim_{\mathbb{C}} H^n(X_u, \mathbb{C}) + \sum_{y \in V} \mu_I(f_u, y),$$

donde X_u es la imagen de cada f_u una vez se ha tomado un representante.

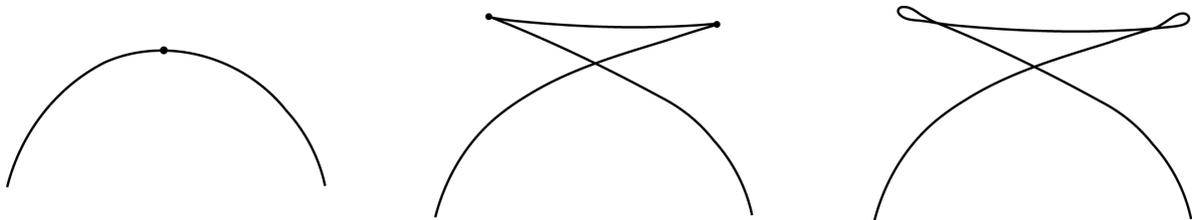


Figura 2: Una *representación real* de la conservación del número de Milnor en la imagen con deformaciones consecutivas de un germen, de izquierda a derecha.

En la anterior figura 2 hemos visto una *representación real* de lo que ocurre con una singularidad. Si observamos otra en dos dimensiones (figura 3), vemos elementos comunes: hay *puntos múltiples*. Hay puntos donde la imagen se cruza consigo misma varias veces, y parece que tiene que ver con la aparición de homología. Esto motiva definir el espacio de puntos múltiples, estudiar qué ocurre con ellos y su relación con el número de Milnor en la imagen.

Definición 3. • Para $f : X \rightarrow Y$ estable, X e Y abiertos, *el espacio de puntos múltiples de f , $D^k(f)$, es la clausura de Zariski del conjunto de puntos $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$ tales que $f(x_j) = f(x_i)$ para todo i, j pero $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$.*

- Para $f : (\mathbb{C}^n, \underline{z}) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ finita y $F : (\mathbb{C}^{n+q}, \underline{z} \times \{0\}) \rightarrow (\mathbb{C}^{p+q}, 0)$ desdoblamiento con $F(x, \lambda) = (f_\lambda(x), \lambda)$, *el espacio de puntos múltiples de f es*

$$D^k(f) = D^k(F) \cap \{\lambda = 0\}$$

como gérmenes de espacios complejos. ◀

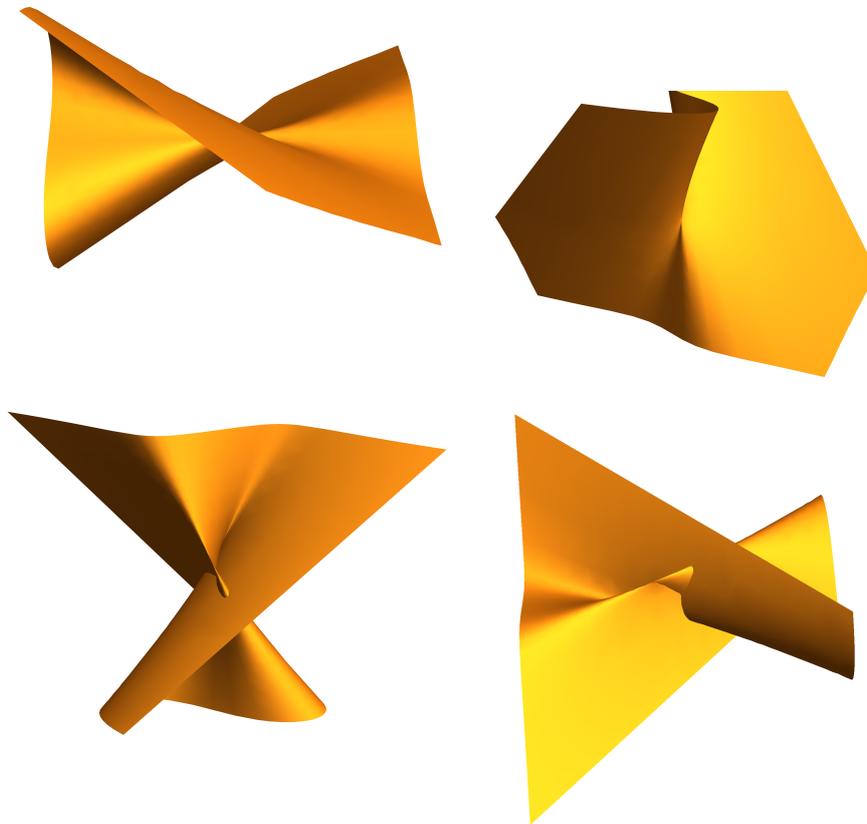


Figura 3: Representación real de una singularidad sin estabilizar (arriba) y estabilizada (abajo) de \mathbb{C}^2 en \mathbb{C}^3 .

El estudio de estos espacios tiene grandes recompensas. Para empezar, caracterizan propiedades de gérmenes.

Teorema 4 (Marar y Mond [14]). Sea $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, $n < p$, un germen de corrancho finito. Entonces,

- (i) f tiene \mathcal{A}_e -codimensión finita si y solo si, para cada k con $p - k(p - n) \geq 0$, $D^k(f)$ es o una intersección completa y singularidad aislada (ICIS) de dimensión $p - k(p - n)$ o vacía y si, además, para aquellos k tales que $p - k(p - n) < 0$, $D^k(f)$ es a lo sumo el punto $\{0\}$.

Y, después de estudiar una sucesión espectral adecuada (cf. [6, 9]), hay una definición y un resultado inmediatos.

Definición 5. Los números de Milnor k -alternados de f , denotados por $\mu_k^{\text{Alt}}(f)$, se definen como

$$\mu_k^{\text{Alt}}(f) = \begin{cases} \dim \text{Alt}_k H^{n+1-k+1}(D^k(F), D^k(\tilde{f}), \mathbb{Q}) & \text{si } k \leq d(f), \\ \left| \sum_{l=d(f)+1}^s (-1)^l \binom{s(f)}{l} \right| & \text{si } k = d(f) + 1 \text{ y } s(f) > d(f), \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde $s(f)$ es el número de puntos en $f^{-1}(0)$, $d(f) = \sup\{k | D^k(\tilde{f}) \neq \emptyset\}$, se toma la parte alternada de la homología (i.e., los elementos donde la acción evidente en $D^k(f)$ de cualquier permutación de k elementos actúa por el signo), y \tilde{f} es una perturbación estable de f . ◀

Proposición 6 ([10]). *Si f es de corranjo 1,*

$$\mu_I(f) = \sum_k \mu_k^{\text{Alt}}(f).$$

Por lo tanto, una forma de atacar el cálculo de los números de Milnor es mediante la proposición 6. Esta idea nos permitió abordar la conjetura más importante del área en una versión más simple.

Para empezar, es natural preguntarse la relación entre el invariante topológico, $\mu_I(f)$, y el invariante algebraico, \mathcal{A}_e -codimensión, de f . De hecho, si se traducen nuestros elementos al contexto de hiper-superficies, trivialmente se obtiene que la traducción de $\mu_I(f)$ es mayor o igual que la traducción de la \mathcal{A}_e -codimensión, con igualdad en el caso casihomogéneo (número de Milnor y número de Tjurina, respectivamente). Además, para gérmenes de \mathbb{C}^n a \mathbb{C}^p con $n \geq p$ se tiene que el primero es mayor o igual al segundo y son iguales en el caso casihomogéneo (cf. [2]). Es natural preguntarse por la siguiente conjetura, probada para $n = 1, 2$ pero abierta en general, llamada conjetura de Mond.

Conjetura 7 (Mond). *Sea $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ germen con \mathcal{A}_e -codimensión finita y $(n, n + 1)$ nice dimensions. Entonces, $\mu_I(f) \geq \mathcal{A}_e \text{codim}(f)$, con igualdad en el caso casihomogéneo.*

Un resultado que se creía cierto, pero ha resultado no ser en absoluto trivial, era que, si $\mu_I(f) = 0$, entonces f era estable o, lo que es lo mismo, que su \mathcal{A}_e -codimensión es 0. Esto cumpliría la conjetura de Mond y hemos conseguido probarlo, no sin esfuerzo, para corranjo 1.

Teorema 8 (Conjetura débil de Mond). *Para los gérmenes $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ de corranjo 1 y \mathcal{A}_e -codimensión finita, $\mu_I(f) = 0$ si y solo si f es estable.*

Otro resultado previo, que se prueba con los espacios de puntos múltiples, antes de la conjetura de Houston es el del aumento del número de Milnor en la imagen al añadir ramas (cf. figura 4). Nótese que también es bastante intuitivo, pero no trivial, dado que estamos buscando homología en dimensión real n dentro de un conjunto de dimensión real $2n$. La distinción entre monogérmes y multigérmes se ha omitido hasta ahora y se omitirá en adelante también en pro de facilitar la lectura.

Lema 9. *Sean $g : (\mathbb{C}^n, z) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ y $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ ambos de corranjo 1 y con \mathcal{A}_e -codimensión finita. Si $\mu_I(f, S) > 0$, entonces*

(1)
$$\mu_I(f, S) < \mu_I(\{f, g\}, S \sqcup z).$$

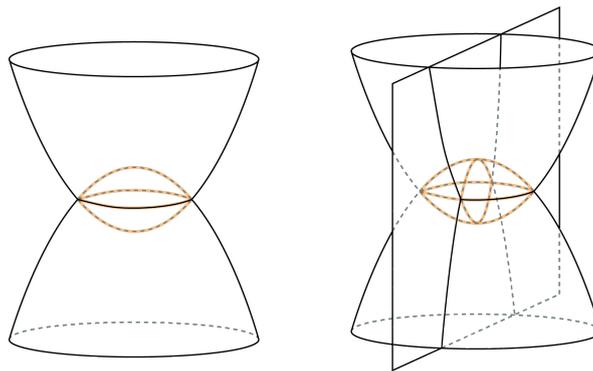


Figura 4: Representación real del aumento del número de Milnor en la imagen al añadir una rama.

Estos resultados han sido los necesarios para probar la conjetura de Houston sobre desdoblamientos excelentes en el sentido de Gaffney (definición 10). Para enunciarla correctamente es necesario entender que, dada una singularidad, a su alrededor hay una estratificación por tipos estables, i.e., cada estrato son todos los puntos que son iguales entre sí a efectos del germen (módulo biholomorfismos en dominio y codominio). Por ejemplo, no es lo mismo un punto inmersivo que un punto doble, estarán en estratos diferentes. Si juntamos una familia de gérmenes a un parámetro y miramos su estratificación por tipos

estables, es posible que haya un punto que forme un estrato en sí mismo y se aleje del origen conforme avanzamos en el parámetro de la familia (o desdoblamiento), intuitivamente es la diferencia entre las estratificaciones de la figura 5. A esto se le llama también *coalescencia*. Un desdoblamiento excelente es uno donde no hay coalescencia, entre otras cosas.

Definición 10. Supóngase que $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, $n < p$, es de corrancho 1 con \mathcal{A}_e -codimensión finita y que F es un desdoblamiento a un parámetro que *conserva el origen* (todo f_t lleva el cero en el cero). F es un *buen desdoblamiento* si hay un representante $F : U \rightarrow W \times T$ tal que

- (i) F es finito,
- (ii) $s(f_t)$ es constante, i.e., $F^{-1}(\{0\} \times T) = S \times T$ y
- (iii) f_t , como familia de F , tiene singularidad aislada uniformemente, i.e. f_t es estable en $W \setminus \{0\}$.

Si, además, f_t no tiene puntos 0-estables en $W \setminus \{0\}$, para todo $t \in T$ (sin coalescencia), entonces F es *excelente* (en el sentido de Gaffney). ◀

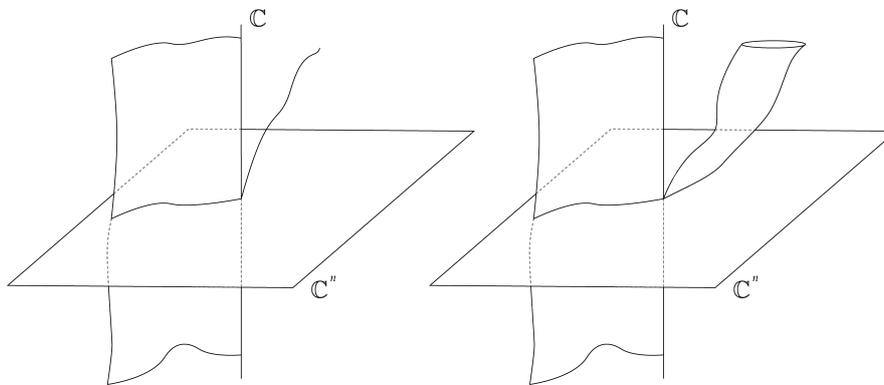


Figura 5: Comparación entre un desdoblamiento con coalescencia y otro sin coalescencia.

Houston [10, Conjecture 6.2] conjetura lo siguiente, lo cual hemos probado.

Teorema 11. Sean $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ un germen de corrancho 1 y con \mathcal{A}_e -codimensión finita y $F(x, t) = (f_t(x), t)$ un desdoblamiento a un parámetro que preserva el origen. Entonces, $\mu_1(f_t)$ constante implica F excelente.

Nuestra aportación a este resultado es eliminar hipótesis en un resultado del mismo Houston en el mismo artículo y dejar solo que el número de Milnor en la imagen sea constante. Por concretar más, la hipótesis de que sea un buen desdoblamiento y condiciones sobre $s(f_t)$ y $d(f_t)$.

Sobre la implicación contraria no hemos encontrado un contraejemplo que funcione. No obstante, sí tenemos un ejemplo de un germen que es excelente en los reales, no en los complejos, y cuya complejificación tiene número de Milnor en la imagen no constante (véase la figura 6).

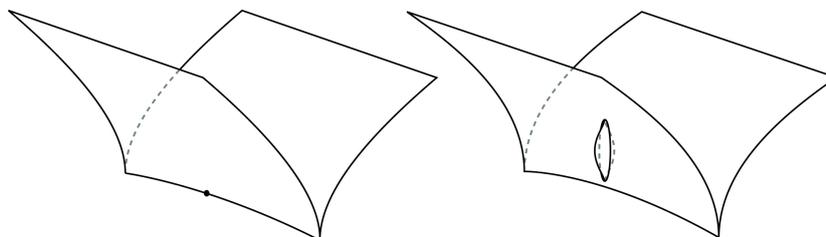


Figura 6: Representación real de f y una perturbación, de izquierda a derecha.

4. Equisingularidad de Whitney

Para la equisingularidad de Whitney hemos tenido que reconstruir todo un camino ya recorrido en parte por Mond y Montaldi [25] para estudiar gérmenes cuyo dominio es un ICIS y generalizar los resultados de Houston [10] y de Marar y Mond [14], entre otros desarrollos. De entre ellos destacan especialmente algunas cosas, como un nuevo invariante con propiedades interesantes.

Definición 12. Sean $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ un germen de corranjo 1 con \mathcal{A}_e -codimensión finita y D_s el locus de puntos dobles en el dominio de una perturbación estable f_s . El conjunto D_s tiene el tipo de homotopía de un *wedge* de $(n - 1)$ -esferas y su número es el número de Milnor de los puntos dobles, $\mu_D(f)$. ◀

Esto se puede entender como la proyección del espacio de puntos dobles al dominio, véase la figura 7, y por eso estudiamos gérmenes que salen desde un ICIS.

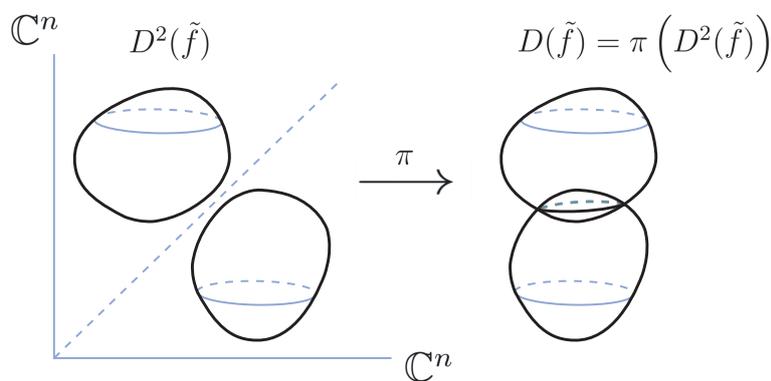


Figura 7: Representación de la proyección del espacio de puntos dobles al dominio y la aparición de homología.

Una propiedad muy interesante es que, sorpresivamente, también encaja con la conjetura débil de Mond.

Teorema 13. Para $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ de corranjo uno, \mathcal{A}_e -codimensión finita y $(n, n + 1)$ nice dimensions, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) f es estable.
- (ii) $\mu_I(f) = 0$.
- (iii) $\mu_D(f) = 0$.

Hablemos, por fin, de la equisingularidad de Whitney.

Definición 14. Sean $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ de corranjo uno, \mathcal{A}_e -codimensión finita y $(n, n + 1)$ nice dimensions, $F(x, t) = (f_i(x), t)$ un desdoblamiento a un parámetro de f , fíjese un representante de este, $F : U \rightarrow V \times T$ con $U \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, $V \subset \mathbb{C}^{n+1}$ y $T \subset \mathbb{C}$. En este caso, F es *Whitney equisingular* si la estratificación de F por tipos estables es una *estratificación de Thom* (i.e., Whitney b -regular en salida y llegada y, además, F es una aplicación de Thom, cf. [5]). ◀

En 1993, Gaffney [4] caracterizó la equisingularidad de Whitney como que todas las multiplicidades polares de todos los estratos de la estratificación por tipos estables en salida y llegada sean constantes. El problema con este resultado es que se necesita una cantidad enorme de invariantes (del orden de n^2) y, además, la hipótesis de que F es excelente, así que estudiamos un par de familias que reducen en un orden de magnitud el número de invariantes que hay que comprobar.

Definición 15. Dada una $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ de corranjo uno, \mathcal{A}_e -codimensión finita y $(n, n + 1)$ nice dimensions, la sucesión μ_I^* de f se define como

$$\mu_I^*(f) = (\mu_I^{(n+1)}(f), \dots, \mu_I^{(2)}(f)),$$

donde cada $\mu_I^{(i)}(f)$ se define como el número de esferas que aparecen en la intersección entre la imagen de la perturbación estable de f y un hiperplano genérico de dimensión i . ◀

De forma similar:

Definición 16. Dada una $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ de corrancho uno, \mathcal{A}_e -codimensión finita y $(n, n + 1)$ nice dimensions, la sucesión μ_D^* de f se define como

$$\mu_D^*(f) = (\mu_D^{(n)}(f), \dots, \mu_D^{(2)}(f)),$$

donde cada $\mu_D^{(i)}(f)$ se define como el número de esferas que aparecen en la intersección entre el locus de puntos dobles de la perturbación estable de f y un hiperplano genérico de dimensión i . ◀

Y, por fin, nuestro resultado principal:

Teorema 17. Sea $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ de corrancho uno, \mathcal{A}_e -codimensión finita y $(n, n + 1)$ nice dimensions. Sea $F(x, t) = (f_i(x), t)$ un desdoblamiento a un parámetro de f . Entonces, F es Whitney equisingular si y solo si $\mu_I^*(f_i)$ y $\mu_D^*(f_i)$ son constantes.

5. Trabajo futuro

Evidentemente, solo queda algo por cubrir en este sentido, que es la *trivialidad topológica*. Esta noción no quiere decir más que la estratificación por tipos estables es topológicamente trivial (cf. [5]) en salida y llegada y F es de Thom.

Probar algo al respecto en este contexto es muy complicado. Para el caso de hipersuperficies en \mathbb{C}^{n+1} está probado por Tráng y Ramanujam [35] en el 1976, pero para $n \neq 2$. Esta restricción viene de ser el único caso donde no hay teoremas de h -cobordismo y sigue abierta en la actualidad. En 43 años no se ha avanzado en esta cuestión gran cosa y para nuestro contexto no se puede aplicar el teorema de h -cobordismo, por lo menos con la misma idea, debido a la estratificación.

Esta cuestión la hemos intentado abordar de diferentes maneras, por ejemplo imitando la idea de Parusiński [28] con un campo vectorial, pero el campo resultante no era continuo. Cualquier sugerencia o idea es bienvenida.

Referencias

- [1] CALLEJAS-BEDREGAL, R.; HOUSTON, K., y RUAS, M. A. S. «Topological Triviality of Families of Singular Surfaces». En: *arXiv Mathematics e-prints* (2006). arXiv: math/0611699 [math.CV].
- [2] DAMON, James y MOND, David. « \mathcal{A} -codimension and the vanishing topology of discriminants». En: *Inventiones Mathematicae* 106.2 (1991), págs. 217-242. ISSN: 0020-9910. <https://doi.org/10.1007/BF01243911>.
- [3] FERNÁNDEZ DE BOBADILLA, Javier y PE PEREIRA, María. «Equisingularity at the normalisation». En: *Journal of Topology* 1.4 (2008), págs. 879-909. ISSN: 1753-8416. <https://doi.org/10.1112/jtopol/jtn024>.
- [4] GAFFNEY, Terence. «Polar multiplicities and equisingularity of map germs». En: *Topology. An International Journal of Mathematics* 32.1 (1993), págs. 185-223. ISSN: 0040-9383. [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(93\)90045-W](https://doi.org/10.1016/0040-9383(93)90045-W).
- [5] GIBSON, Christopher G.; WIRTHMÜLLER, Klaus; PLESSIS, Andrew A. du, y LOOIJENGA, Eduard J. N. *Topological stability of smooth mappings*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 552. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [6] GORYUNOV, Victor y MOND, David. «Vanishing cohomology of singularities of mappings». En: *Compositio Mathematica* 89.1 (1993), págs. 45-80. ISSN: 0010-437X.

- [7] GREUEL, G. M. «Der Gauss-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten». En: *Mathematische Annalen* 214 (1975), págs. 235-266. ISSN: 0025-5831. <https://doi.org/10.1007/BF01352108>.
- [8] GREUEL, Gert-Martin. «Constant Milnor number implies constant multiplicity for quasihomogeneous singularities». En: *Manuscripta Mathematica* 56.2 (1986), págs. 159-166. ISSN: 0025-2611. <https://doi.org/10.1007/BF01172153>.
- [9] HOUSTON, Kevin. «A general image computing spectral sequence». En: *Singularity theory*. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007, págs. 651-675. https://doi.org/10.1142/9789812707499_0027.
- [10] HOUSTON, Kevin. «Stratification of unfoldings of corank 1 singularities». En: *The Quarterly Journal of Mathematics* 61.4 (2010), págs. 413-435. ISSN: 0033-5606. <https://doi.org/10.1093/qmath/hap012>.
- [11] JONG, T. de y STRATEN, D. van. «Disentanglements». En: *Singularity theory and its applications, Part I (Coventry, 1988/1989)*. Vol. 1462. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1991, págs. 199-211. <https://doi.org/10.1007/BFb0086383>.
- [12] MARAR, W. L. «The Euler characteristic of the disentanglement of the image of a corank 1 map germ». En: *Singularity theory and its applications, Part I (Coventry, 1988/1989)*. Vol. 1462. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1991, págs. 212-220. <https://doi.org/10.1007/BFb0086384>.
- [13] MARAR, W. L.; NUÑO-BALLESTEROS, J. J., y PEÑAFORT-SANCHIS, G. «Double point curves for corank 2 map germs from \mathbb{C}^2 to \mathbb{C}^3 ». En: *Topology and its Applications* 159.2 (2012), págs. 526-536. ISSN: 0166-8641. <https://doi.org/10.1016/j.topol.2011.09.028>.
- [14] MARAR, Washington Luiz y MOND, David. «Multiple point schemes for corank 1 maps». En: *Journal of the London Mathematical Society. Second Series* 39.3 (1989), págs. 553-567. ISSN: 0024-6107. <https://doi.org/10.1112/jlms/s2-39.3.553>.
- [15] MATHER, J. N. «Stability of C^∞ mappings. III. Finitely determined mapgerms». En: *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* 35 (1968), págs. 279-308. ISSN: 0073-8301.
- [16] MATHER, J. N. «Stability of C^∞ mappings. I. The division theorem». En: *Annals of Mathematics. Second Series* 87 (1968), págs. 89-104. ISSN: 0003-486X. <https://doi.org/10.2307/1970595>.
- [17] MATHER, J. N. «Stability of C^∞ mappings. IV. Classification of stable germs by R -algebras». En: *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* 37 (1969), págs. 223-248. ISSN: 0073-8301.
- [18] MATHER, J. N. «Stability of C^∞ mappings. II. Infinitesimal stability implies stability». En: *Annals of Mathematics. Second Series* 89 (1969), págs. 254-291. ISSN: 0003-486X. <https://doi.org/10.2307/1970668>.
- [19] MATHER, J. N. «Stability of C^∞ mappings. V. Transversality». En: *Advances in Mathematics* 4 (1970), 301-336 (1970). ISSN: 0001-8708. [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(70\)90028-9](https://doi.org/10.1016/0001-8708(70)90028-9).
- [20] MATHER, J. N. «Stability of C^∞ mappings. VI: The nice dimensions». En: *Proceedings of Liverpool Singularities-Symposium, I (1969/70)*. 1971, 207-253. Lecture Notes in Math., Vol. 192.
- [21] MCCLEARY, John. *A user's guide to spectral sequences*. Second. Vol. 58. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. ISBN: 0-521-56759-9.
- [22] MILNOR, J. *Singular points of complex hypersurfaces*. Princeton University Press y the University of Tokio Press, 1968.
- [23] MOND, D. y NUÑO-BALLESTEROS, J. J. *Singularities of Mappings The Local Behaviour of Smooth and Complex Analytic Mappings*. Springer Nature, 2019.
- [24] MOND, David. «Vanishing cycles for analytic maps». En: *Singularity theory and its applications, Part I (Coventry, 1988/1989)*. Vol. 1462. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1991, págs. 221-234. <https://doi.org/10.1007/BFb0086385>.
- [25] MOND, David y MONTALDI, James. «Deformations of maps on complete intersections, Damon's \mathcal{K}_V -equivalence and bifurcations». En: *Singularities (Lille, 1991)*. Vol. 201. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994, págs. 263-284.

- [26] NUÑO-BALLESTEROS, J. J.; ORÉFICE-OKAMOTO, B., y TOMAZELLA, J. N. «Equisingularity of families of isolated determinantal singularities». En: *Mathematische Zeitschrift* 289.3-4 (2018), págs. 1409-1425. ISSN: 0025-5874. <https://doi.org/10.1007/s00209-017-2004-y>.
- [27] NUÑO-BALLESTEROS, J. J. y PALLARÉS-TORRES, I. «A Lê-Greuel type formula for the image Milnor number». En: *Hokkaido Mathematical Journal* 48.1 (2019), págs. 45-59. ISSN: 0385-4035. <https://doi.org/10.14492/hokmj/1550480643>.
- [28] PARUSIŃSKI, Adam. «Topological triviality of μ -constant deformations of type $f(x) + tg(x)$ ». En: *The Bulletin of the London Mathematical Society* 31.6 (1999), págs. 686-692. ISSN: 0024-6093. <https://doi.org/10.1112/S0024609399006086>.
- [29] RUAS, M. A. S. y SILVA, O. N. «Whitney equisingularity of families of surfaces in \mathbb{C}^3 ». En: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 166.2 (2019), págs. 353-369. ISSN: 0305-0041. <https://doi.org/10.1017/S0305004117000883>.
- [30] SAGAN, Bruce E. *The symmetric group*. Second. Vol. 203. Graduate Texts in Mathematics. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions. Springer-Verlag, New York, 2001. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6804-6>.
- [31] SIERSMA, Dirk. «Vanishing cycles and special fibres». En: *Singularity theory and its applications, Part I (Coventry, 1988/1989)*. Vol. 1462. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1991, págs. 292-301. <https://doi.org/10.1007/BFb0086389>.
- [32] TEISSIER, Bernard. «Variétés polaires. II. Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney». En: *Algebraic geometry (La Rábida, 1981)*. Vol. 961. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1982, págs. 314-491. <https://doi.org/10.1007/BFb0071291>.
- [33] TRÁNG, Lê Dũng. «Computation of the Milnor number of an isolated singularity of a complete intersection». En: *Akademija Nauk SSSR. Funkcional'nyi Analiz i ego Priloženija* 8.2 (1974), págs. 45-49. ISSN: 0374-1990.
- [34] TRÁNG, Lê Dũng. «Le concept de singularité isolée de fonction analytique». En: *Complex analytic singularities*. Vol. 8. Adv. Stud. Pure Math. North-Holland, Amsterdam, 1987, págs. 215-227. <https://doi.org/10.2969/aspm/00810215>.
- [35] TRÁNG, Lê Dũng y RAMANUJAM, C. P. «The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type». En: *American Journal of Mathematics* 98.1 (1976), págs. 67-78. ISSN: 0002-9327. <https://doi.org/10.2307/2373614>.
- [36] TRÁNG, Lê Dũng y TEISSIER, B. «Cycles evanescents, sections planes et conditions de Whitney. II». En: *Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981)*. Vol. 40. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, págs. 65-103.
- [37] TRÁNG, Lê Dũng y TEISSIER, Bernard. «Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières». En: *Annals of Mathematics. Second Series* 114.3 (1981), págs. 457-491. ISSN: 0003-486X. <https://doi.org/10.2307/1971299>.
- [38] WALL, C. T. C. «A note on symmetry of singularities». En: *The Bulletin of the London Mathematical Society* 12.3 (1980), págs. 169-175. ISSN: 0024-6093. <https://doi.org/10.1112/blms/12.3.169>.
- [39] ZARISKI, O. «Some open questions in the theory of singularities». En: *B.A.M.S.* (1971).

TEMat monográficos, vol. 3 (12/2021).

e-ISSN: 2660-6003

© 2021 Asociación Nacional de Estudiantes de Matemáticas.

© 2021 los autores de los artículos.

©  Salvo que se indique lo contrario, el contenido está disponible bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento 4.0 Internacional.